ベクトルの計算

基本的なベクトルの計算をまとめます。
図を描くのが面倒だったので図なしです。

- ベクトル

「ベクトル」での話を簡単にまとめます。ベクトルは方向を持った量、スカラーは方向を持たない量（実数とかの普通に使われている数のこと）です。ベクトルに対して、ベクトルでないもの (実数) をスカラーと呼ぶというだけです。太字をベクトル、そうでないものをスカラーとして区別して書きます。ここでは、スカラーは実数に制限します。

3 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、基準となる 3 個の軸の目盛りの値によって具体的な値が与えられます。その軸を x_1, x_2, x_3 軸とし、その目盛りの値 v_1, v_2, v_3 に対応して、$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と書きます。v_1, v_2, v_3 はベクトルの成分と呼ばれます。変数 x を持つ関数になっていても、$\boldsymbol{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ となるだけです。関数 $f(x)$ はスカラーです。

ベクトルの成分はベクトルを量として指定するときの基準に依存します。その基準を与えるものを基底と呼びます。なので、ベクトルを $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と書くときは何を基底としているかをはっきりさせる必要があります。基底は基底の項で触れます。また、座標系という言葉は基底として何を選んだかに対応する言葉です

基本的な計算規則は

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

$$C(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = C\boldsymbol{a} + C\boldsymbol{b}$$

$$C\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}C$$

$$(C_1 + C_2)\boldsymbol{a} = C_1\boldsymbol{a} + C_2\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_2 + b_3)$$

$$C\boldsymbol{a} = C(a_1, a_2, a_3) = (Ca_1, Ca_2, Ca_3)$$

$$C(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (C(a_1 + b_1), C(a_2 + b_2), C(a_3 + b_3)) = C\boldsymbol{a} + C\boldsymbol{b}$$

C, C_1, C_2 は実数です。

言葉の定義ですが、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と言ったときは原点からある点を結ぶベクトルです。例えば、2 次元空間での (x,y) の点の位置ベクトルと言ったときは、$\boldsymbol{r}=(x,y)$ となります。

- 基底

単位ベクトルの定義は

$$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\ ,\ |\boldsymbol{e}|=1$$

$|\ |$ はベクトルの大きさ (長さ)

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

を表す記号で、ベクトルの大きさは正です。ベクトルの大きさは専門的になるとノルム (norm) と呼ぶことが多くなってきますが、ここでは大きさと言っていきます。また、絶対値での $|\ |$ と区別するために $\|\ \|$ を使う場合もありますが、見づらくなるだけな気がするのでここでは使いません。

最も多く使われている軸の基準を定義します。ベクトル成分を与える 3 個の軸はそれぞれが直交していて、ベクトルの大きさは軸の目盛り通りの値を持つとします。これは 3 次元デカルト座標と呼ばれます。このとき、軸を表すベクトルはお互いが直交する 3 個の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ で与えられます。そして、値を

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)\ ,\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0)\ ,\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$$

としたものを標準基底 (standard basis) や基本ベクトルと呼びます。なので、デカルト座標での x_1,x_2,x_3 軸方向を向いた単位ベクトルが標準基底です。$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$($\boldsymbol{e}_1$ はベクトル $\boldsymbol{e}_1$ であって、ベクトル $\boldsymbol{e}$ の e_1 成分ではない) はそれぞれの軸上での 1 なので、任意のベクトルは

$$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3=(v_1,v_2,v_3) \tag{1}$$

と書けます。これの v_1,v_2,v_3 は標準基底での値です。また、軸を x_1,x_2,x_3 でなく x,y,z として、$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y+v_z\boldsymbol{e}_z=(v_x,v_y,v_z)$ と表記することが多いです。

軸の目盛り通りというのは、例えば $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1$ の大きさは $|\boldsymbol{v}|=|v_1||\boldsymbol{e}_1|$ なので ($|\boldsymbol{v}|$ は正で、$|v_1|$ は絶対値)、$|\boldsymbol{e}_1|\neq 1$ では $|v_1|$ の値ではなくなるからです。

このように、標準基底によって任意のベクトルは表現できます。これを一般化したものが、基底です。つまり、基底は任意のベクトルを (1) と書ける $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ として定義されます。デカルト座標をよく使うので勘違いしやすいですが、基底の定義には、お互いが直交する、単位ベクトルというのは含まれていません。$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ が基底であるためには、$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ は線形独立で、任意のベクトルを $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ による線形結合で書けるという条件だけです。

