スペクトル定理

ここではコンパクト自己共役演算子のスペクトル定理を求めます。ヒルベルト空間だけを使うので、ヒルベルト空間でなくても定義できるものもヒルベルト空間で定義しています。
ヒルベルト空間は $\mathcal{H}$ と表記し、「$*$」は共役、「-」は複素共役です。
演算子と言ったときは線形演算子で、有界線形演算子の集合は $\mathcal{L}_B$ と表記します。
無限数列は範囲を省いて $\{a_i\}$ のように表記します。
大文字のローマ文字は演算子、小文字はベクトル、ギリシャ文字は K(実数か複素数) です。

出てくる数列関係の定義を並べておきます。証明は省きます。

- 部分列

  数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ があり、$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ から抜き出された $b_j = a_{r(j)}$ $(r(1) < r(2) < \cdots)$ によって作られる数列 $\{b_j\}_{j=1}^{\infty} = \{a_{r(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ のことを部分列と言います (元の $\{a_i\}$ の並びを変えないように取り出す)。有限次元において、有界な数列 ($\|a_i\| \leq \alpha,\ \alpha > 0$ となる α がいる数列) は収束する部分列を持ちます。

- 弱収束、強収束

  数列 $\{a_i\}$ が $v \in \mathcal{H}$ との内積の $i \to \infty$ で $< a_i, v > \to < a_0, v >$ となるとき、$a_0 \in \mathcal{H}$ に弱収束する (weakly convergent) と言い、収束先は一意的に決まります。弱収束に対して、$i \to \infty$ で $\|a_i - a_0\|$ が 0 になるなら a_0 に強収束する (strongly convergent) と言います。強収束なら弱収束です。ヒルベルト空間において弱収束する数列は有界です。

  弱収束は収束 (強収束) との区別のための単語なので、収束と言った場合は強収束とします。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の内積とノルムは

$$< v, w > \ ,\ \|v\| = \sqrt{< v, v >} \quad (v, w \in \mathcal{H})$$

と定義します。

スペクトル定理（spectral theorem）は固有値、固有ベクトルを使ったものなので、固有値、固有ベクトルを演算子で定義します。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への演算子を $T \in \mathcal{L}_B(\mathcal{H})$ とします。このとき、$v \neq 0$ $(v \in \mathcal{H})$ に対して

$$T(v) = \lambda v$$

となるとき、$\lambda \in \mathrm{K}$ を T の固有値、v を固有値 λ での T の固有ベクトル、固有値 λ に対応する全ての固有ベクトルの集合は固有空間 (eigenspace) と呼ばれます。固有空間は

$$\mathcal{E}_\lambda = \{v|\ T(v) = \lambda v\}$$

と表記します ($\mathcal{E}_\lambda \subset \mathcal{H}$)。カーネルを使えば、$\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ が固有空間 $\mathcal{E}_\lambda$ です。I は恒等演算子 ($I(v) = v$) です。λ の固有空間 $\mathcal{E}_\lambda$ では

$$T(x) = \lambda x\ ,\ T(y) = \lambda y \quad (x, y \in \mathcal{E}_\lambda)$$

これらと演算子の線形性から

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

$\alpha x + \beta y \in \mathcal{E}_\lambda$ なので固有空間はベクトル空間です。固有空間の次元は λ の重複度 (multiplicity) と呼ばれます。

違いをはっきりさせるために、数列の極限としての approximate eigenvalue の定義を与えておきます。$\mathcal{H}$ において $\|a_i\| = 1$ となる数列 $\{a_i\}$ があり、$T \in \mathcal{L}_B(\mathcal{H})$ と $\lambda \in \mathrm{K}$ によって

$$\lim_{i\to\infty} \|T(a_i) - \lambda a_i\| = 0$$

となるとき、λ を approximate eigenvalue と呼びます。固有値は approximate eigenvalue ですが、approximate eigenvalue が固有値になるとは言えません。

自己共役演算子での性質を求めます。共役「$*$」によって演算子が $A = A^*$ なら A は自己共役演算子で、このとき内積は

$$< v, A(w) > = < A(v), w > \qquad (v, w \in \mathcal{H})$$

となり、実数です。自己共役演算子 A では

- 固有値は実数
- 異なる固有値に対応する固有ベクトルはそれぞれ直交する
- $\mathcal{H}$ の部分空間が A で不変なら、その直交補空間も A で不変

という性質を持ちます。3 番目の A で不変というのは、部分空間を $\mathcal{M}$、$v \in \mathcal{M}$ とすれば、$A(v) \in \mathcal{M}$ となることです。これは自己共役演算子である必要はなく、部分空間 $\mathcal{M}$ と演算子 $T \in \mathcal{L}_B(\mathcal{H})$ があり、$v \in \mathcal{M}$ に対して $T(v) \in \mathcal{M}$ となるとき、$\mathcal{M}$ は演算子 T で不変 (invariant under T) や T-invariant と言われます。

