ベクトル

初等的な線形代数で出てくるようなベクトルの話を 2 次元平面 (2 次元ユークリッド空間) を使ってしていきます。
3 次元でも手間が増えるだけで同じ話が出来ます。
図を書いていないので分かりにくいです。
ベクトルの具体的な計算は「ベクトルの計算」で行っています。

2 次元平面を用意します。この平面上に 2 つの点 A_1, A_2 を適当に配置し、A_1, A_2 を通る直線を書き込みます。A_1 と A_2 を結んでいて、A_1 から A_2 に向かう直線の意味で $\vec{A_1A_2}$、A_2 から A_1 に向かう直線の意味で $\vec{A_2A_1}$ と書きます。これをベクトルと呼びます。また、同じ地点のベクトル $\vec{A_1A_1}$ は 0 として定義します。しかし、まだ点を結ぶ矢印をベクトルと言っているだけなので、性質を与えていきます。

点 A_1, A_2 を結ぶ線は平行移動させても変化しないので、平行に動かした先の点 B_1, B_2 での $\vec{B_1B_2}, \vec{B_2B_1}$ は

$$\vec{A_1A_2} = \vec{B_1B_2}\ ,\ \vec{A_2A_1} = \vec{B_2B_1}$$

となるとします。このように、$\vec{A_1A_2}$ と等しいベクトルは平行移動によって無数に作れます。また、平行移動で等しいことから平行四辺形を作れることが分かります。4 つの点 A_1, A_2, B_1, B_2 があり、各点によるベクトルの関係が

$$\vec{A_1A_2} = \vec{B_1B_2}\ ,\ \vec{A_1B_1} = \vec{A_2B_2}$$

となっていれば、平行四辺形になります。

今度は 3 つの点を用意し A_1, A_2, A_3 とします。ここで特徴となる性質を導入します。今 A_1 から A_3 へ向かうためには、A_2 を経由する場合と、A_1 から直接 A_3 へ行く場合があります（どちらの場合も各点を結ぶのは直線)。A_1, A_3 を結んでいる直線の距離を d_{13}、A_1 と A_2 では d_{12}、A_2 と A_3 では d_{23} とすれば、一般的には $d_{13} \neq d_{12}+d_{23}$ です。しかし、ベクトルにおいては

$$\vec{A_1A_3} = \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3}$$

とします。このように、ベクトルの和は出発点と最終的な到着点によるベクトルに等しいとします。平行四辺形で言えば対角線に対応し、4 つの点 A_1, A_2, B_1, B_2 で言えば

$$\vec{A_1B_2} = \vec{A_1A_2} + \vec{A_2B_2} = \vec{A_1B_1} + \vec{B_1B_2}$$

となります。

同じように考えて、2 点 A_1, A_2 において、A_1 から A_2 へ行き、A_2 から A_1 へ行くことは、元の地点に戻ることなので

$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_1} = \vec{A_1A_1} = 0$$

から

$$\vec{A_1A_2} = -\vec{A_2A_1}$$

とします。このことから、ベクトルの差は

$$\vec{A_1A_3} = \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} = \vec{A_1A_2} - \vec{A_3A_2}$$

$$\vec{A_3A_1} = -\vec{A_1A_2} - \vec{A_2A_3} = \vec{A_2A_1} + \vec{A_3A_2}$$

のようになります。

3 つの点 A_1, A_2, A_3 を同じ直線上に配置します。このとき、$\vec{A_1A_2}$ と $\vec{A_1A_3}$ は矢印の方向は同じで長さが異なっています。なので、実数 $\alpha > 0$ によって

$$\vec{A_1A_3} = \alpha\vec{A_1A_2}$$

として実数倍の形で書けるとします。$\alpha < 0$ では

$$\vec{A_1A_3} = \alpha\vec{A_1A_2} = -|\alpha|\vec{A_1A_2} = |\alpha|\vec{A_2A_1}$$

となり、同じ直線上で反対向きの矢印を持つことになります (A_1 を中心にすれば A_2, A_3 がそれぞれ反対側にいる)。また、$\alpha = 0$ では $0\vec{A_1A_2} = \vec{A_1A_1} = 0$ とします。