線形独立と線形結合が何か見ていきます。任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ が実数 u_1,u_2,u_3 とベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ によって

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{a}_1+u_2\boldsymbol{a}_2+u_3\boldsymbol{a}_3 \tag{2}$$

と書けるとき、線形結合 (linear combination) と呼ばれます。このとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立 (linearly independent) なら $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は基底となります。線形独立は、$\boldsymbol{a}_1$ は $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ の線形結合から作れない、$\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合から作れない、$\boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合から作れないということです (例えば標準基底 $\boldsymbol{e}_1$ を $\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{e}_3$ から作れない)。式で表現すると、実数 C_1, C_2, C_3 とベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ によって

$$C_1\boldsymbol{a}_1 + C_2\boldsymbol{a}_2 + C_3\boldsymbol{a}_3 = 0$$

を満たすのが、$C_1 = C_2 = C_3 = 0$ のときだけなら線形独立となります。

線形独立な基底ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に対応する展開係数は 1 つしかありません。これは簡単に分かります。$\boldsymbol{u}$ を線形独立な $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ によって展開し、このとき異なる展開係数によって

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + u_3\boldsymbol{a}_3\ ,\ \boldsymbol{u} = u'_1\boldsymbol{a}_1 + u'_2\boldsymbol{a}_2 + u'_3\boldsymbol{a}_3$$

とします。そうすると

$$0 = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = (u_1 - u'_1)\boldsymbol{a}_1 + (u_2 - u'_2)\boldsymbol{a}_2 + (u_3 - u'_3)\boldsymbol{a}_3$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立なので、これを満たすには係数が 0 でなくてはいけなく

$$u_1 - u'_1 = 0\ ,\ u_2 - u'_2 = 0\ ,\ u_3 - u'_3 = 0$$

なので、$u_1 = u'_1,\ u_2 = u'_2,\ u_3 = u'_3$ となって、同じ展開係数と分かります。よって、あるベクトルに対して線形独立な $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を選んだとき、対応する展開係数は 1 つに決まります。

このように、基底ベクトルの特殊な場合が標準基底です。(2) のように書ける基底ベクトルの組は 1 つとは限りませんが、標準基底は定義上 1 つしかありません。

- スカラー積

記号として「$\cdot$」を使って

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

このようなものを定義し、これを内積 (inner product) やスカラー積 (scalar product) と呼びます。

他にもドット積 (dot product) とも呼ばれます。内積はこれ以外も指しますが、ドッド積はこれだけを指します。また、後で出てくるベクトル積に対応してスカラー積と呼ぶと区別が分かりやすいので、ここではスカラー積と呼んでいきます。

θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ による角度です。もしくは、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の角度を

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

で定義しているとも言えます (「ベクトル空間」の角度の項参照)。そして、スカラー積が 0 になるときは 2 つのベクトルが直交していることを表します。

内積「·」の定義は計算において、交換、分配、結合法則

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(C\boldsymbol{b})=C(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

を満たしています (C は実数)。交換、結合法則の証明はそのままですが、分配法則は $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ と $\boldsymbol{c}$ の角度を θ、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の角度を α_1、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の角度を α_2 として

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta\\
&=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\theta\\
&=|\boldsymbol{c}|(|\boldsymbol{a}|\cos\alpha_1+|\boldsymbol{b}|\cos\alpha_2)\qquad(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha_1+|\boldsymbol{b}|\cos\alpha_2)\\
&=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos\alpha_1+|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha_2\\
&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

から分かります。2 行目から 3 行目へは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ の配置を図にして書けば分かります。

「·」の演算はベクトル成分に対してどうなっているかを求めます。点 A,B のベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$、$A,B$ 間のベクトルを $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る角を θ として余弦定理に入れると

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{c}|^2&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta\\
|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta\\
\cos\theta&=-\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}
\end{aligned}$$

これをスカラー積の式に入れれば

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \\
&= -\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2) \\
&= -\frac{1}{2}\big((a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\big) \\
&= -\frac{1}{2}\big(a_1^2+b_1^2-2a_1b_1+\cdots-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\big) \\
&= -\frac{1}{2}(-2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3) \\
&= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3}a_ib_i
\end{aligned}
$$