これらは簡単に示せます。固有値を λ、固有ベクトルを v として $(A(v) = \lambda v)$

$$\lambda < v, v > = < v, \lambda v > = < v, A(v) > = < A(v), v > = < \lambda v, v > = \overline{\lambda} < v, v >$$

から $\lambda = \overline{\lambda}$ となり、固有値は実数です。「-」は複素共役です。

自己共役演算子 A の異なる固有値を λ, ρ(実数) と、それらに対応する固有ベクトルを v, w として

$$(\lambda - \rho) < v, w > = < \lambda v, w > - < v, \rho w > = < A(v), w > - < v, A(w) > = < A(v), w > - < A(v), w > = 0$$

なので、$\lambda \neq \rho$ では固有ベクトルは直交します。

$\mathcal{H}$ の部分空間を $\mathcal{X}$、その直交補空間を $\mathcal{X}^\perp$ とし、$x \in \mathcal{X}, x_\perp \in \mathcal{X}^\perp$ とします $(< x, x_\perp > = 0)$。$\mathcal{X}$ を A で不変とすれば $A(x) \in \mathcal{X}$ なので、直交している関係が残り

$$< A(x), x_\perp > = < x, A(x_\perp) > = 0$$

よって、$A(x_\perp) \in \mathcal{X}^\perp$ となり、$\mathcal{X}^\perp$ は A で不変です。また、これからすぐに分かるように、自己共役演算子でない演算子 T では、$T^*(x_\perp) \in \mathcal{X}^\perp$ です。

また、自己共役演算子 A のノルムは

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} | < v, A(v) > | \tag{1}$$

と与えられます。証明は下の補足 1 でしています。

有限次元ヒルベルト空間での自己共役演算子のスペクトル定理から見ておきます。線形代数で出てくる話なので、簡単に触れるだけにします。

n 次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ でのベクトルは正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ によって

$$v = \sum_{i=1}^n < e_i, v > e_i$$

と展開出来ます (完全正規直交基底が定義できるなら無限次元でも同様)。$\mathcal{H}^{(n)}$ から $\mathcal{H}^{(n)}$ への演算子 T を作用させて

$$T(v)=\sum_{i=1}^{n}<e_i,v>T(e_i)$$

$T(e_j)$ はベクトルなので

$$T(e_i)=\sum_{i=1}^{n}<e_j,T(e_i)>e_j$$

から

$$\begin{aligned}
T(v)= &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}<e_i,v><e_j,T(e_i)>e_j \\
<e_k,T(v)>= &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}<e_i,v><e_j,T(e_i)><e_k,e_j> \\
y_k=M_{ki}x_i &\quad (y_k=<e_k,T(v)>,\ x_i=<e_i,v>,\ M_{ki}=<e_k,T(e_i)>)
\end{aligned} \tag{2}$$

として、演算子 T に対応する基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ での表現行列 M_{ki} が求められます。

ここで、T を自己共役演算子として、表現行列が対角行列になる基底があるのかを求めます。自己共役演算子は異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交します。これから、固有ベクトルを基底に出来るかを見ます。

自己共役演算子 $A\in\mathcal{L}_B(\mathcal{H}^{(n)})$ とします。A は固有ベクトルを持つとし、それらの全ての線形結合による集合を $\mathcal{S}$ とします。$\mathcal{S}=\mathcal{H}^{(n)}$ なら固有ベクトルの線形結合によって、$\mathcal{H}^{(n)}$ のベクトルになるので、固有ベクトルは基底となります。

$\mathcal{S}$ は $\mathcal{H}$ の部分空間で、固有ベクトル $v_i\in\mathcal{S}$ に対して $A(v_i)=\lambda_i v_i\in\mathcal{S}$ なので、A で不変です。このため、$\mathcal{S}$ の直交補空間 $\mathcal{S}^\perp$ も A で不変です。実際に、$v_i\in\mathcal{S}$ と $A(u)$ $(u\in\mathcal{S}^\perp)$ との内積を取ってみると

$$<v_i,A(u)>=<A(v_i),u>=\lambda_i<v_i,u>=0$$

なので、$A(u)$ は v_i と直交することから $A(u)\in\mathcal{S}^\perp$ です。

有限次元での $\mathcal{L}_B(\mathcal{H}^{(n)})$ の演算子は有限の表現行列 M にでき、n 次元において $\det[M-\lambda I]=0$ は λ の解を少なくとも 1 個は持ちます。なので、固有値は少なくとも 1 個あります。このことと $\mathcal{L}_B(\mathcal{S}^\perp)$ から、$\mathcal{S}^\perp$ において A には少なくとも 1 個の固有値と、それに対応する固有ベクトルがいます。u をその固有ベクトルとしたら、u は固有ベクトルなので $u\in\mathcal{S}$ でもあることになり、u は $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}^\perp$ の共通部分にいます $(v\in\mathcal{S}\cap\mathcal{S}^\perp)$。しかし、これでは $<u,u>=0$ となり、固有ベクトルの定義 $u\neq0$ と矛盾します。よって、$\mathcal{S}^\perp=\{0\}$ となり、$\mathcal{S}=\mathcal{H}^{(n)}$ です (ヒルベルト空間は部分空間とその直交補空間の和で書けるから)。というわけで、自己共役演算子は有限次元において、基底となる固有ベクトルを持ちます。

