ベクトルの微分、積分

ベクトルの微分と積分でよく出てくる関係を見ていきます。
デカルト座標を使っています。

曲線

曲面

線積分

面積分

体積積分

勾配、発散、回転

ガウスの定理

グリーンの定理

ストークスの定理

- 曲線

  デカルト座標上での位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の点によって描かれる曲線 C の長さを求めます (曲線上の点が $\boldsymbol{r}(t)$)。t は曲線のパラメータと呼ばれ、t の変化で動く点の軌跡によって曲線 C は描かれます。t から $t+\Delta t$ での間の曲線の微小な長さ Δs は (曲線は微小な直線を繋げていき、その直線を 0 にした極限とする)

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta t})^2}\Delta t$$

$$\big(\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)\ ,\ \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)\ ,\ \Delta z = z(t+\Delta t) - z(t)\big)$$

これから、$(\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t))/\Delta t$ の大きさに Δt をかけたものは t から $t+\Delta t$ の曲線の微小な長さになっていると言えます。微小区間を足し合わせ、$\Delta t \to 0$ の極限を取って (微小な直線を 0 にする極限)、t の範囲を t_0 から t_1 とすれば

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \sqrt{(\frac{\Delta x_i}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y_i}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z_i}{\Delta t})^2}\Delta t \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} |\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|dt \end{aligned}$$

また、積分の上限を t とすれば $(s = s(t))$、積分の性質から

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt'}|dt'=|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|$$

という関係が導けます。このように t と s に関係があることから、$t=t(s)$ と書けます。なので、曲線 C は t の代わりに曲線の長さ (弧長)s を使って $\boldsymbol{r}(s)$ ともできます。これは、$s=f(t)$ として弧長 s を関数 f で書いたとすると、その逆関数 g を使って $t=g(s)$ と書けるということです。このことを $s=s(t),\ t=t(s)$ として同じ s,t を関数として書いているというだけです (このような表記はよく使われます)。このようになっているので

$$s=s(t(s))\ ,\ t=t(s(t))$$

と書けて、$t(s)$ の s 微分は

$$\frac{dt(s)}{ds}=(\frac{ds}{dt})^{-1}=(|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|)^{-1}$$

となり、$d\boldsymbol{r}/dt\neq 0$ なら t の s 微分はできます。

弧長 s から $\boldsymbol{r}(t)$ と同じものを与える関数 (ベクトル) を $\boldsymbol{G}$ として

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{r}(t(s))$$

としたとき、s 微分は

$$\frac{d\boldsymbol{G}(s)}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}(t(s))}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}$$

t 微分もすることができて

$$\frac{d\boldsymbol{G}(s(t))}{dt}=\frac{d\boldsymbol{G}(s)}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

となります。特に s 微分は

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|^{-1}$$

なので、これの大きさは

$$|\frac{d\boldsymbol{G}}{ds}|=|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}|=|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}||\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|^{-1}=1$$

となることから、単位ベクトルです。$d\boldsymbol{r}/dt$ は

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt})$$

から、曲線の x, y, z 方向の変化、つまり接線になっています。このため、$d\boldsymbol{r}/dt$ は曲線の接ベクトルと呼ばれます。そして、$d\boldsymbol{G}/ds = d\boldsymbol{r}/ds$ は接ベクトルで大きさが 1 なので単位接ベクトルと呼ばれます。

曲線に垂直な方向 (法線方向) を持つベクトルである法線ベクトルは接ベクトルに直交することから求められます。これは 2 次関数を習うときに、接線に垂直な線を法線と言っていたのと同じです。なので、高校数学の知識で法線ベクトルを求められます。

例として、$y = x^2$ の曲線を使います。これの接線の傾き a_1 は $2x$ です。これに垂直な線の傾き a_2 は、$a_1 a_2 = -1$ から $a_2 = -1/2x$ です。傾きから接線方向のベクトルは $(1, 2x)$、法線方向のベクトルは $(2x, -1)$ (符号は逆でもいい) となります。これはスカラー積を取れば 0 になるのでちゃんと直交しています。

法線ベクトルをもっと単純に求める方法があります。2 次元座標での曲線はパラメータ t に依存する $x(t), y(t)$ によって描けるので、曲線は適当な関数 $F(x, y)$ によって $F(x, y) = 0$ とすればいいです。これを t で微分すると

$$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) \cdot (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (\boldsymbol{r} = (x, y))$$