これでベクトルの基本的な規則が作れたことになり、ベクトルの定義としては十分となります。これらの計算規則をもとにさらにベクトルの性質を見ていきます。

点 A と点 B_1, B_2 による、$\vec{AB_1}, \vec{AB_2}$ を考えます。このとき、点 B_2 は点 A と点 B_1 を結ぶ直線上にいないとします ($\vec{AB_1} \neq \alpha\vec{AB_2}$)。表記を簡単にするために、

$$\boldsymbol{B}_1 = \vec{AB_1}\ ,\ \boldsymbol{B}_2 = \vec{AB_2}$$

のように書くことにします。A, B_1 を通る直線上に点 C_1、A, B_2 を通る直線上に点 C_2 があるとします。そうすると

$$\boldsymbol{C}_1 = \alpha_1\boldsymbol{B}_1\ ,\ \boldsymbol{C}_2 = \alpha_2\boldsymbol{B}_2$$

となっています。これらから

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 = \alpha_1\boldsymbol{B}_1 + \alpha_2\boldsymbol{B}_2$$

として、A, C_1, C_2 による平行四辺形の対角線に対応する $\boldsymbol{D}$ が作れます。点 D をこの平行四辺形の残りの点とします ($\boldsymbol{D} = \vec{AD}$)。

ここで気づくことがあります。A, C_2 を通る直線を I、C_1, D を通る直線を I'、A, C_1 を通る直線を L、C_2, D を通る直線を L' とします。まず、$\boldsymbol{C}_1$ は固定して $\boldsymbol{C}_2 = \alpha_2\boldsymbol{B}_2$ での α_2 を変更させます。そうすると、α_2 を増加させれば、直線 I 上の C_2 の位置は A から離れていきます。このため、α_2 の増加によって直線 L 上の D の位置は C_1 から離れていきます。つまり、α_2 は任意の実数なので、D は直線 I' 上のあらゆる位置に行けることが分かります。同様に考えることで、$\boldsymbol{C}_2$ を固定したときは α_1 の変更によって、D は直線 L' 上のあらゆる位置に行けます。

この結果を踏まえれば、α_1, α_2 を指定することでベクトル $\boldsymbol{D}$ は平面上のあらゆる矢印となり、D は平面上の全ての点に行けることが分かります。注意すべきなのは、$\boldsymbol{D} = \alpha_1\boldsymbol{B}_1 + \alpha_2\boldsymbol{B}_2$ での $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ は同一直線上にいない点

です。今の話から分かるように、同一直線上では D は平面上の全ての点に行くことが出来なくなります。同一線上にいない 2 つのベクトル $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ は線形独立 (linear independent) や 1 次独立と呼ばれます。

平面上の点を 2 つのベクトルから作れることが分かりましたが、平面上のどこの点なのかが数値の情報として入ってきていません (どこの点なのかが数値的に指定されていない)。なので、数値によって点の位置を指定し、それをベクトルと対応させます。

α_1, α_2 から平面上の全ての点を作れるので、α_1, α_2 の組 (α_1, α_2) で点の位置を指定します。しかし、(α_1, α_2) は実数の組でしかないので位置とするためには、基準が必要になります。ベクトル $\boldsymbol{D} = \alpha_1 \boldsymbol{B}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{B}_2$ は点 A から伸びているので、基準とする点は点 A です。そして、α_1, α_2 は $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ を基準にして $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$、つまり $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2$ を与えるものです。よって、基準になるのは、点 A とベクトル $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ です。点 A を原点、$\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ を基底ベクトル (basis vectors) と呼びます。これらを設定することで平面上の任意の点 D の位置は実数の組 (α_1, α_2) で指定出来るようになります。

原点と基底ベクトルの設定で決まるために、異なる原点や基底ベクトルを使えば、点の位置を与える α_1, α_2 の値は異なります。分かりやすいのは原点の変更です。点 O を原点とし、点 D の位置が (α_1, α_2) で指定できているとします。一方で、別の点 O' を原点とします。そうすると、O' と D の位置関係は O のときとは異なります。なので、O' から見た D の位置は新しく (α_1', α_2') となります。

原点と基底ベクトルの設定で位置を (α_1, α_2) と指定するので、便利な基底ベクトルを選ぶことを考えます。原点はその点を適当な値によって決めればいいだけです。なので、原点は $(0, 0)$ として、基底ベクトルのほうを上手く選びます。

原点を O とし、平面上の適当な点を D とします。このときの基底ベクトルは $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ とし、原点から点 D に向かっているベクトルは

$$\boldsymbol{D} = \alpha_1 \boldsymbol{E}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{E}_2$$

とします。原点を通過して $\boldsymbol{E}_1$ に沿っている直線を x_1、$\boldsymbol{E}_2$ に沿っている直線を x_2 とします。α_1 は x_1 上の数値、α_2 は x_2 上の数値となります。このとき、直線 x_1, x_2 が原点で垂直に交わっている (直交している) ことを要求します。直線が直交しているので、$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ も直交しています。直交していることで状況を非常に分かりやすくしてくれます。直線 x_1, x_2 を x_1, x_2 軸と呼び、x_1 を水平方向、x_2 を垂直方向にします。