となるので、スカラー積はベクトルの成分によって

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$$

と書けます。

スカラー積を使うことでベクトルの大きさは、$\theta=0$ もしくは成分の式から

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$$

単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ の大きさが 1 というのも

$$|\boldsymbol{e}|^2=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}=1$$

となります。

$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2$ という表記は

$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

となっていて、これは実数での $(x+y)^2$ と同じ展開です。また、ベクトルの大きさの 2 乗 $|\boldsymbol{a}|^2$ は $\boldsymbol{a}^2$ と書かれることが多いです。

- ベクトル積

　今度は $\sin\theta$ によって、ベクトル同士による「$\times$」を

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta)\boldsymbol{n} \quad (0 \le \theta \le \pi)$$
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

と定義し、これをベクトル積 (vector product) と呼びます。他にもクロス積 (cross product)、外積とも呼ばれます。分野によっては全く触れずにすみますが、外積は他の意味でも使われているので、あまり使わないほうが良いです。

θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る角度ですが、通常は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かう方向に θ を取ります (右手系)。$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ による面に垂直な単位ベクトルで、向きは θ の方向による右ねじの進行方向です (もしくはフレミングの右手において、人差し指を $\boldsymbol{a}$、中指を $\boldsymbol{b}$ としたときの親指の向き)。右辺から、$\boldsymbol{n}$ を取れば平行四辺形の面積になっているのが分かるので、$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって作られる平行四辺形の面積です ($|\boldsymbol{n}| = 1$)。

わざわざ θ と $\boldsymbol{n}$ の向きを決めるのは sin は cos と違って

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

となっているために、θ の方向を決めないと符号が決まらないからです。θ の方向が決まっていると、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の並びを逆にすると θ の符号が反転し、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ となります。

ベクトル積の計算規則は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{a} \times (C\boldsymbol{b}) = C(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

C は実数です。交換法則は反交換することに気を付けてください。

分配法則を示します。3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を用意し、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の間の角度 θ_{ac} とします。そして、$\boldsymbol{c}$ と直交し、大きさが

$$|\boldsymbol{a}'| = |\boldsymbol{a}| \sin\theta_{ac}$$

となる $\boldsymbol{a}'$ を用意します。同様に $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の間の角度を θ_{bc} として $\boldsymbol{b}'$ ($|\boldsymbol{b}'| = |\boldsymbol{b}| \sin\theta_{bc}$)、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ ($|\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'| = |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \sin\theta$) を用意します。そうすると、$\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{c}$ と直交する (角度が $\pi/2$) ことから

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}| \sin\theta_{ac} = |\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}|$$
$$|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}|$$
$$|(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}| = |(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}') \times \boldsymbol{c}|$$

という関係が分かります。

次に $\boldsymbol{a}'$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ の位置関係を求めます。そのために関係式を出します。外積に内積を作用させた

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|\cos\phi$$

を見ると、$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ による平行四辺形の面積の $|\boldsymbol{A}|\cos\phi$ 倍です。これは $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ による平行四辺形を底辺、高さ $|\boldsymbol{A}|\cos\phi$ とする平行六面体の体積です。同じように図的に考えれば、$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}),\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ も同じ平行六面体を構成するので

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

という関係になるのが分かり、スカラー 3 重積と呼ばれます。

これを使うと

$$\boldsymbol{a}'\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}')=0$$

となるので、$\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ と直交します。同様に、$\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ は $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ に直交します。また

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=0$$

でもあるので、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{c}$ に直交します。このため、$\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は同じ平面上にいます (3 次元空間なので $\boldsymbol{c}$ に直交する面は 1 つ)。

ここで

$$|\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'|=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{b}'|\sin\alpha$$

$$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\sin\beta=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}|\sin\beta=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}|^2\sin\beta$$

を考えます。$|\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'|$ は $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$ の作る平行四辺形、$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の作る平行四辺形の面積です。$\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は同じ平面上にいて、$\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ と直交しているために、この平行四辺形は $\pi/2$ 回転させると重なるはずです。なので、$\alpha=\beta$ です。

そして、$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の方が $|\boldsymbol{c}|^2$ 倍だけ面積が大きいことを考えれば、平行四辺形の対角線の長さである $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の大きさは $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ の大きさの $|\boldsymbol{c}|$ 倍になるので