$dx/dt, dy/dt$ は曲線の接ベクトルなので、それとのスカラー積が 0 になるのは接ベクトルと直交するベクトル、つまり法線ベクトルです。このように曲線を $F(x, y) = 0$ と表したとき、それの x, y の偏微分が法線ベクトルとなります。例えば $y = x^2$ では $F(x, y) = x^2 - y = 0$ なので、法線ベクトルは $(2x, -1)$ となり、傾きから求めたのと一致します。また、$(-2x, 1)$ も法線ベクトルで、これは $(2x, -1)$ を反転させたものです。このように $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y)$ からはどちらの方向かは決定されません。ちなみに、3 次元での曲線に直交するベクトルは接ベクトルに垂直な面上にいるベクトルです。

弧長 s の 2 回微分は

$$\begin{aligned}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}| = \frac{d}{dt}(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt})^{1/2} &= \frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt})^{-1/2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt})^{-1/2} \\ &= \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|^{-1} \\ &= \frac{\boldsymbol{r}'' \cdot \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{r}' = d\boldsymbol{r}/dt$ としています。

今度は $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{r}(s(t))$ の t の 2 回微分を行いますが、先に関係性を出しておきます。$d\boldsymbol{G}/ds$ の大きさは 1 なので

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{G}}{ds} = 1$$

これの s 微分は

$$0 = \frac{d^2\boldsymbol{G}}{ds^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{G}}{ds} + \frac{d\boldsymbol{G}}{ds} \cdot \frac{d^2\boldsymbol{G}}{ds^2} = 2\frac{d\boldsymbol{G}}{ds} \cdot \frac{d^2\boldsymbol{G}}{ds^2}$$

よって

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{ds} \cdot \frac{d^2\boldsymbol{G}}{ds^2} = 0$$

となるので、$d\boldsymbol{G}/ds$ と $d^2\boldsymbol{G}/ds^2$ は直交しているのが分かります。$d\boldsymbol{G}/ds = d\boldsymbol{r}/ds$ は単位接ベクトルなので、接ベクトルと直交する $d^2\boldsymbol{G}/ds^2$ は法線ベクトルです。そして、$\boldsymbol{G}(s)$ を t で 2 回微分は

$$\frac{d^2\boldsymbol{G}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{d\boldsymbol{G}}{ds}\frac{ds}{dt}) = \frac{ds}{dt}\frac{d}{dt}\frac{d\boldsymbol{G}}{ds} + \frac{d\boldsymbol{G}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = (\frac{ds}{dt})^2\frac{d^2\boldsymbol{G}}{ds^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\boldsymbol{G}}{ds}$$

となっており、これは法線ベクトルと単位接線ベクトルの和です (それぞれにスカラー倍 $(ds/dt)^2$, d^2s/dt^2 がいる)。

言葉の定義ですが、ここで閉曲線と言ったときは単一閉曲線 (単純閉曲線) を指します。これは閉曲線が自分自身と交差していない場合です (∞ のようになっていない)。

- 曲面

曲面 S は 2 次元なので曲線からパラメータを 1 つ増やして、位置ベクトルによって

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{r}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

と与えられます。u, v のどちらか片方のパラメータを固定すれば $\boldsymbol{r}$ は曲線を描くので、$v = v_0$ に固定した $\boldsymbol{r}(u, v_0)$ での曲線、v_0 の値を変えた曲線、というのを続けていけば曲面となります ($u = u_0$ とした場合も同じ曲面になる)。大雑把に言えば、1 つのパラメータで曲線を作り、残りの 1 つで曲線を動かすことで面を作ります。簡単な例で言えば、$x = x_0$ の直線を y 方向にずらしていけば、その軌跡は面になるということです。なので、曲面の接線は u, v の変化によるので ($\boldsymbol{r}(u, v_0)$ での曲線の接線は u の変化により、v_0 を変化させて曲線に厚みを与えるのは v の変化によるから)、接ベクトルは u, v による 2 つあり、

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

$\partial\boldsymbol{r}/\partial u$ が u 方向 (u の変化で位置ベクトルが動く方向) の接ベクトル、$\partial\boldsymbol{r}/\partial v$ が v 方向の接ベクトルです。これらによる微小な長さは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u\ ,\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v$$