基底ベクトルの配置を決めたので、次に 2 点間の距離を与えます。直線 x_1, x_2 は直交していることから、原点から点 D までの距離 d は、三平方の定理から $d^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ で与えられることを要求します。これで原点から点 D の距離、点 D を指定する x_1, x_2 上の原点からの距離が決まります。このときに基底ベクトルがどうなっているのかを求めます。

ベクトルの演算を加えます。ベクトル $\boldsymbol{D}$ は点 D の位置の情報を持っているので、ベクトルから距離が求められるとして、その演算を $|\ |$ で表し、$d = |\boldsymbol{D}|$ と表記することにします。$|\boldsymbol{D}|$ のことをベクトルの大きさと言っていきます。

そうすると

$$d^2 = |\boldsymbol{D}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

また、$\alpha_2 = 0$ のとき $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{E}_1$ なので

$$|\boldsymbol{D}_1| = |\alpha_1||\boldsymbol{E}_1| \ , \ |\boldsymbol{D}_1|^2 = \alpha_1^2$$

$|\boldsymbol{D}_1|$ は距離なので α_1 には絶対値の $|\ |$ をつけています。これから、$|\boldsymbol{E}_1|^2 = |\boldsymbol{E}_1| = 1$ です。同様に、$\alpha_1 = 0$ のときから $|\boldsymbol{E}_2| = 1$ となります。なので、$|\boldsymbol{E}_1| = |\boldsymbol{E}_2| = 1$ のとき、点 D の距離は $d^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ となることが分かります。実際に、$\boldsymbol{D}$ の x_1, x_2 上の距離は

$$|\boldsymbol{D}_1| = |\alpha_1| \ , \ |\boldsymbol{D}_2| = |\alpha_2| \quad (\boldsymbol{D}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{E}_2)$$

となり、x_1, x_2 上での原点からの距離がそれぞれ $|\alpha_1|, |\alpha_2|$ になっています。

α_1, α_2 は負の値も許されているので、例えば x_1, x_2 上の距離 $|\alpha_1|, |\alpha_2|$ に対して符号の組み合わせが $(-|\alpha_1|, +|\alpha_2|)$ として指定される点もあります。この場合は $\boldsymbol{E}_1$ を逆向きにした $-\boldsymbol{E}_1$ に対応する地点です。なので、$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ の方向を基準とし、それを正の方向、逆向きを負の方向とします。こうすれば、例えば (α_1, α_2) $(\alpha_1, \alpha_2 > 0)$ に対して、$\boldsymbol{E}_1$ 方向が逆向きになっている点は $\boldsymbol{D} = -\alpha_1 \boldsymbol{E}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{E}_2$ から、$(-\alpha_1, \alpha_2)$ となります。x_1, x_2 軸で言えば、原点に対して、x_1 上の右側を正 $(\alpha_1 > 0)$、左側を負 $(\alpha_1 < 0)$、x_2 上の上側を正 $(\alpha_2 > 0)$、下側を負 $(\alpha_2 < 0)$ となるようにします。

というわけで、基底ベクトルはお互いが直交し、その大きさが $|\boldsymbol{E}_1|^2 = |\boldsymbol{E}_1|^2 = 1$ であり、x_1, x_2 軸を今のように設定すれば、α_1, α_2 はそれぞれの軸上での原点からある点までの位置となります。このため、(α_1, α_2) は、x_1 上での位置 α_1 と x_2 上での位置 α_2 による組という非常に分かりやすいものになります。

このように軸の直線が直交するように設定した場合を、デカルト座標や直角座標 (rectangular coordinate) と言います。ちなみに、デカルト座標は英語だと Cartesian coordinate となりますが、Cartesian はデカルト (Descartes) のラテン語 Cartesius からです。また、(α_1, α_2) は点の座標と呼ばれます。

直交座標 (orthogonal coordinate) と呼ばれる分類があり、これは基底が直交している座標系です。デカルト座標は直交座標の 1 種ですが、直交座標と言ったときデカルト座標を指していることは多いです。

まとめれば、デカルト座標において 2 次元平面上の任意の点の位置は、原点を通り基底ベクトルで方向付けされている x_1, x_2 軸上の位置 α_1, α_2 から (α_1, α_2) と指定され、そのベクトルは

$$\boldsymbol{D} = \alpha_1 \boldsymbol{E}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{E}_2 \ , \ |\boldsymbol{E}_1|^2 = |\boldsymbol{E}_2|^2 = 1$$