そうすると、A の固有値と対応する固有ベクトルを λ_i,e_i としたとき、固有ベクトルは正規直交基底として使えるので、(2) において $A(e_i)=\lambda_ie_i$ から $M_{ki}=\lambda_i<e_k,e_i>=\lambda_i\delta_{ki}$ となり、$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ による対角行列となります (δ_{ij} はクロネッカーデルタ)。

これを自己共役演算子のスペクトル定理と言います。つまり、有限次元ヒルベルト空間において自己共役演算子は、正規直交基底となる固有ベクトルを持ち (固有値は実数)、その基底による表現行列は対角行列になる、というものです。これは線形代数での対角化についての話で出てくるものですが、そのときはスペクトル定理という単語はほとんど言われないです。

このようにスペクトル定理は対角化に関する定理です。同様の定理が無限次元でも作れるのかを見ます。無限次元へは完全正規直交基底とすれば、無限次元の行列になるだけで同じことが出来るように思えますが、状況はかなり複雑になります。その理由の 1 つは固有値が存在するとは限らないからです。

無限次元において自己共役演算子の固有値が与えられない例を出しておきます。$L^2[\alpha,\beta]$ 空間での積演算子 Tf は

$$(Tf)(t)=\gamma(t)f(t)$$

と定義されます ($T(f)$ を Tf と表記しています)。t は $[\alpha, \beta]$ の実数です。これは

$$< T^*g, f >=< g, Tf >= \int_\alpha^\beta dt\ \overline{g(t)}(Tf)(t) = \int_\alpha^\beta dt\ \overline{g(t)}\gamma(t)f(t) = \int_\alpha^\beta d\rho\ \overline{\overline{\gamma(t)}g(t)}f(t)$$

から

$$(T^*g)(t) = \overline{\gamma(t)}g(t)$$

なので、$\gamma(t) = \overline{\gamma(t)}$ で自己共役演算子になります。

積演算子で $\gamma(t)$ を t とし $((Tf)(t) = tf(t))$、T を自己共役演算子にします。もし、T が固有値 λ を持つなら、$Tf = \lambda f$ なので、$Tf = tf$ との差を取ってみると、左辺は

$$(Tf)(t) - (Tf)(t) = 0$$

右辺は

$$tf(t) - \lambda f(t) = (t - \lambda)f(t)$$

なので、$f(t) = 0$ です。よって、固有ベクトルが $f = 0$ となり、自己共役演算子でも固有値を持たない場合があるのが分かります。

というわけで、演算子にさらに制限を加えるために、コンパクト演算子を定義します。コンパクト演算子を使うのは、値域 (T を $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への演算子としたときの集合 $\{T(v)|\ v \in \mathcal{V}\}$) が有限次元の有界演算子はコンパクト演算子なので、有限次元での性質を無限次元に持ち込めるからです。コンパクト演算子の性質は下の補足 2 で示しています。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への演算子を K とします。$\mathcal{H}_1$ の有界な数列 $\{a_i\}$ に対して、$\mathcal{H}_2$ の数列 $\{K(a_i)\}$ が収束する部分列を含んでいるとき、K はコンパクト (compact) と呼ばれます。コンパクト演算子は有界です。

コンパクト演算子 K のとき、固有値 λ の固有空間 $\mathcal{E}_\lambda$ ($\mathrm{Ker}(K - \lambda I)$) は有限次元です。これを示すために $\mathcal{E}_\lambda$ を無限次元とし、その正規直交系を $\{e_i\}$ とします。固有空間にいるので $T(e_i) = \lambda e_i$ です。このとき、ベッセルの不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} | < e_i, v > |^2 \leq \|v\|^2$$

において、無限級数なので $< e_i, v >$ は $i \to \infty$ で 0 に収束する必要があります (無限級数が収束するための必要条件)。このため、$\{e_i\}$ は 0 に弱収束し、$\{K(e_i)\}$ は 0 に収束します (下の補足 2 参照)。しかし、$K(e_i) = \lambda e_i$ なので矛盾します。よって、コンパクト演算子の固有空間は有限次元です。