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}|=|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$$

これから

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

右ねじの方向を考えれば、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の単位ベクトルと $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ の単位ベクトルは同じ $\boldsymbol{c}$ に直交する平面上にいるので、並びも合っています。

今の話を図形的に言っておきます。まず、原点から点 A,B,C に伸びている $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の 3 つのベクトルを用意します。さらに、点 A を通って $\boldsymbol{c}$ に平行な線と $\boldsymbol{c}$ に直交する線の交点 A' に伸びているベクトル $\boldsymbol{a}'$、点 B を通って $\boldsymbol{c}$ に平行な線と $\boldsymbol{c}$ に直交する線の交点 B' に伸びているベクトル $\boldsymbol{b}'$ を作ります ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ が作る平行四辺形の 2 つの頂点を平行にスライドして長方形にしたときに点 A からスライドした点 A' への原点からのベクトルが $\boldsymbol{a}'$)。このとき $\boldsymbol{a}'$ と $\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{c}$ に垂直な面上にいます。そして、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ も同じように考えると、$\boldsymbol{c}$ に垂直な面上にベクトル $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ として現れます ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 全てが $\boldsymbol{c}$ に平行に $\boldsymbol{c}$ に垂直な面に落とされているから)。というわけで、$\boldsymbol{c}$ に垂直なベクトルとして $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ とベクトル積による $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ がいます。また、$\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ から平行移動しただけなので、$\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ は $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ と垂直になっています。

平行四辺形の 2 つの頂点を平行にスライドして出来る長方形の面積は元の平行四辺形と同じなので

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\sin\theta\ ,\ |\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{c}|$$

この 2 つが等しいことから

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{c}|\ ,\ |\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}|\ ,\ |(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}|$$

このとき、$\boldsymbol{c}$ に垂直な面上で 2 つの平行四辺形を考えます。1 つは $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$ によるもので、もう 1 つは $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ によるものです。面積の式で書けば (同じ面上にいるので単位ベクトルは同じ)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{b}'|\boldsymbol{n}\sin\alpha\\&|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\boldsymbol{n}\sin\beta=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}|\boldsymbol{n}\sin\beta=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}|^2\boldsymbol{n}\sin\beta\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ は $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ と垂直になっているために、2 つの平行四辺形は相似の必要があるので (90 度回転させたら重なる)、$\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$ が作る平行四辺形と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ が作る平行四辺形は同じ形をしています。よって、$\alpha=\beta$ で、$|\boldsymbol{c}|$ 倍の相似形になっています。対角線に関して見れば

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'|=|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$$

$|\ |$ を外すことで

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

となります。

ちなみに、先にベクトル積のベクトル成分を分配法則を使わずに導いておけば (例えば、$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ となる成分を求める)、分配法則の両辺を成分で書くことでも確かめられます。

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ によるベクトル積は

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

となっています。これは

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n}_{bc})|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\theta=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\theta\sin\alpha$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{n}_{ab}\times\boldsymbol{c})|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\sin\beta$$

から、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}_{bc}$ の角度 α と、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}_{ab}$ と $\boldsymbol{c}$ の角度 β が一致していないと同じにならないことから分かります ($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ で一致)。また、下で出てくるベクトル成分で書いても実際に成立しないことが分かります (3 重積の項も参照)。

「×」はベクトル成分に対してどうなっているのかを求めます。ベクトル積の定義から、3 次元デカルト座標の x_1,x_2,x_3 軸の標準基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ ($\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$) では、それぞれ直交 ($\theta=\pi/2$) し、$\boldsymbol{n}$ は残った軸の方向であることから

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\ ,\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\ ,\ \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=0$$

という関係を持ちます。単に x_1x_2 の平面に垂直なのは x_3 軸というようになっているだけです (右ねじの進行方向に取る)。これによってベクトル積を成分で書くと、分配法則は成り立っていることから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\times(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)\\&=a_1b_2\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2+a_1b_3\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3+a_2b_1\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1+a_2b_3\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3+a_3b_1\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1+a_3b_2\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2\\&=a_1b_2\boldsymbol{e}_3-a_1b_3\boldsymbol{e}_2-a_2b_1\boldsymbol{e}_3+a_2b_3\boldsymbol{e}_1+a_3b_1\boldsymbol{e}_2-a_3b_2\boldsymbol{e}_1\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