この 2 つのベクトルは長方形を作っているとは限らないので、近似的に平行四辺形の面積としてベクトル積によって

$$|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v| = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}|\Delta u \Delta v$$

と与えられ、これがパラメータを使った微小な面積 Δs です。

曲面に垂直な単位法線ベクトルは曲線と同じように求められます。曲面なので今はパラメータが 2 つあり、曲面は位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ によって描かれます、このときパラメータの 1 つを固定すれば、変化するパラメータが 1 つになるので $\boldsymbol{r} = (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0))$ は曲線を描きます ($v = v_0$ に固定)。同様に、u を固定したときの曲線も書けて、それは $\boldsymbol{r} = (x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v))$ となります。曲線と同じように曲面を表す式を $F(x,y,z) = 0$ とすれば、$v = v_0$ に固定した曲線と直交するベクトルは偏微分を使って

$$0 = \frac{dF}{du} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{du} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{du}$$

v を固定して 1 変数のようにしているので u 微分にしています。$d\boldsymbol{r}/du$ は $\boldsymbol{r}$ の u の変化による接線方向 (接ベクトル) を与えるので

$$(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$$

は $\boldsymbol{r} = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$ による曲線に直交します。同様に、$u = u_0$ に固定したときの曲線では

$$0 = \frac{dF}{dv} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dv} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dv} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dv} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dv}$$

$d\boldsymbol{r}/dv$ は $\boldsymbol{r}$ の v の変化による接ベクトルとなり、このときも

$$(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$$

が直交しています。よって、これは曲面に沿った 2 つの接ベクトルに直交するベクトルなので、曲面の法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ は曲面を表す関数 $F(x, y, z)$ によって

$$\boldsymbol{N} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$$

これから単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|}$$

と求まります。曲線の場合と同じで法線ベクトルの向きが曲面の上向きなのか下向きなのかは決定されていません。また、2 つの接ベクトルに直交していることからベクトル積を使って、単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\ ,\ \boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|}(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v})$$

と与えられます。このため

$$\Delta s = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}|\Delta u \Delta v = |\boldsymbol{N}|\Delta u \Delta v$$

と書けます。

法線との関係についてもう少し触れておきます。3 次元空間上に曲面 S があるとします。S 上の微小な面を s とし、その s の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とします。z 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{n}$ の間の角度を α とすれば、$\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} = \cos\alpha$ です。s の面積を Δs としてかければ

$$\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}\Delta s=\Delta s\cos\alpha$$

これは、ベクトル $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y+v_z\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{e}_z$ のスカラー積は $\boldsymbol{e}_z$ 成分である v_z になるのと同じで、このスカラー積は $\boldsymbol{n}$ の法線を持つ面 $\Delta\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}\Delta s$ を $\boldsymbol{e}_z$ を法線とする面にします。つまり、xy 平面上の微小な面積 $\Delta x\Delta y$ とすれば

$$\Delta x\Delta y=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}\Delta s=\Delta s|\cos\alpha| \tag{1}$$

面積は正なので cos に絶対値を付けています。また、法線ベクトルを曲面の式 $F(x,y,z)=0$ を使って書くと

$$\begin{aligned}\Delta s=\frac{\Delta x\Delta y}{\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}}=\frac{\Delta x\Delta y}{\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{N}}|\boldsymbol{N}|&=\frac{\Delta x\Delta y}{\partial F/\partial z}|\boldsymbol{N}|\quad(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{N}=\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=\frac{\partial F}{\partial z})\\&=\frac{\Delta x\Delta y}{\partial F/\partial z}\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2}\\&=\Delta x\Delta y\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial z})^{-2}(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^{-2}(\frac{\partial F}{\partial y})^2+1}\end{aligned}$$

曲面の式は y,z を与えれば z が決まるという意味なので、$F(x,y,z)=z-g(x,y)=0$ とすれば

$$\Delta s=\Delta x\Delta y\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}\quad(z=g(x,y))$$

法線ベクトルにも $z-g(x,y)=0$ を使うと

$$\boldsymbol{N}=\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=-\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{e}_x-\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$$