固有値に関する話は省いて、スペクトル定理にいきます。ここから A はコンパクト自己共役演算子とします。

自己共役演算子のノルム (1) から、$\|A\|$ を数列の極限として、$\|x_i\| = 1$ に対して $i \to \infty$ で $| < x_i, A(x_i) > | \to \|A\|$ と与えます。$< x_i, A(x_i) >$ の極限を実数 λ として、$|\lambda| = \|A\|$ とします。$A(x_i) - \lambda x_i$ のノルムを見てみると

$$\begin{aligned}\|A(x_i) - \lambda x_i\|^2 &= \|A(x_i)\|^2 + \lambda^2 - < A(x_i), \lambda x_i > - < \lambda x_i, A(x_i) > \\ &= \|A(x_i)\|^2 + \lambda^2 - \lambda < x_i, A(x_i) > - \lambda < x_i, A(x_i) > \\ &= \|A(x_i)\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda < A(x_i), x_i >\end{aligned}$$

$|\lambda| = \|A\|$ としているので

$$\|A(x_i)\| \leq \|A\|\|x_i\| = |\lambda|\|x_i\| = |\lambda|$$

よって

$$\|A(x_i) - \lambda x_i\|^2 \leq \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda < x_i, A(x_i) >$$

$< x_i, A(x_i) >$ の極限は λ から、$A(x_i) - \lambda x_i \to 0$ です。これは approximate eigenvalue なので、λ が固有値かはまだ分かりません。収束先を求めて、固有値になるのかを見ます。

コンパクトなので $\{A(x_i)\}$ は収束する部分列を持ちます。その部分列を $\{A(x_{r(i)})\}$ とすれば、$\{x_{r(i)}\}$ は $\{x_i\}$ の部分列で、$\|x_{r(i)}\| = 1$ です。$\{A(x_{r(i)})\}$ の収束先を y とします。

求めたように $A(x_i) - \lambda x_i$ は 0 に収束するので ($\{x_i\}$ が収束するとは言っていない)、部分列による $A(x_{r(i)}) - \lambda x_{r(i)}$ も 0 に収束します。そうすると、三角不等式による

$$\begin{aligned}\|y - \lambda x_{r(i)}\| &= \|y - A(x_{r(i)}) + A(x_{r(i)}) - \lambda x_{r(i)}\| \\ &\leq \|y - A(x_{r(i)})\| + \|A(x_{r(i)}) - \lambda x_{r(i)}\|\end{aligned}$$

での右辺は $i \to \infty$ で消えます。そうすると、$\lambda x_{r(i)} \to y$ となります。$x_{r(i)}$ の収束先を u とすれば $u = y/\lambda$ です。これを使うと

$$A(y) = \lim_{i\to\infty} A(\lambda x_{r(i)}) = \lambda \lim_{i\to\infty} A(x_{r(i)}) = \lambda y$$

y のノルムは、$\|x_{r(i)}\| = 1$ から

$$\|y\| = \|\lambda u\| = \lim_{i\to\infty} \|\lambda x_{r(i)}\| = |\lambda| \neq 0$$

なので、λ ($+\|A\|,\ -\|A\|$) は y を固有ベクトルとする固有値です。$u = y/\lambda$ に書き換えれば、

$$A(u) = \lambda u$$

として、ノルムが 1 の固有ベクトルで書けます。これで、コンパクト自己共役演算子の固有値が存在することが分かりました。

コンパクト演算子の性質を使ったことから分かるように、コンパクト演算子 K では、$i \to \infty$ で $\|K(x_i) - \lambda x_i\| \to 0$ となる $\|x_i\| = 1$ の数列 $\{x_i\}$ がいるとき、λ は固有値になる言えます。

コンパクト自己共役演算子の固有値、固有ベクトルが存在することが分かったので、次は固有ベクトルによって、$v \in \mathcal{H}$ による $A(v)$ を展開できるのかを求めます。

$\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}_1$ と表記します ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$)。見てきたように自己共役演算子 $A_1 \in \mathcal{L}_B(\mathcal{H}_1)$ は固有ベクトル e_1 ($\|e_1\| = 1$) と対応する固有値 λ_1 ($|\lambda_1| = \|A_1\|$) を持ちます。ここで、$e_1 \in \mathcal{H}_1$ の線形結合による部分空間の直交補空間を $\mathcal{H}_2$ とします。$\mathcal{H}_2$ は $\mathcal{H}_1$ の閉部分空間で (ヒルベルト空間の閉部分空間はヒルベルト空間)、A で不変です。このため、A_1 の定義域を $\mathcal{H}_2$ に制限した $A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ が作れます。$A_2 \neq 0$ なら、このときも固有ベクトル e_2 ($\|e_2\| = 1$) に対応する固有値 λ_2 ($|\lambda_2| = \|A_2\|$) がいます。$\mathcal{H}_2$ は $\mathcal{H}_1$ の閉部分空間で、演算子のノルムは sup で与えられていることから