また、ベクトル積の右辺の 2 乗を取ってみると

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta) \\
&= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta \\
&= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \\
&= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2 - (2a_1b_2a_2b_1+2a_1b_3a_3b_1+2a_2b_3b_2a_3) \\
&= (a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2
\end{aligned}
$$

単位ベクトルの性質 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=0$(直交する内積は 0) から $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$ は

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 &= |(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3|^2 \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2
\end{aligned}
$$

となって、等しくなっているので

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta \\
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta \\
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\theta|\boldsymbol{n} \quad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1) \\
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta)\boldsymbol{n} \quad (0\leq\theta\leq\pi)
\end{aligned}
$$

このように一致するのが確かめられます ($\boldsymbol{n}$ はベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の方向を向く単位ベクトル)。

ベクトル積はレヴィ・チビタ記号を使っても書けます。i,j,k は 1 から 3 までとして、レヴィ・チビタ記号 ϵ_{ijk} は、$\epsilon_{123}=+1$ とし、i,j,k を偶数回交換したときは $+1$、奇数回交換したときは -1、i,j,k のどれかが等しければ 0 という記号です。例えば

$$
\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=+1\ ,\ \epsilon_{213}=\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=-1\ ,\ \epsilon_{112}=\epsilon_{222}=\epsilon_{313}=0
$$

レヴィ・チビタ記号を使うと、ベクトル積の成分は

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}a_jb_k
$$

と書けます。左辺は $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ とすれば、$\boldsymbol{c}$ の i 成分の意味です。実際に

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_1 &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{1jk}a_jb_k \\
&= \sum_{j=1}^{3}(\epsilon_{1j1}a_jb_1+\epsilon_{1j2}a_jb_2+\epsilon_{1j3}a_jb_3) \\
&= \sum_{j=1}^{3}(\epsilon_{1j2}a_jb_2+\epsilon_{1j3}a_jb_3) \\
&= \epsilon_{132}a_3b_2+\epsilon_{123}a_2b_3 \\
&= -a_3b_2+a_2b_3
\end{aligned}
$$

となり、一致します。

ベクトル積は入門的な物理では混乱する単語ではないですが、微分形式とかやり出すと別の形で定義したものを外積 (exterior product) と呼ビ出します (3 次元では同じ)。また、言葉の使い方とも関係しますが、ベクトル積は基本的に 3 次元で定義されていると思っていた方が安全です。3 次元以外への拡張は可能ですが、構造を理解するにはちゃんと数学をやらないといけないので、中途半端には手を出さない方がいいです (気になる人は外積やテンソル積について調べてください。もしくは四元数体)。

- 3 重積
  - スカラー 3 重積

    $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ として

$$
\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{v}|\cos\theta
$$

$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ による平行四辺形に垂直で、θ は $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{v}$ の間の角度です。つまり、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ による平行六面体の体積は、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ による面積 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ の平行四辺形を底面、高さを $|\boldsymbol{c}|\cos\theta$ として、$|\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$ です。平行六面体の面のどれを底面に選んでも体積は変わらないので、$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ による平行四辺形を底面、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ による平行四辺形を底面にしても

$$
|\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=|\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})|
$$

よって、ベクトル積の右ネジの方向を合わせれば

$$
\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{3}
$$

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ をスカラー 3 重積 (scalar triple product) と呼びます。

  - ベクトル 3 重積

    $\boldsymbol{b}$ を基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ 方向のベクトルとします。$\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{b}$ との間の角度が θ となるベクトルとします。$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ による 2 次元面が作れるので、その 2 次元面のもう 1 つの基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ とします。なので、$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は