これの大きさは

$$|\boldsymbol{N}|=\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}$$

よって、Δs は $\Delta x\Delta y$ によって

$$\Delta\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}\Delta s=\Delta x\Delta y(-\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{e}_x-\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z) \tag{2}$$

と書けます。

- 線積分

　通常の積分は

$$\int dx\ f(x)$$

これは x を均等に Δx で分割しているとして和で書くと

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$$

x_i は N 分割されている x 軸の i 番目の位置で、Δx は x_i, x_{i-1} の間隔です (例えば積分の範囲が 0 から a なら $\Delta x = a/N$)。これは x 軸から出ている $f(x)$ による棒グラフの面積を足していくイメージです。和の連続極限 $N \to \infty$ を取ったものが積分になります。

　これに対して線積分は、x 軸を任意の曲線に置き換えたものです。つまり、ある曲線 C が与えられ、その曲線上の分割された微小な長さを Δs、曲線上での関数 f の値を与える分割された曲線上の位置を p_i とし

$$\sum_{i=1}^{N} f(p_i)\Delta s$$

これの連続極限を取った

$$\int_C f(p)ds$$

を線積分 (line integral) と呼びます。C は曲線 C 上であることを表し、その範囲内で積分をすることを意味します。曲線 C は経路や積分経路とも呼ばれます。というわけで、線積分は曲線上の棒グラフを足しているイメージです。

　これを計算するときには曲線 $\boldsymbol{r} = (x(t), y(t), z(t))$ 上でスカラー関数 $f(x, y, z)$ を積分することから

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\frac{ds}{dt}dt$$

として、$ds/dt = |d\boldsymbol{r}/dt|$ を $\boldsymbol{r} = (x(t), y(t), z(t))$ から求めて、$f(x(t), y(t), z(t))$ を t 積分すればいいです。例えば、曲線が $t = t_1 \sim t_2$ の範囲で $\boldsymbol{r} = (t, 0, 0)$ と与えられ、関数が $f(x, y, z) = x + y + z$ となっているなら

$$\int_C f(x,y,z)\frac{ds}{dt}dt = \int_C (t+0+0)\frac{ds}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} tdt$$

$$\Big(\frac{ds}{dt} = |\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} = 1\Big)$$

となります。これは曲線が x 軸上の直線なので普通の積分と同じです。

通常は弧長 s による積分を線積分と呼びますが、任意のパラメータ t によって

$$\int_C f(x,y,z)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))dt$$

としたものを線積分と言う場合もあります。パラメータの積分なので、曲線の範囲がパラメータの範囲となっています。

同じことはベクトルでもできます。ただし、ベクトルの場合は曲線上でベクトルの向きが統一されていないので、どの方向を向かせるのかを決めます。ベクトルの線積分は、積分するベクトル $\boldsymbol{F}$ の曲線の接ベクトル方向の大きさに対して行うと定義されています。そうすると、和の形は曲線上のある点での単位接ベクトル $\boldsymbol{q}_i$ と曲線の微小な長さ Δs を使って

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}(p_i)\cdot\boldsymbol{q}_i\Delta s_i$$

となります ($\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{q}$ の間の角度を θ とすれば $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{q} = |\boldsymbol{F}|\cos\theta$ なので、ベクトルは曲線の接線方向の大きさになる)。これの連続極限によって線積分は

$$\int_C \boldsymbol{F}(p)\cdot\boldsymbol{q}ds$$

もしくは、曲線 C を弧長 s によって $\boldsymbol{r}(s)$ で与えたとすると、$\boldsymbol{q} = d\boldsymbol{r}/ds$ から

$$\int_C \boldsymbol{F}(p)\cdot\boldsymbol{q}ds = \int_C \boldsymbol{F}(p)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds = \int_C \boldsymbol{F}(p)\cdot d\boldsymbol{r}$$

$d\boldsymbol{r} = (dx,dy,dz)$ なので $\boldsymbol{F}(p) = (F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$ とすれば

$$\int_C \big(F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz\big)$$

となります。曲線 C を s でなく任意のパラメータ t とするなら微小部分は

$$d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt \qquad \big(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt\big)$$

なので、パラメータ t の範囲で

$$\begin{aligned}&\int_C \big(F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz\big)\\ &= \int_{t_1}^{t_2} \big(F_1(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + F_2(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + F_3(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\big)dt\end{aligned}$$