$$|\lambda_2| = \|A_2\| \leq \|A_1\| = |\lambda_1|$$

同じことを繰り返します。$\{e_1, e_2\}$ は正規直交系で、これによる線形結合の部分空間は明らかに A で不変です。この部分空間の直交補空間を $\mathcal{H}_3$ (A で不変) とし、$\mathcal{H}_3$ に定義域が制限されている A を A_3 とします ($\mathcal{H}_3$ は $\mathcal{H}_1$ の閉部分空間)。$A_3 \neq 0$ なら、固有値を λ_3、固有ベクトルを e_3 として

$$|\lambda_3| = \|A_3\| \leq \|A_2\| = |\lambda_2|$$

さらに同じことを繰り返し続けると、正規直交系 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ による部分空間の直交補空間を $\mathcal{H}_n$、固有値を λ_n として

$$|\lambda_{i+1}| = \|A_{i+1}\| \leq \|A_i\| = |\lambda_i| \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

これから、$i \to \infty$ で $\lambda_i = 0$ になりそうなので、それを確かめます。

そのために、任意の i に対して $|\lambda_i| \geq \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ として、そうならない場合を仮定します。このとき $i \neq j$ に対して

$$\begin{aligned}\|A(e_i) - A(e_j)\|^2 &= \|\lambda_i e_i - \lambda_j e_j\|^2 \\ &= \ < \lambda_i e_i - \lambda_j e_j, \lambda_i e_i - \lambda_j e_j > \\ &= \ < \lambda_i e_i, \lambda_i e_i > + < \lambda_j e_j, \lambda_j e_j > \quad (< e_i, e_j > = < e_j, e_i > = 0) \\ &= \lambda_i^2 + \lambda_j^2 \geq 2\epsilon^2\end{aligned}$$

となります。A はコンパクトなので数列 $\{A(e_k)\}$ は、収束する部分列 $\{A(e_{r(k)})\}$ を持ちます。しかし、今の結果を $A(e_{r(k)})$ に使えば、$\{A(e_{r(k)})\}$ は収束しないことが分かります。よって、矛盾するので、$i \to \infty$ で $\lambda_i = 0$ です。というわけで、λ_i が無限数列 $\{\lambda_i\}$ なら、0 に収束することが分かります。

繰り返す手順は $A_{n+1} = 0$ で止まるか、$A_i \neq 0$ がどこまで続いていくかの 2 つの場合があります。それぞれの場合を見ます。

$A_i \neq 0$ が続いていくとします ($i \to \infty$ で $\lambda_i = 0$)。正規直交系 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ を用意します。これによる空間 $\mathcal{M}_{n-1}$ は $\mathcal{H}_1$ の部分空間で、$\mathcal{H}_n$ は $\mathcal{M}_{n-1}$ の直交補空間です。$w \in \mathcal{M}_{n-1}, w_\perp \in \mathcal{H}_n$ とすれば、正射影定理から $v \in \mathcal{H}_1$ は、w は $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ を基底とするので $\alpha_i = < e_i, w >$ を係数として

$$v = w + w_\perp \ , \ w = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$$

と書けます。これに A_n を作用させます。A_i $(i = 2, 3, \ldots)$ は A_1 の定義域を制限していったもので、A_1 の定義域 $\mathcal{H}_1$ はその定義域 $\mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ を含んでいます。なので、$A(e_i) = \lambda_i e_i$ です。そうすると

$$\|A(v) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A(e_i)\| = \|A_n(w_\perp)\|$$

$$\|A(v) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i e_i\| \leq \|A_n\| \|w_\perp\| = |\lambda_n| \|w_\perp\|$$

三角不等式から $\|w_\perp\| \leq \|v\|$ なので

$$\|A(v) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i e_i\| \leq |\lambda_n| \|v\|$$

$n \to \infty$ で $\lambda_n = 0$ から

$$A(v) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < e_i, v - w_\perp > e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < e_i, v > e_i$$

となり ($< e_i, w_\perp > = 0$)、$\{e_i\}$ によって展開された形になります。

今度は $A_{n+1}=0$ とします。正規直交系を $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$、これによる部分空間を $\mathcal{M}_n$ とします。$\mathcal{H}_{n+1}$ は $\mathcal{M}_n$ の直交補空間です。$w\in\mathcal{M}_n, w_\perp\in\mathcal{H}_{n+1}$ とすれば、正射影定理から $v\in\mathcal{H}_1$ は

$$v=w+w_\perp\ ,\ w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$$

$A_{n+1}(w_\perp)=0$ なので

$$A_{n+1}(v)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_iA_{n+1}(e_i)=0$$

$$A_{n+1}(v)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iA_{n+1}(e_i)$$

よって、

$$A(v)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_ie_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i<e_i,v>e_i$$