$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ による面上 (x_1, x_2 軸による 2 次元平面上) にいます。このとき、$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の方向は基底ベクトル $\boldsymbol{e}_3$ 方向になります ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は直交している)。$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ による面上にいるので

$$\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2$$

c_1, c_2 は x_1, x_2 軸の値なので、$\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{e}_1)$ と $\boldsymbol{c}$ の間の角度を θ として、$c_1 = |\boldsymbol{c}|\cos\phi,\ c_2 = |\boldsymbol{c}|\sin\phi$ です。
$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ と任意の $\boldsymbol{a}$ のベクトル積は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}_3|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\theta \\
&= (a_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3 + a_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 + a_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3)|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\theta \\
&= (-a_1\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_1)|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\theta
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_1$ と、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c} &= c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 \\
&= |\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e}_1\cos\theta + |\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e}_2\sin\theta \\
\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} &= \boldsymbol{e}_1\cos\theta + \boldsymbol{e}_2\sin\theta
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) =& -a_1|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e}_2\sin\theta + a_2|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_1\sin\theta \\
=& -a_1|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|(\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} - \boldsymbol{e}_1\cos\theta) + a_2|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{b}\sin\theta \\
=& -a_1|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{c} + a_1|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{b}\cos\theta + a_2|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{b}\sin\theta
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_1$ なので、第一項は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_1 = a_1|\boldsymbol{b}|$$

第二項と第三項は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}(a_1|\boldsymbol{c}|\cos\theta + a_2|\boldsymbol{c}|\sin\theta) &= \boldsymbol{b}(a_1c_1 + a_2c_2) \\
&= \boldsymbol{b}(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2) \\
&= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})
\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ をベクトル 3 重積 (vector triple product) と呼び、基底ベクトルを $\boldsymbol{b}$ に合わせただけなので、一般的に成立します。

ベクトル積は入れ替えで符号が反転するので

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

これから、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の入れ替えで

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$$

さらに、これと $\boldsymbol{d}$ のスカラー積を取ると左辺は (3) から

$$\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}))=\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$$

となるので

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

- 微分・積分

適当な変数 t に依存するベクトル関数 $\boldsymbol{v}(t)$ の微分は

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

と定義されます (ベクトル関数も単にベクトルと呼んでいきます)。右辺から分かるように $\boldsymbol{v}(t)$ を微分したベクトルは $\boldsymbol{v}(t)$ の点から $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ の点の方向を向くベクトルです ($\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$)。

ほとんどの場合で必要になるのはベクトル成分に対する計算なので、$\boldsymbol{v}(t)=(v_1(t),v_2(t),v_3(t))$ とします。そうすると

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\Big(\frac{v_1(t+\Delta t)-v_1(t)}{\Delta t},\frac{v_2(t+\Delta t)-v_2(t)}{\Delta t},\frac{v_3(t+\Delta t)-v_3(t)}{\Delta t}\Big)\\&=\Big(\frac{dv_1(t)}{dt},\frac{dv_2(t)}{dt},\frac{dv_3(t)}{dt}\Big)\end{aligned}$$

となるので、ベクトルの微分は成分ごとの微分です。積分も同じで、成分に対して

$$\int dt\ \boldsymbol{v}(t) = \Big(\int dt\ v_1(t), \int dt\ v_2(t), \int dt\ v_3(t)\Big)$$

として実行します。微分と積分はスカラー関数の場合と同じように (C は定数)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{w}(t)) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} + \frac{d\boldsymbol{w}(t)}{dt} \\
&\frac{d}{dt}(C\boldsymbol{v}(t)) = C\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&\int dt(\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{w}(t)) = \int dt\ \boldsymbol{v}(t) + \int dt\ \boldsymbol{w}(t) \\
&\int dt(C\boldsymbol{v}(t)) = C\int dt\ \boldsymbol{v}(t)
\end{aligned}$$

となっています。これらは成分で書けば証明できます。また、偏微分でも同様です。

スカラー積への微分は

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{w}(t)) = \frac{d}{dt}(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3) = \frac{dv_1}{dt}w_1 + v_1\frac{dw_1}{dt} + \cdots = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{v}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{w}(t)}{dt}$$

ベクトル積へは

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{w}(t)) &= \frac{d}{dt}(v_2w_3-v_3w_2, v_3w_1-v_1w_3, v_1w_2-v_2w_2) \\
&= (\frac{dv_2}{dt}w_3 + v_2\frac{dw_3}{dt} - \frac{dv_3}{dt}w_2 - v_3\frac{dw_2}{dt}, \cdots) \\
&= (\frac{dv_2}{dt}w_3 - \frac{dv_3}{dt}w_2, \cdots) + (v_2\frac{dw_3}{dt} - v_3\frac{dw_2}{dt}, \cdots) \\
&= \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}\times\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{v}(t)\times\frac{d\boldsymbol{w}(t)}{dt}
\end{aligned}$$

