上限、下限

数学では頻繁に出てきますが、物理ではほぼ出てこない上限と下限の基本的な関係をまとめます。
ここでの集合は全ての実数の集合 R の部分集合としています。

上限、下限と最大元、最小元の定義をまとめます。

- 上限
  実数の集合 X での任意の $x \in X$ に対して等しいか大きい実数 a $(x \leq a)$ が存在するとき、a を上界 (upper bound) と言い、X は上に有界 (bounded above) と言われます。u が X の上界であり、X に u よりも小さな上界がいないなら (上界に含まれる元を a とすれば $u \leq a$)、u は上限 (supremum, least upper bound) と呼ばれ、$\sup X$ と表記されます。
  u が X の上限であるためには、α を実数として

  (i) 全ての $x \in X$ に対して $x \leq u$

  (ii) $\alpha < u$ なら $\alpha < x$ となる $x \in X$ がいる

  という 2 つの条件を満たす必要があります。(i) は u は上界であること、(ii) は X に u よりも小さい上界がないこと ($\alpha < x$ から α は上界でない) を言っています。
  (ii) は言い換えれば、$\epsilon = u - \alpha > 0$ が与えられ、$\alpha < x$ となる x がいるとなっているので、$\alpha = u - \epsilon < x$ と書けます。このため、(i),(ii) は任意の $\epsilon > 0$ に対して $u - \epsilon < x$ となる $x \in X$ があると言っても同じです。

- 下限
  実数の集合 X での任意の $x \in X$ に対して等しいか小さい実数 b $(b \leq x)$ が存在するとき、b を下界 (lower bound) と言い、X は下に有界と言われます。l が X の下界であり、X に l よりも大きな下界がいないなら (下界に含まれる元を b とすれば $l \geq b$)、l は下限 (infimum, greatest lower bound) と呼ばれ、$\inf X$ と表記されます。X の元は下界以上なので、X の下限 l に対して $x \geq l$ です。
  上限と同じように、l が X の下限であるための条件は

  (i) 全ての $x \in X$ に対して $l \leq x$

  (ii) $\alpha > l$ なら $x < \alpha$ となる $x \in X$ がいる

  となります。これは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$x < l + \epsilon$ となる $x \in X$ があると言っても同じです。

上限、下限は一意的に決まります。集合 X の上限が u, u' であるとします。上限は上界に含まれるので、u' を上界とすれば $u \leq u'$ です。当然、u を上界とすれば $u' \leq u$ です。よって、$u = u'$ なので上限は一意的に決まります。下限も同様です。

- 最大元、最小元
  実数の集合 X が有限個の元を含む集合で、上限 a が X に含まれているとき、a は X の最大元 (maximau) や最大と呼ばれ、$\max X$ と表記されます。もっと直接的に言えば、最大元は、有限個の実数の元を含む集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ において、任意の $x_k \in X$ に対して $x_i \geq x_k$ となる x_i(X に含まれる最も大きな x_i) と定義されます。

  X が有限個の元を含む集合で、下限 a が X に含まれているとき、a は X の最小元 (maximau) や最小と呼ばれ、$\min X$ と表記されます。なので、最小元は、有限個の実数の元を含む集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ において、任意の $x_k \in X$ に対して $x_i \leq x_k$ となる x_i(X に含まれる最も小さな x_i) と定義されます。

- 有界

  集合が上と下に有界であるときは有界 (bounded) と言われ、そうでないなら非有界 (unbounded) と言われます。有界であるなら、$x \in X$ に対して $b \leq x \leq a$ となる a, b が存在します。a は上界、b は下界であればいいので、上限、下限とは言っていません。

例えば、$x < 2$ の実数の集合 $X = \{x|\ x < 2\}$ とします。これは明らかに 2 以上の実数は X の上界です。$s < 2$ としたとき、$s < x$ となる x は存在するので、任意の $s < 2$ は X の上界ではないです。つまり、2 よりも小さな上界はないので、2 は X の上限です。このときの上限 2 は X に含まれていません。

この X での x は 2 より小さな実数の全てなので $b \leq x$ となる実数 b はなく (任意の b に対して $x < b$ が存在するため)、X の下界はないです。このため、X は非有界です。これに対して、例えば $X = \{x|\ 0 < x < 2\}$ とすれば下に有界になり、上限のときと同じように 0 が下限になります。

上限、下限と最大元、最小元の違いは区間が分かりやすいです。集合 $X = \{x|\ -5 < x < 6\}$ (開区間) は有界で、上限は 6、下限は -5 ですが、$6, -5$ は X に含まれていないので、最大元、最小元はないです。集合 $X = \{x|\ -5 \leq x \leq 6\}$ (閉区間) とすれば上限は 6、下限は -5 で、$6, -5$ は X に含まれるので最大元は 6、最小元は -5 となります。