となります。

というわけで、$\mathcal{H}$ でのコンパクト自己共役演算子を A としたとき、

$$A(v)=\sum_i\lambda_i<e_i,v>e_i\qquad(v\in\mathcal{H})$$

となる A の固有ベクトルの正規直交系 $\{e_i\}_{i=1}^n$ もしくは $\{e_i\}$ と、それに対応する固有値 λ_i が存在し、無限数列 $\{\lambda_i\}$ では 0 に収束します。これがコンパクト自己共役演算子でのスペクトル定理です。有限次元では線形代数の結果と同じです。

スペクトル定理での $\{e_i\}$ は完全正規直交系とはされていません。もし $\{e_i\}$ が完全正規直交系であるなら、コンパクト自己共役演算子を基底 $\{e_i\}$ によって表現行列にすると、$\{\lambda_i\}$ を対角成分とする対角行列になります。

スペクトル定理の逆を言うこともできます。有限、無限のどちらでもいい場合は和の範囲を省いて書きます。

逆を言うために、$\{e_i\}$ が正規直交系で、λ_i の数列は $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ もしくは 0 に収束する $\{\lambda_i\}$ としたとき、

$$A(v)=\sum_i\lambda_i<e_i,v>e_i$$

となる A はコンパクトで自己共役であることを示します。

$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ の場合は有限なので、そのままコンパクトです。無限大の場合でもコンパクトかを見ます。$\{\lambda_i\}$ が 0 に収束するとし、A_n を

$$A_n(v)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i<e_i,v>e_i$$

と与えれば、演算子のノルムから

$$\|A-A_n\|^2=\sup_{\|v\|=1}\|A(v)-A_n(v)\|^2=\sup_{\|v\|=1}\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i<e_i,v>e_i\|^2$$

$$=\sup_{\|v\|=1}\sum_{i=n+1}^{\infty}|\lambda_i|^2|<e_i,v>|^2$$

λ_k を $k > n$ での最も大きなものとすれば

$$\sup_{\|v\|=1} \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 | < e_i, v > |^2 \le |\lambda_k|^2 \sup_{\|v\|=1} \sum_{i=n+1}^{\infty} | < e_i, v > |^2$$

ベッセルの不等式

$$\sum_{i=1}^{n} | < e_i, v > |^2 \le \|v\|^2$$

を使えば

$$|\lambda_k|^2 \sup_{\|v\|=1} \sum_{i=n+1}^{\infty} | < e_i, v > |^2 \le |\lambda_k|^2$$

となり

$$\|A - A_n\|^2 \le |\lambda_k|^2$$

n の無限大の極限を取れば λ_k は 0 に収束することから、これは 0 になります。よって、無限大でもコンパクトです。

自己共役は内積を変形すれば

$$\begin{aligned}
< w, A(v) > =< w, \sum_i \lambda_i < e_i, v > e_i > &= \sum_i \lambda_i < e_i, v >< w, e_i > \\
&= < \sum_i \lambda_i \overline{< w, e_i >} e_i, v > \\
&= < \sum_i \lambda_i < e_i, w > e_i, v > \\
&= < A(w), v >
\end{aligned}$$

となることから分かります。よって、スペクトル定理の逆が言えます。

・補足 1

自己共役演算子のノルムが (1) で与えられることを示します。表記を簡単にするために

$$\gamma = \sup_{\|v\|=1} | < v, A(v) > |$$

とします。

$\|v_0\| = 1$ として、コーシー・シュワルツの不等式を使えば

$$| < v_0, A(v_0) > | \le \|A(v_0)\|\|v_0\| \le \|A\|\|v_0\|\|v_0\| = \|A\|$$

なので、γ は $\|A\|$ と

$$\sup_{\|v\|=1} | < v, A(v) > | = \gamma \le \|A\|$$

となります。
　別の方向から γ と $\|A\|$ の関係を求めます。かなりひねったことをします。まず、$|<v, A(v)>|$ を

$$|<v, A(v)>| = |<\frac{v}{\|v\|}, A(\frac{v}{\|v\|})>|\|v\|^2$$

と書き換えたとき、$v/\|v\|$ は単位ベクトルなので、コーシー・シュワルツの不等式から

$$|<\frac{v}{\|v\|}, A(\frac{v}{\|v\|})>| \leq \|A\|$$

これの $v/\|v\|$ を $u \in \mathcal{H}$ にし、$\|u\| = 1$ での上限と書き換えることで

$$|<v, A(v)>| \leq \sup_{\|u\|=1} |<u, A(u)>|\|v\|^2 = \gamma\|v\|^2 \tag{3}$$

という不等式を出せます。
　今度は $v, w \in \mathcal{H}$ として

$$\begin{aligned}<v+w, A(v+w)> - <v-w, A(v-w)> =& <v, A(v)> + <v, A(w)> + <w, A(v)> + <w, A(w)> \\ &- <v, A(v)> + <v, A(w)> + <w, A(v)> - <w, A(w)> \\ &= 2(<v, A(w)> + <w, A(v)>) \\ &= 4\mathrm{Re} <w, A(v)>\end{aligned}$$