となります。$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ は直交しています。点の位置を指定する α_1, α_2 をベクトルの成分と呼び、デカルト座標を選んでいるという前提で、$\boldsymbol{D} = (\alpha_1, \alpha_2)$ と表記されます。

ベクトルで注意すべきなのは、ベクトルは基底ベクトルを具体的に決めなくても定義されている点です。基底ベクトルを決めるのは、そのベクトルの成分といった具体的な数値が欲しいからです。そういった具体的な数値が必要ないなら、基底ベクトルを具体的に決める必要がないです。基底ベクトルを決めなければ、あらゆる基底ベクトルで成立する関係を求められるので一般的な理論を考える上では非常に重要です。

デカルト座標は使われる機会が多く基本的なものですが、デカルト座標でなければいけない理由はないです。基底ベクトルは対象を最も計算しやすいように選ばれます。このため、基底ベクトルの変換が重要になっています。

基底ベクトルが変更されたときのベクトルの成分の関係がどうなっているのかを簡単に見ておきます。適当な基底ベクトルを $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ とし、点 O から点 D へのベクトルを

$$\boldsymbol{D} = \alpha_1 \boldsymbol{B}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{B}_2$$

とします。別の基底ベクトル $\overline{\boldsymbol{B}}_1, \overline{\boldsymbol{B}}_2$ を使って書くと、α_1, α_2 は変更されるので

$$\boldsymbol{D} = \beta_1 \overline{\boldsymbol{B}}_1 + \beta_2 \overline{\boldsymbol{B}}_2$$

となります。$\overline{\boldsymbol{B}}_1, \overline{\boldsymbol{B}}_2$ もベクトルなので、点 O に平行移動させることで基底ベクトル $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ を使って

$$\overline{\boldsymbol{B}}_1 = \lambda_{11} \boldsymbol{B}_1 + \lambda_{12} \boldsymbol{B}_2 \ , \ \overline{\boldsymbol{B}}_2 = \lambda_{21} \boldsymbol{B}_1 + \lambda_{22} \boldsymbol{B}_2$$

と書けます。これらは基底ベクトルの変換の式になっています。これらを入れることで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= \beta_1(\lambda_{11}\boldsymbol{B}_1 + \lambda_{12}\boldsymbol{B}_2) + \beta_2(\lambda_{21}\boldsymbol{B}_1 + \lambda_{22}\boldsymbol{B}_2) \\ &= (\beta_1\lambda_{11} + \beta_2\lambda_{21})\boldsymbol{B}_1 + (\beta_1\lambda_{12} + \beta_2\lambda_{22})\boldsymbol{B}_2\end{aligned}$$

左辺は $\boldsymbol{D} = \alpha_1\boldsymbol{B}_1 + \alpha_2\boldsymbol{B}_2$ なので

$$\alpha_1 = \beta_1\lambda_{11} + \beta_2\lambda_{21}\ ,\ \alpha_2 = \beta_1\lambda_{12} + \beta_2\lambda_{22}$$

となって、ベクトルの成分同士の関係が求まります。β_1, β_2 について解けば $\overline{\boldsymbol{B}}_1, \overline{\boldsymbol{B}}_2$ でのベクトルの成分が求まります。

ついでに、基底ベクトルは変更せずに原点を動かした場合も見ておきます。この場合は、同じ点の位置を表すベクトルがどう変わるかを見ます。原点を動かすことは、ベクトルを平行移動させることと同じなために、点 O から点 D のベクトル $\boldsymbol{D}$ の成分自体は変わらないからです。

もとの原点を O、別の原点を $\overline{O}$ とします。$\overline{O}$ から O からへのベクトルを $\boldsymbol{A}$、$\overline{O}$ から点 D へのベクトルを $\overline{\boldsymbol{D}}$ とすれば

$$\overline{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}$$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ は $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ によって

$$\boldsymbol{A} = \rho_1\boldsymbol{B}_1 + \rho_2\boldsymbol{B}_2\ ,\ \boldsymbol{D} = \alpha_1\boldsymbol{B}_1 + \alpha_2\boldsymbol{B}_2$$

と書けるので

$$\overline{\boldsymbol{D}} = \rho_1\boldsymbol{B}_1 + \rho_2\boldsymbol{B}_2 + \alpha_1\boldsymbol{B}_1 + \alpha_2\boldsymbol{B}_2 = (\alpha_1 + \rho_1)\boldsymbol{B}_1 + (\alpha_2 + \rho_2)\boldsymbol{B}_2$$

となって、O から $\overline{O}$ に動いた分だけの成分 (ρ_1, ρ_2) が加わります。