上限、下限の表記はいろいろとあり

$$\sup X\ ,\ \sup_{x \in X} x\ ,\ \sup\{x|\ x \in X\}\ ,\ \sup\{x:\ x \in X\}$$

$$\inf X\ ,\ \inf_{x \in X} x\ ,\ \inf\{x|\ x \in X\}\ ,\ \inf\{x:\ x \in X\}$$

といったのが多く使われます。また、X の元が添え字のついた x_i では

$$\sup_{1 \leq i \leq n} x_i\ ,\ \inf_{1 \leq i \leq n} x_i$$

のように書かれます。最大元、最小元でも同様です。特に、最大元、最小元では $\max\{a, b\},\ \min\{a, b\}$ のように書けば a, b の大きい方、小さい方 (a, b が同じならどちらでも) という意味になって便利です。この表記を使えば、例えば a, b の差の絶対値は

$$|a - b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$$

と書けます。

- 関数の上限、下限

  実数から実数への関数 f でも同様に上限、下限は定義されて、定義域 X での $x \in X$ による $f(x)$ の集合として、上に有界、下に有界と上限、下限が与えられています。なので、このときの上限、下限は

$$\sup_X f\ ,\ \sup_{x \in X} f(x)\ ,\ \sup\{f(x)|\ x \in X\}\ ,\ \sup\{f(x):\ x \in X\}$$

$$\inf_X f\ ,\ \inf_{x \in X} f(x)\ ,\ \inf\{f(x)|\ x \in X\}\ ,\ \inf\{f(x):\ x \in X\}$$

  のように表記されます。

  実数での上限、下限の条件と同じように、u が $f(x)$ の上限であるための条件は

(i) 全ての $x \in X$ に対して $f(x) \leq u$

(ii) $\alpha < u$ なら $\alpha < f(x)$ となる $x \in X$ がいる

l が $f(x)$ の下限であるための条件は

(i) 全ての $x \in X$ に対して $f(x) \geq l$

(ii) $\alpha > l$ なら $\alpha > f(x)$ となる $x \in X$ がいる

となります。上限の (ii) は、$\epsilon = u - \alpha > 0$ が与えられ、$\alpha < f(x)$ となる $f(x)$ がいるので、$\alpha = u - \epsilon < f(x)$ となります。下限では $\alpha = l + \epsilon > f(x)$ となるので、条件は

$$f(x) > \sup_{x \in X} f(x) - \epsilon \ , \ f(x) < \inf_{x \in X} f(x) + \epsilon$$

と書けます。

上限と下限の性質を示していきます。いちいち明記しませんが、上限、下限を持つとします。

[A1] $\inf X \leq \sup X$.

X は有界なので、$b \leq x \leq a$ となる a, b があり、a は上界、b は下界です。上限は定義から $x \leq \sup X \leq a$、下限は定義から $b \leq \inf X \leq x$ なので、$\inf X \leq x \leq \sup X$ です。

[A2] 実数の集合 X があり、c を実数として

(A2-1) $c \geq 0$ に対して $\sup(cX) = c \sup X,\ \inf(cX) = c \inf X$

(A2-2) $c < 0$ に対して $\sup(cX) = c \inf X,\ \inf(cX) = c \sup X$.

(A2-1)：$c = 0$ はそのまま成立するので、$c > 0$ とします。実数 u は $x \in X$ に対して

$$x \leq \frac{u}{c}$$

であるなら、$cx \leq u$ から $u = \sup(cX)$ です。一方で、u/c が X の上限であるなら

$$\frac{u}{c} = \sup X \ \Rightarrow \ x \leq \frac{u}{c}$$

なので、$\sup(cX) = c \sup X$ です。下限でも同様です。

(A2-2)：$c < 0$ とします。$x \in X$ に対して

$$x \leq \frac{u}{c}$$

であるなら、$u = \sup(cX)$ です。このときの符号をはっきりさせると

$$x \leq \ -\frac{u}{|c|}$$

$$-|c|x \geq u$$

$$cx \geq u$$

一方で、u/c が X の下限であるなら

$$\frac{u}{c} = \inf X \ \Rightarrow\ x \geq \frac{u}{c}$$

なので、$\sup(cX) = c \inf X$ となります。下限でも同様です。

[A3] 集合 X, Y において X は Y の部分集合であるなら、$\sup X \leq \sup Y,\ \inf X \geq \inf Y$。

X が Y の部分集合であることは Y には X よりも多くの実数が含まれていることです。このため、X よりも小さな実数を含んでいるなら同じ上限、大きな実数を含んでいるなら Y は X の上界になるので、$\sup X \leq \sup Y$ です。下限では Y は X の下界になるので、$\inf X \geq \inf Y$ になります。