Re は実部を表します。最後へは、自己共役演算子では

$$<v, A(w)> = <A(v), w> = \overline{<w, A(v)>}$$

なので

$$<v, A(w)> + <w, A(v)> = \overline{<w, A(v)>} + <w, A(v)> = 2\mathrm{Re} <w, A(v)>$$

となるからです。
　これは、(3) と中線定理から

$$\begin{aligned}4\mathrm{Re} <w, A(v)> =& <v+w, A(v+w)> - <v-w, A(v-w)> \\ &\leq |<v+w, A(v+w)>| + |<v-w, A(v-w)>| \\ &\leq \gamma\|v+w\|^2 + \gamma\|v-w\|^2 \\ &= \gamma(\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2) \\ &= 2\gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2)\end{aligned}$$

となります。
　$<w, A(v)>$ は複素数なので極形式 $|<w, A(v)>|e^{i\theta}$ （θ は実数）で書けます。なので、これの w を $w' = e^{i\theta}w$ と置き換えて

$$< w', A(v) >=< e^{i\theta} w, A(v) >= e^{-i\theta} < w, A(v) >= | < w, A(v) > |$$

から

$$\mathrm{Re} < w', A(v) >= | < w, A(v) > |$$

となるので

$$| < w, A(v) > | \le \frac{1}{2}\gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad (\|e^{i\theta} w\| = \|w\|)$$

ここで、$A(v) \neq 0$ とし、w を $w = A(v)\|v\|/\|A(v)\|$ とすれば

$$| < w, A(v) > | = | < \frac{A(v)\|v\|}{\|A(v)\|}, A(v) > | = \|A(v)\|\|v\|$$
$$\|v\|^2 + \|\frac{A(v)\|v\|}{\|A(v)\|}\|^2 = 2\|v\|^2$$

これらによって

$$\|A(v)\|\|v\| \le \gamma\|v\|^2$$
$$\|A(v)\| \le \gamma\|v\|$$

$\sup\limits_{\|v\|=1}$ を取れば左辺は $\|A\|$、右辺は γ になるので $\|A\| \le \gamma$ です (もしくは任意の v で成立するから)。よって、最初の結果と合わせると $\|A\| = \gamma$ です。

・補足 2

コンパクト演算子に関する性質

(a) コンパクト演算子は有界

(b) ヒルベルト空間において $\{a_i\}$ が a_0 に弱収束するなら、$\{K(a_i)\}$ は $K(a_0)$ に強収束

(c) 値域が有限次元の有界演算子はコンパクト

(d) 値域が有限次元の有界演算子による数列はコンパクト演算子 $K \in \mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ に収束

を示します。$\mathcal{N}$ はノルム空間、$\mathcal{B}$ はバナッハ空間、$\mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ は $\mathcal{N}$ から $\mathcal{B}$ への有界演算子の集合です。

(a) を示します。$\|a_k\| = 1$ の数列 $\{a_k\}$ とし、K は有界でないとすると、$\|K(a_k)\|$ は $k \to \infty$ でどこまでも大きくなれます (例えば $\|K(a_k)\| \ge k$)。コンパクトであるなら $K(a_k)$ は収束する部分列 $\{K(a_{r(k)})\}$ がいます。しかし、これのノルムも $k \to \infty$ でどこまでも大きくなれてしまい、収束しません ($\|K(a_{r(k)})\| \ge r(k)$)。よって、コンパクトの定義と矛盾するので有界です。

(b) を示すために $\{a_i\}$ を a_0 に弱収束する数列とします。ヒルベルト空間での弱収束なので有界な数列です。演算子を T として、共役の定義から

$$< v, T(a_i) >=< T^*(v), a_i >$$

なので

$$\lim_{i\to\infty} < v, T(a_i) >= \lim_{i\to\infty} < T^*(v), a_i >=< T^*(v), a_0 >=< v, T(a_0) >$$

から、$\{T(a_i)\}$ は $T(a_0)$ に弱収束します。

$\{a_i\}$ は有界な数列なので、T がコンパクト演算子 K なら強収束する部分列 $\{K(a_{r(i)})\}$ を持ち、今の結果から $\{K(a_{r(i)})\}$ は $K(a_0)$ に弱収束することが言えます。そして、弱収束は一意的に決まり、強収束なら弱収束なので、$\{K(a_{r(i)})\}$ は $K(a_0)$ に強収束します。