として積分を実行すればいいです。

また、線積分を

$$\oint \boldsymbol{F}(p)\cdot d\boldsymbol{r}$$

と表記しているときは、閉曲線 (曲線の始点と終点が同じになる閉じた曲線) を意味します。電磁気なんかでよく出てきます。

ベクトルの計算に慣れていると間違いを起こしやすい例を見ておきます。2 次元の xy 平面とし、積分経路を原点 $(0,0)$ から $(a,0)$ への直線に取ります。積分するベクトルは $\boldsymbol{F}=(x^2,0)$ とします。これは x 軸上の積分でしかないので単純に

$$\int_{C_+}\boldsymbol{F}(x)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^a x^2dx=\frac{1}{3}a^3$$

と求まります。これを x 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$ を使って計算すると

$$\int_{C_+}\boldsymbol{F}(x)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{C_+}\boldsymbol{F}(x)\cdot\boldsymbol{e}_xdx=\int_0^a|\boldsymbol{F}(x)|dx=\int_0^a x^2dx=\frac{1}{3}a^3$$

となります ($\boldsymbol{F}(x)$ と $\boldsymbol{e}_x$ の向きは同じなので $\boldsymbol{F}(x)\cdot\boldsymbol{e}_x=|\boldsymbol{F}(x)|=x^2$)。ここまでは何も問題は起きていません。

今度は経路を逆にし $(a,0)$ から $(0,0)$ に向かうようにします。そうすると

$$\int_{C_-}\boldsymbol{F}(x)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_a^0 x^2dx=-\frac{1}{3}a^3$$

これを単位ベクトルを使って計算しようとします。経路は a から 0 と負の方向を向いているので、その方向に合わせるために $d\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{e}_xdx$ とすると

$$\int_{C_-}\boldsymbol{F}(x)\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_a^0\boldsymbol{F}(x)\cdot\boldsymbol{e}_xdx=-\int_a^0|\boldsymbol{F}(x)|dx=+\frac{1}{3}a^3 \tag{3}$$

このように符号が反転したものが求まります。正しいのは $-a^3/3$ の方です。実際、和の形では

$$\sum_i\boldsymbol{F}_i(x)\cdot\Delta\boldsymbol{r}=\sum_i|\boldsymbol{F}_i(x)||\Delta\boldsymbol{r}|\cos\pi=-\sum_i|\boldsymbol{F}_i(x)||\Delta\boldsymbol{r}|<0$$

なので、積分も負になります。間違いは $d\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{e}_xdx$ として x が減少する方向を向けたのに、積分範囲を a から 0 のままにしていることです。

しかし、経路の向きによって線積分は与えられており、最初の $(0,0)$ から $(a,0)$ の場合では経路の方向 (積分範囲の下限 0 から上限 a への方向) と $d\boldsymbol{r}$ の方向が合っていて、(3) でも経路の方向 (積分範囲の下限 a から上限

0 への方向) と $d\boldsymbol{r}$ の方向が合っています。このため、積分範囲の取り方が見た目には問題がないように思えてしまいます。

このように、ベクトルの計算に慣れてくると単位ベクトルを使う方が良いように思えてきますが、線積分の実行においては注意が必要になります。結局のところ、線積分はパラメータを使って実行するのが素直な方法です。今の例で言えば、直線 $\boldsymbol{r}$ をパラメータ x によって $(x,0)$ として、パラメータ x を a から 0 に取るということです。

- 面積分

曲線上の積分が作れるので曲面上での積分も作れて、面積分 (surface integral) と呼ばれます。今度は曲面 S 上の微小な面積 Δs を考えて、この地点に対応する関数の $F(p_i)$ を足すというだけです。つまり

$$\sum_{i=1}^{N} F(p_i)\Delta s$$

なので、積分にすれば

$$\int_S ds\ F(p)$$

S と添え字をつけて曲面 S の範囲であることを表しています。注意すべきなのは ds は曲面上の 2 次元積分ということです。このことを強調するために

$$\int\int_S ds\ F(p)$$

として積分記号を 2 つ書くこともあります。

ベクトルの場合では曲面の法線方向 (面に垂直な方向) の大きさによって作ると定義します。そうすると、単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}(p_i)\cdot\boldsymbol{n}\Delta s$$