[A4] 任意の $x \in X, y \in Y$ に対して $x \leq y$ なら、$\sup X \leq \inf Y$。

X において任意の y に対して $x \leq y$ であるなら、定義から y は X の上界です。上界は上限 $\sup X$ 以上なので、任意の y に対して $\sup X \leq y$ です。y が任意なので、これは Y の下界が $\sup X$ であることにもなっています。このため、下限の定義から $\sup X \leq \inf Y$ となります。

[A5] 上限、下限の和。

$X + Y = \{x + y |\ x \in X,\ y \in Y\}$ としたとき

(A5-1) $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y\ ,\ \inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$

(A5-2) $\sup(X-Y) = \sup X - \inf Y\ ,\ \inf(X-Y) = \inf X - \sup Y.$

(A5-1)：上限は実数なので、実数の和の規則と上限の定義から

$$x + y \leq \sup X + \sup Y$$

集合 $X+Y$ の元は $x+y$ なので、これの右辺は $X+Y$ の上界であることから

$$\sup(X+Y) \leq \sup X + \sup Y \tag{1}$$

一方で、上限の定義から任意の $\epsilon > 0$ によって

$$x > \sup X - \epsilon\ ,\ y > \sup Y - \epsilon$$

となっているので

$$x + y > \sup X + \sup Y - 2\epsilon$$

ϵ は任意なので、ϵ をどこまで小さくしてもこれは成立します。つまり、どんな小さな ϵ に対しても左辺の方が大きいです。そうすると、ϵ がないときは等しい可能性があるので

$$x + y \geq \sup X + \sup Y$$

これは $\sup(X+Y) \geq \sup X + \sup Y$ なので、(1) と合わせれば $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$ です。
下限では

$$\inf X + \inf Y \leq x + y = \inf(X+Y)$$

$$x < \inf X + \epsilon\ ,\ y < \inf Y + \epsilon\ \Rightarrow\ \inf(X+Y) < \inf X + \inf Y + 2\epsilon$$

から、$\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$ となります。
（A5-2）：[A2] で $c = -1$ とすれば

$$\sup(X-Y) = \sup X - \sup Y = \sup X + \sup(-Y) = \sup X - \inf Y$$

下限でも同様に

$$\inf(X-Y) = \inf X - \inf Y = \inf X + \inf(-Y) = \inf X - \sup Y$$

[A6] 定義域を X とする関数 f, g があり、$f(x) \leq g(x)$ $(x \in X)$ のとき

$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \sup_{x\in X} g(x)\ ,\ \inf_{x\in X} f(x) \leq \inf_{x\in X} g(x)$$

$f(x) \leq g(x')$ $(x, x' \in X)$ のとき

$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \inf_{x'\in X} g(x').$$

$g(x)$ には上限があるので

$$g(x) \leq \sup_{x\in X} g(x)$$

今は $f(x) \leq g(x)$ なので

$$f(x) \leq g(x) \leq \sup_{x\in X} g(x)$$

となり、$\sup g(x)$ は $f(x)$ の上界です。そうすると、$f(x)$ の上限 $\sup f(x)$ は上界以下なので

$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \sup_{x\in X} g(x)$$

となります。下限でも同様です。
$f(x) \leq g(x')$ $(x, x' \in X)$ では全ての X の元に対して f は g 以下の値になっています。なので、実数 a, b による $a \leq b$ の場合と同じです。任意の x' での $g(x')$ を b とすれば

$$f(x) \leq b$$

となり、b は $f(x)$ の上界で

$$\sup_{x\in X} f(x) \leq b$$

b の下界が $\sup f$ なので、$b = g(x')$ の下限とは

$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \inf_{x'\in X} g(x')$$

となります。x, x' と区別したままにしてますが、どちらも X の元なので区別しなくても同じです。

[A6] 定義域 X で与えられている関数 f, g による和 $f+g$ の上限、下限は

$$\sup_{x\in X}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x)$$
$$\inf_{x\in X}(f(x)+g(x)) \geq \inf_{x\in X} f(x) + \inf_{x\in X} g(x).$$

関数の和 $f+g$ は $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ となっています。$f(x) \leq \sup f(x),\ g(x) \leq \sup g(x)$ を足せば

$$f(x)+g(x) \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} f(x)$$

右辺は $f+g$ の上界なので、上限の条件 (i) から

$$\sup_{x\in X}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} f(x)$$

下限では $f(x) \geq \inf f(x),\ g(x) \geq \inf g(x)$ なので

$$f(x)+g(x) \geq \inf_{x\in X} f(x) + \inf_{x\in X} f(x) \ \Rightarrow\ \inf_{x\in X}(f(x)+g(x)) \geq \inf_{x\in X} f(x) + \inf_{x\in X} f(x)$$

となります。