一方で、$\{a_{r(i)}\}$ は $\{a_i\}$ の部分列なので、$K(a_i)$ が $K(a_0)$ に強収束しないなら

$$\lim_{i\to\infty}\|K(a_0)-K(a_{r(i)})\|\neq 0$$

となり、強収束しなくなります。このため、$\{K(a_i)\}$ が $K(a_0)$ に強収束することが要求されます。よって、コンパクト演算子 K は、$\{a_i\}$ が a_0 に弱収束するなら $\{K(a_i)\}$ は $K(a_0)$ に強収束します。

(c) は単純で、有界な $\{a_i\}$ による $\{K(a_i)\}$ はノルムの定義から有界なので、値域が有限次元なら $\{K(a_i)\}$ は収束する部分列を持つためです (有限次元で有界な数列は部分列を持つ)。

(d) は、値域が有限次元の有界演算子はコンパクトなので、$\{K_m\}$ をコンパクト演算子の数列とし、その収束先がコンパクト演算子 K であることを示せばいいです。そのために、有界な数列 $\{x_i\}$ から各 K_m で収束する部分列 $\{x_{r(i)}\}$ を作り、それを使って $K(x_{r(i)})$ が収束することを見ます。

有界な数列 $\{x_i^{(1)}\}$ に対して、K_1 はコンパクトなので $\{K_1(x_{r(i)}^{(1)})\}$ が収束する部分列 $\{x_{r(i)}^{(1)}\}$ がいます。$\{x_{r(i)}^{(1)}\}$ を $\{x_i^{(1)}\}$ と添え字を付け替えます。K_2 はコンパクトなので、有界な数列 $\{x_i^{(1)}\}$ に対して、$\{K_2(x_{r(i)}^{(1)})\}$ は収束する部分列 $\{K_2(x_{r(i)}^{(2)})\}$ を持ち、$\{x_i^{(1)}\}$ の部分列 $\{x_{r(i)}^{(2)}\}$ がいます。これを続けていけば、$\{x_i^{(m-1)}\}_i$ $(m\geq 2)$ は $\{K_m(x_{r(i)}^{(m)})\}_i$ が収束する部分列 $\{x_{r(i)}^{(m)}\}_i$ を持ちます。

$\{x_i\}$ から始め、K_1 では $\{x_i\}$ の部分列 $\{x_{r(i)}^{(1)}\}$、それから K_2 では $\{x_i^{(1)}\}$ の部分列 $\{x_{r(i)}^{(2)}\}$、として作っていることから分かるように、$\{K_m(x_{r(i)}^{(j)})\}_i$ は $m\leq j$ なら収束します。そして、各 K_m で収束させるために、$\{x_{r(i)}^{(i)}\}_i$ とします。これによって、全ての K_m で収束する数列 $\{K_m(x_{r(i)}^{(i)})\}_i$ が作れます ($i\to\infty$ で $K_m(x_{r(\infty)}^{(\infty)})$ なので各 m で収束する)。

$\{x_{r(i)}^{(i)}\}_i$ は $\{x_{r(i)}\}$ とします。$\{x_{r(i)}\}$ を使うと $\{K_m\}$ の収束先 K がコンパクトになることが分かります。$\{K_m\}$ は K に収束するので、$\epsilon>0$ によって

$$\|K_m-K\|<\epsilon$$

$\{K_m(x_{r(i)})\}_i$ は収束するので、コーシー列です。なので、$\epsilon'>0$、正の整数 N に対して $r(i),r(j)>N$ として

$$\|K_m(x_{r(i)})-K_m(x_{r(j)})\|<\epsilon'$$

そうすると

$$\begin{aligned}
\|K(x_{r(i)})-K(x_{r(j)})\| &= \|K(x_{r(i)})-K_m(x_{r(i)})+K_m(x_{r(i)})-K_m(x_{r(j)})+K_m(x_{r(j)})-K(x_{r(j)})\| \\
&\leq \|K(x_{r(i)})-K_m(x_{r(i)})\|+\|K_m(x_{r(i)})-K_m(x_{r(j)})\|+\|K_m(x_{r(j)})-K(x_{r(j)})\| \\
&= \|(K-K_m)(x_{r(i)})\|+\|K_m(x_{r(i)})-K_m(x_{r(j)})\|+\|(K_m-K)(x_{r(j)})\| \\
&< \|K-K_m\|\|x_{r(i)}\|+\epsilon'+\|K_m-K\|\|x_{r(j)}\|
\end{aligned}$$

$\|x_i\|\leq\alpha$ $(\alpha>0)$ なので

$$\|K(x_{r(i)})-K(x_{r(j)})\|<2\alpha\epsilon+\epsilon'=\epsilon''\quad(\epsilon''>0)$$

よって、$K(x_{r(i)})$ はコーシー列です。そして、今は $K(x_{r(i)})$ はバナッハ空間にいて、バナッハ空間のコーシー列は収束することから、$K(x_{r(i)})$ は収束します。よって、$\{K(x_i)\}$ は収束する部分列 $K(x_{r(i)})$ を持つので、K はコンパクトです。