となるので、スカラー関数のときと同じ規則です。

積分は

$$\begin{aligned}
&\int dt\ f(t)\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = f(t)\boldsymbol{v}(t) - \int dt\ \frac{df(t)}{dt}\boldsymbol{v}(t) \\
&\int dt\ \frac{df(t)}{dt}\boldsymbol{v}(t) = f(t)\boldsymbol{v}(t) - \int dt\ f(t)\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} \\
&\int dt\big(\boldsymbol{v}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{w}(t)}{dt}\big) = \boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{w}(t) - \int dt\big(\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{w}(t)\big) \\
&\int dt\big(\boldsymbol{v}(t)\times\frac{d\boldsymbol{w}(t)}{dt}\big) = \boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{w}(t) - \int dt\big(\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}\times\boldsymbol{w}(t)\big)
\end{aligned}$$

となり、部分積分と同じ関係を持っています (ベクトルはスカラーではないので普通の部分積分と同じだからでは証明にならない)。1 番目 (2 番目も同様) は

$$\begin{aligned}\int dt\ f(t)\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} &= \Big(\int dt\ f\frac{dv_1}{dt},\ \int dt\ f\frac{dv_2}{dt},\ \int dt\ f\frac{dv_3}{dt}\Big)\\ &= \Big(fv_1 - \int dt\frac{df}{dt}v_1,\ fv_2 - \int dt\frac{df}{dt}v_2,\ fv_3 - \int dt\frac{df}{dt}v_3\Big)\\ &= f(t)\boldsymbol{v}(t) - \int dt\frac{df(t)}{dt}\boldsymbol{v}(t)\end{aligned}$$

3 番目と 4 番目は微分の関係

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\ ,\ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}$$

を積分すれば

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \int dt(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{w}) + \int dt(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt})\ ,\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} = \int dt(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{w}) + \int dt(\boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{w}}{dt})$$

となることから確かめられます。

表記的な注意をしておきます。$\boldsymbol{v}$ の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ の微分と $|\ |$ の位置を変えた

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{v}|\ ,\ |\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}|$$

これらは一般的に同じにはなりません。特に t が時間では慣習的に時間微分を $\dot{v}$ のように書くので

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|\boldsymbol{v}| = \dot{v}\qquad (v = |\boldsymbol{v}|)\\ &|\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}| = |\dot{\boldsymbol{v}}|\end{aligned}$$

となり、紛らわしいと言えば紛らわしいです。こうして書くときにさらに紛らわしい関係

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2 = v\dot{v}\\ &\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} = |\boldsymbol{v}||\dot{\boldsymbol{v}}|\cos\theta = v|\dot{\boldsymbol{v}}|\cos\theta\end{aligned}$$

もあります。$\dot{v}$ と $|\dot{\boldsymbol{v}}|$ が一致しない理由は簡単で、$\boldsymbol{v}(t)$ と Δt 経過した $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ の差

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)\ ,\ \Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$$

の大きさは

$$|\Delta \boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t))^2 = |\boldsymbol{v}(t+\Delta t)|^2 + |\boldsymbol{v}(t)|^2 - 2\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\cdot \boldsymbol{v}(t)$$
$$= v^2(t+\Delta t) + v^2(t) - 2v(t+\Delta t)v(t)\cos\theta$$

$$(\Delta v)^2 = v^2(t+\Delta t) + v^2(t) - 2v(t+\Delta t)v(t)$$

となっているからです。簡単に言えば、Δv はベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさの変化で、$|\Delta \boldsymbol{v}|$ は $\boldsymbol{v}(t)$ の点と $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ の点を結ぶベクトルの大きさというだけです。なので、$\boldsymbol{v}(t)$ と $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ が重なる $\theta = 0$ のときに一致します。

最後に数学でのベクトルの概念について簡単に触れておきます。より細かいことは「ベクトル空間」を見てください。まず、ベクトル空間というものがあり、これに属するものがベクトルです。この段階ではベクトルという量を $\boldsymbol{v}$ として、これの和と定数倍、それらによる交換、結合、分配法則、$\boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = 0$ が存在する、というのが定義されているだけです。この段階では $\boldsymbol{v}$ は現実的な量になっていません (抽象的な量)。言い換えれば、ベクトル空間でのベクトルという概念が与えられただけです。このベクトル $\boldsymbol{v}$ を、同じベクトル空間に属する線形独立なベクトル (基底ベクトル)$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ によって