なので

$$\int_S \boldsymbol{F}(p)\cdot\boldsymbol{n}ds$$

また、面積ベクトルは面積に単位法線ベクトルをかけたものとして定義されているので、$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}ds$ から

$$\int_S \boldsymbol{F}(p)\cdot d\boldsymbol{s}$$

と書かれます。ただし、曲面の法線方向は 2 方向あるので、具体的に計算するときはどちら向きかに気を付ける必要があります。

曲面は xy 平面のような面だけでなく、球の表面のように閉じた曲面もあります。閉じた曲面は閉曲面と世慣れます。閉曲線の線積分と同じように、閉曲面の面積分は

$$\oint_S \boldsymbol{F}(p)\cdot d\boldsymbol{s}$$

と表記されます。個人的な使い方ですが、この場合を表面積分と言ってる場合もあります。

- 体積積分

線 (1 次元積分)、面 (2 次元積分) の次は体積で、体積積分 (volume integral) と呼ばれます。これは単純でただの 3 次元積分です。x, y, z 軸とし、その微小な長さを $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とすれば、3 次元の微小な体積は $\Delta x\Delta y\Delta z$ です。後は知りたい 3 次元領域 V に合わせた範囲で足し合わせていけばいいです。よって,

$$\int dx\int dy\int dz\ F(x,y,z)=\int_V d^3x\ F(x,y,z)$$

となります。左辺の積分範囲は V に合わせた範囲です。もしくは、微小体積を $\Delta\tau$ として

$$\int_V d\tau\ F$$

のようにも表記されます。

線や面と違い体積には方向がないので、ベクトルでも

$$\int_V d^3x\ \boldsymbol{F}$$

となるだけです。

- 勾配、発散、回転

微分演算子の表記として、

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

というのを定義します。∇ はナブラ (nabla) と呼ばれます。スカラー関数 $\phi(x,y,z)$ に作用させた $\nabla\phi$ を勾配 (gradient) と呼び、gradϕ とも表記され

$$\nabla\phi=\mathrm{grad}\phi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

∇ の積の規則は、ϕ,ϕ_1,ϕ_2 をスカラー関数、$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ をベクトル関数として

$$\nabla(\phi_1 + \phi_2) = \nabla\phi_1 + \nabla\phi_2$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B}$$

$$\nabla(\phi_1 \phi_2) = \phi_2 \nabla\phi_1 + \phi_1 \nabla\phi_2$$

$$\nabla \cdot (\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{A} + \phi\nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\nabla \times (\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi \times \boldsymbol{A} + \phi\nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A} \cdot$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$$

となっています。成分を計算していけば示せます。

∇ とベクトル $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ とのスカラー積を発散 (divergence) と呼び

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\nabla\phi$ と ∇ のスカラー積は

$$\Delta = \nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Δ はラプラシアン (Laplacian) と呼ばれます。

ベクトルの回転 (rotatoin) は

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \boldsymbol{e}_y(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \boldsymbol{e}_z(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$

と定義されています。$\mathrm{curl}\boldsymbol{A}$ と表記されることもあります。

ベクトルの計算でよく出てくるものを羅列すると

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = {} & \boldsymbol{e}_x(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}) + \boldsymbol{e}_y(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}) \\ & + \boldsymbol{e}_z(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2})\end{aligned}$$

- ガウスの発散定理

　ベクトル $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の発散のある 3 次元領域 V での体積積分は

$$\int_V d^3x\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\int_V d^3x(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})$$

これの z 積分を実行します。

　領域 V の表面を閉曲面 S とし、S は $F(x,y,z)=0$ に従っているとします。x,y を与えれば z は決まるので、それを $z=g(x,y)$ とします。

　V を z 方向に貫く直線を与え、それが表面 S で交わる点を P_1,P_2 とします (他の z 方向に貫く直線とは交わらない)。P_2 は z 方向での上側、P_1 は下側の点で (P_1 から入って P_2 から出てくる)、P_1 での z を $g_2(x,y)$、P_1 での z を $g_1(x,y)$ とします。

　z 積分は、x,y が固定されていると A_z は z のみの関数として扱えるので

$$\int_{g_1}^{g_2}dz\frac{\partial A_z}{\partial z}=A_z(x,y,g_2(x,y))-A_z(x,y,g_1(x,y))$$

そうすると、S 上の x,y の範囲の積分を加えれば

$$\oint_S dxdy\int_{g_1}^{g_2}dz\frac{\partial A_z}{\partial z}=\int_S dxdy(A_z(x,y,g_2(x,y))-A_z(x,y,g_1(x,y)))$$

右辺は S を直線が出ていく面を S_2、入ってくる面を S_1 と分解して

$$\int_{S_1}dxdy\ A_z(x,y,g_2(x,y))-\int_{S_1}dxdy\ A_z(x,y,g_1(x,y))$$

点 P_2 を含む S_1 上の微小な面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_2$、面積を Δs_2 として、$\Delta\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{n}_2\Delta s_2$ とすれば

$$\boldsymbol{e}_z\cdot\Delta\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}_2\Delta s_2=\Delta s_2\cos\alpha_2$$

α_2 は $\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{n}_2$ の間の角度で、$\boldsymbol{n}_2$ は領域 V の外側を向くように取ります。$\boldsymbol{e}_z$ 方向を法線とする微小な面積は $\Delta x\Delta y$ なので、(1) から

$$\Delta s_2\cos\alpha_2=\Delta x\Delta y \tag{4}$$

と与えられます。面の法線方向を考慮するので cos に絶対値をつけていません。

　同じように点 P_1 でも考えますが、P_2 での $\boldsymbol{n}_2$ が z 軸 ($\boldsymbol{e}_z$) から 90 度未満なら、P_1 での単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ は 90 度を越える必要があります。そうでないと、入ってきた直線は外に出られないからです (直線上に面を 2 つおいて、片方の面をどんどん傾けていくと 90 度で直線から外れる)。なので、$\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{n}_1$ の間の角度 α_1 は、(4) となっているなら

$$\boldsymbol{e}_z\cdot\Delta\boldsymbol{s}_1=\Delta s_1\cos\alpha_1=-\Delta x\Delta y$$

これらを使うことで

$$\begin{aligned}\int_{S_2}dxdy\ A_z(x,y,g_2(x,y)-\int_{S_1}dxdy\ A_z(x,y,g_1(x,y)))&=\int_{S_2}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_zA_z+\int_{S_1}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_zA_z\\&=\oint_S d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_zA_z\end{aligned}$$

S_1 と S_2 が重なる部分は打ち消し合って影響しません (その部分でも法線の方向は反対だから)。

他の成分でも同様なので 3 個の成分を足すことで、$\boldsymbol{n}$ を V の外側を向く単位法線ベクトルとして

$$\int_V d^3x\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\oint_S d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}\qquad(d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}ds)$$

これをガウスの発散定理やガウスの定理と呼びます。

- グリーンの定理

xy 平面上の面 D を囲む閉曲線を γ とします。曲線 γ 上の点は $y=h(x)$ で与えられるとします。そうすると、面 D において、関数 $F(x,y)$ は

$$\int_D dxdy\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\int_a^b dx\int_{h_1}^{h_2}dy\frac{\partial F}{\partial y}=\int_a^b dx(F(x,h_2(x))-F(x,h_1(x)))$$

x の積分範囲 a,b は D になる範囲です。γ を反時計回りとし、その方向に沿って、a から b の範囲で増加する部分を γ_+、a から b の範囲で減少する部分を γ_- とします (例えば γ が円なら、下半円が γ_+、上半円が γ_-)。そして、γ は 2 つの曲線 γ_+,γ_- だけに分割できるとします ($\gamma=\gamma_++\gamma_-$)。

そうすると、$x=x_0$ のとき、$h_1(x_0)$ は γ_- 上、$h_2(x_0)$ は γ_+ 上です。これを x が a から b の範囲で足し合わせれば最右辺になるので、γ_+,γ_- 上での積分になり

$$\begin{aligned}\int_a^b dx(F(x,h_2(x))-F(x,h_1(x)))&=-\int_{\gamma_+}dx\ F(x,h_2(x))-\int_{\gamma_-}dx\ F(x,h_1(x))\\&=-\oint_\gamma dx_1\ F(x_1,h_2(x_1))\end{aligned}$$

よって

$$\int_D dxdy\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=-\oint_\gamma dx\ F(x,h(x))\tag{5}$$