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$$

と展開した実数の係数 v_1, v_2, v_3 を成分表示と呼びます (3 次元にしますが n 次元でも同じ)。

具体的に全ての実数を含んでいるベクトル空間を考えます (実数には和と掛け算が定義されているからベクトル空間と見なせる)。この中から実数 a を選ぶのを (a) と書いたとします。次に、実数を 2 つ別々に選べるベクトル空間とすれば、実数を a_1, a_2 として、2 つの実数の組み合わせを (a_1, a_2) と書けます (これも和と定数倍が定義できるからベクトル空間。(a_1, a_2) と (b_1, b_2) の和を (a_1+b_1, a_2+b_2)、定数倍は (ca_1, ca_2))。このようにして実数を複数選べるベクトル空間に持っていきます。そうすると 3 つの実数が選べるベクトル空間において、実数の展開係数 v_1, v_2, v_3 に対して基底ベクトルとして

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)\ ,\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)\ ,\ \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$$

というのが選べます (例えば $\boldsymbol{e}_1$ は 3 つの実数の組み合わせとして $1,0,0$ を選んでいる)。そうすると $\boldsymbol{v}$ はこのベクトル空間において

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \tag{4}$$

と書けます。このようにしてよくあるベクトル表記が出てきます。この話はベクトルの一般的な話でなく、特定の状況で出てくるものです。このベクトル空間は数ベクトル空間 (3 次元なら 3 次元数ベクトル空間)、もしくは座標空間とも呼ばれます。

ベクトル空間に内積の定義を入れたものを内積空間と呼びます。この内積の定義は、2 つのベクトルから実数を作り、同じベクトル同士では負でない実数になるものとして与えられています。この定義を (4) の数ベクトル空間に当てはめれば

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$$

としたものが内積の定義になっていることが分かります (同じ実数同士の積の足し算は負にならない)。ちなみに内積と言った時に同じベクトル同士で負になる場合を含めていることもあります (相対論関係ではそうなっていることが多い)。

そして、点 P と点 Q を結ぶベクトルがあり、点 P を点 Q に移動させることができるという性質 (点の集まりがあって、点と点はベクトルで結ばれていて、点は平行移動ができるという性質) と、内積が定義された数ベクトル空間を合わせたのが、物理で使われるユークリッド空間です。より一般的には数ベクトル空間に限定する必要はないです。簡単に言えば、空間上に点があって、点と点の間はベクトルでつなげられて、点は平行移動して別の点に動かせて、ベクトルの内積が定義されている空間ということです (この視点からベクトルの話をしているのが「ベクトル」)。これらは物理のベクトルの計算で自然と使っている性質です。

重要なのは成分表示を使って $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と書いたものは、基底ベクトルが固定された量であることです。基底ベクトルを変えると成分が変わるのは極座標なんかの話から直接分かります。ここが数学でのベクトルと (入門的な) 物理でのベクトルの扱いが異なる点です。数学でのベクトルは基底ベクトルを固定しない段階を指し、物理でのベクトルは基底ベクトルを固定して成分表示にしたものを指します。現実の量の計算成分表示にしないと出来ないので物理では成分表示したものとして与えてしまって、その背景にある数学を無視しています。こうすることで計算技術を身に付ければ現実の計算ができるので便利と言えば便利です。

それでは数学でのベクトルの概念が必要がないかというと必要になる場合があります。基底ベクトルを固定しないベクトルなら基底ベクトルに依存しない、言い換えれば座標系に依存しない話を展開することができます。このため、一般化された状況が分かるので、選んだ座標系では見えない性質が見えたりします。そして、この座標系に依存しないという性質のため、相対論では必要になる概念です (一般相対性理論の「ベクトル、1-形式、テンソル」参照)。

この話は、抽象化した対象を考える数学と、現実の対象を考える物理との差を表しています。おそらく、物理の理論を本質的に理解するという点では数学的な考えが必要ですが、感覚的に (日常経験の範囲内で) 理解できる現象を扱う限りは計算技術の段階で十分です。この点で量子論と相対論は特殊です。