となります。

また、γ が範囲 a, b の増加と減少に対して 1 つずつしか γ_+, γ_- が出てこないとしましたが、複数あるときでも ($x = x_0$ で 3 回以上閉曲線と交差する場合)、同じ結果になります。γ を適当に 2 つに切断したとき、その切断部分の曲線の方向が反対になるので、打ち消し合います (例えば反時計周りの円を縦に切断したとき、出来上がる 2 つの半円の切断部分の方向は反対)。なので、上手く γ を切断して γ_+, γ_- が 1 つずつしか出てこないようにし、後でそれらを足し合わせてもとの曲線にすればいいです。

今度は別の関数 $G(x, y)$ に対して x 積分でなく y 積分を残すように

$$\int_D dxdy \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = \int_{a'}^{b'} dy \int_{h'_1}^{h'_2} dx \frac{\partial G}{\partial x} = \int_{a'}^{b'} dy (G(h'_2(y), y) - G(h'_1(y), y))$$

$x = h'(y)$ としています。γ は反時計周りなので $y = y_0$ に対して、a' から b' へ増加する曲線部分に $h'_1(y_0)$、減少する曲線部分に $h'_2(y_0)$ がいます。よって

$$\int_D dxdy \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = \oint_\gamma dy\ G(h'(y), y)$$

(5) と合わせることで

$$\oint_\gamma (Fdx + Gdy) = \int_D dxdy (\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y})$$

これをグリーンの定理と呼びます。

- ストークスの定理

  ベクトル $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)$ の回転をある曲面 S で面積分して

$$\int_S d\boldsymbol{s} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \int_S ds\ \boldsymbol{n} \cdot ((\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{e}_x + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{e}_y + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{e}_z)$$

これを見ていきます。S は閉曲線 C を縁にしているとし、C の進行方向に対して右ねじの方向に $\boldsymbol{n}$ の方向を取ります (平面上で反時計周りなら、$\boldsymbol{n}$ の方向はその平面に対して上向き)。右辺は (2) から

$$\begin{aligned}
\int_S ds\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_1 (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) &= -\int_S dxdy \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) \\
\int_S ds\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_2 (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) &= -\int_S dxdy \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) \\
\int_S ds\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_3 (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) &= \int_S dxdy (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})
\end{aligned}$$

$z = g(x, y)$ としています。右辺は S になるように x, y の範囲を取ります (xy 平面上の S に対応する面の領域)。A_x, A_y, A_z の項をまとめて書くと

$$
\begin{aligned}
\int_S d\boldsymbol{s}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) =& \int_S dxdy(-\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial A_x}{\partial y})+\int_S dxdy(\frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}) \\
&+\int_S dxdy(-\frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y})
\end{aligned}
$$

A_x は $A_x(x,y,g(x,y))$ なので

$$
\frac{\partial A_x}{\partial y}=\frac{\partial A_x}{\partial y}+\frac{\partial A_x}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial A_x}{\partial y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}
$$

これを第一項に入れて、(5) を使うと

$$
-\int_S dxdy(\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial A_x}{\partial y})=\int_S dxdy\frac{\partial A_x}{\partial y}=\oint_C dx\ A_x
$$

最右辺の x の範囲は閉曲線 C になる範囲です。第二項も同様です。

第三項は

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} =& -\frac{\partial}{\partial y}(A_z\frac{\partial z}{\partial x})+A_z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}(A_z\frac{\partial x_z}{\partial y})-A_z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\
=& -\frac{\partial}{\partial y}(A_z\frac{\partial z}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial x}(A_z\frac{\partial z}{\partial y})
\end{aligned}
$$

と変形できるので、グリーンの定理を使うことで

$$
\int_S dxdy(\frac{\partial}{\partial x}(A_z\frac{\partial z}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial y}(A_z\frac{\partial z}{\partial x}))=\oint_C(A_z\frac{\partial z}{\partial x}dx+A_z\frac{\partial z}{\partial y}dy)=\oint_C dz\ A_3
$$

$z=g(x,y)$ なので

$$
dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy
$$

となっています。

よって

$$
\begin{aligned}
\int_S d\boldsymbol{s}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) =& \oint_C(A_1dx_1+A_2dx_2+A_3dx_3) \\
=& \oint_C d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

となり、これをストークスの定理と呼びます。