フロベニウスの方法

「級数解」の最後に触れたフロベニウスの方法を見ていきます。

フロベニウスの方法 (method of Frobenius) は $x=0$ の確定特異点を持つ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xP(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \tag{1}$$

という形の微分方程式に使われます。$P(x), Q(x)$ は $x=0$ で解析的です。この形を標準形と言ったりします。このとき、解を

$$y(x)=x^t\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

と仮定するのがフロベニウスの方法で、これをフロベニウス級数と言います。c_n は定数です。ここでは級数は収束している前提で話を進めていきます。また、$x<0$ のときは、$x=-|x|=-z<0$ とすれば

$$\frac{d}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{d}{dz}=-\frac{d}{dz}$$

から

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+zP(z)\frac{dy}{dz}+Q(z)y=0$$

となり、式は変更されません。このため、フロベニウス級数を

$$z^t\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

と置き換えればいいだけです。なので、ここでは $x>0$ としていきます。

c_n はフロベニウス級数を (1) に入れることで求められます。フロベニウス級数の微分は

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}(c_0x^t+c_1x^{t+1}+c_2x^{t+2}+\cdots)=c_0tx^{t-1}+c_1(t+1)x^t+c_2(t+2)x^{t+1}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t+n)x^{t+n-1}\end{aligned} \tag{2a}$$

もう 1 回微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(c_0 t x^{t-1} + c_1(t+1)x^t + c_2(t+2)x^{t+1} + c_3(t+3)x^{t+2} + \cdots) \\
&= c_0 t(t-1)x^{t-2} + c_1(t+1)t x^{t-1} + c_2(t+2)(t+1)x^t + c_3(t+3)(t+2)x^{t+1} + \cdots) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)(t+n-1)x^{t+n-2} \qquad (2b)
\end{aligned}
$$

$P(x), Q(x)$ は $x=0$ で解析的なので、べき級数によって

$$
P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n
$$

a_n, b_n は定数です。(1) でのこれらの項は

$$
\begin{aligned}
&xP(x)\frac{dy}{dx} = x^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t+m)x^m = x^t \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}c_k(t+k)x^n \\
&Q(x)y = x^t \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^t \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}c_k x^n
\end{aligned}
$$

級数同士の積の関係

$$
\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l
$$

を使っています。そうすると

$$
\begin{aligned}
&x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xP(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y \\
&\quad = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)(t+n-1)x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}c_k(t+k)x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}c_k x^n \qquad (3)
\end{aligned}
$$

これが 0 になるので

$$
\sum_{n=0}^{\infty}((t+n)(t+n-1)c_n + \sum_{k=0}^{n}((t+k)a_{n-k} + b_{n-k})c_k)x^n = 0
$$

$x^n \neq 0$ として

$$
(t+n)(t+n-1)c_n + \sum_{k=0}^{n}((t+k)a_{n-k} + b_{n-k})c_k = 0
$$

和は $n=0$ では $k=0$ までなので

$$(t(t-1)+a_0t+b_0)c_0=0$$

$c_0\neq 0$ として

$$t(t-1)+a_0t+b_0=0 \tag{4}$$

t を決めるこの式は決定方程式と呼ばれます。このように、$n=0$ からは決定方程式が出てきます。$n\geq 1$ では

$$\begin{aligned}
0&=(t+n)(t+n-1)c_n+\sum_{k=0}^{n}((t+k)a_{n-k}+b_{n-k})c_k\\
&=(t+n)(t+n-1)c_n+\sum_{k=0}^{n-1}((t+k)a_{n-k}+b_{n-k})c_k+((t+n)a_0+b_0)c_n\\
&=((t+n)(t+n-1)+(t+n)a_0+b_0)c_n+\sum_{k=0}^{n-1}((t+k)a_{n-k}+b_{n-k})c_k\\
c_n&=-\frac{1}{(t+n)(t+n-1)+(t+n)a_0+b_0}\sum_{k=0}^{n-1}((t+k)a_{n-k}+b_{n-k})c_k
\end{aligned} \tag{5}$$

として、c_n の漸化式になります。これによって c_n が決まり、解が求まったことになります。

しかし、t が 2 次方程式に従っているために、t の解によって y は場合分けされます。決定方程式から

$$t=\frac{-(a_0-1)\pm\sqrt{(a_0-1)^2-4b_0}}{2}$$

このときの t は、t_1,t_2 $(t_1\neq t_2)$ か $t_1=t_2$ の場合に分けられます。また、複素数までを含めるなら、t_1,t_2 が複素共役の場合 (ルート部分が虚数になる場合) もありますが、求め方は変わりません。ここでは実数だけを扱います。

$t_1\neq t_2$ から見ていきます。t の 2 つの解のどちらを t_1,t_2 にするかは任意なので、$t_1>t_2$ とします。(5) から c_n が求まるためには

$$(t+n)(t+n-1)+(t+n)a_0+b_0\neq 0 \tag{6}$$

となる必要があります。t_1 はこれを満たしているとして、t_1 による解

$$y_1(x)=x^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t_1)x^n$$

が存在するとします。t_1 は決定方程式 (4) において

$$t_1(t_1-1)+a_0t_1+b_0=0$$

となっています。この状況で t_2 での $c_n(t_2)$ を求めようとします。そうすると、(6) の左辺は決定方程式での t を $t+n$ に変えたものになっているために、ある $n=N$ において

$$(t_2+N)(t_2+N-1)+(t_2+N)a_0+b_0=t_1(t_1-1)+t_1a_0+b_0=0$$

となってしまうと、(6) を満たさないのが分かります。よって、$t_2+N\neq t_1$ が要求されるので、t_1-t_2 $(t_1>t_2)$ が正の整数になっていないなら、t_2 での解は

$$y_2(x)=x^{t_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t_2)x^n \tag{7}$$

と求められます。これは t_1, t_2 に対応するフロベニウス級数が 2 つの解になるという素直な話です。

もし $t_1-t_2=N$ となっているなら、c_0 から c_{N-1} までは求まり、c_N において

$$((t_2+N)(t_2+N-1)+(t_2+N)a_0+b_0)c_N=-\sum_{k=0}^{N-1}((t_2+k)a_{n-k}+b_{n-k})c_k$$

左辺の c_N の係数部分は 0 になり、右辺が c_0 で書けるとして

$$0=\alpha(t_2)c_0$$

まとめた係数を $\alpha(t_2)$ としています。$c_0\neq 0$ なので $\alpha(t_2)=0$ が要求されますが、一般的には $\alpha(t_2)\neq 0$ です。このように、c_N で成立しなくなるので、$t_1-t_2=N$ では (7) とならないです。というわけで、この場合ではフロベニウス級数による解が 1 つしか出てこないので、2 階微分方程式の一般解を作るにはもう 1 つの線形独立な解を求める必要があります。

解が 1 つ分かっているので階数低減法で求めます。t_1 での解 y_1 はフロベニウス級数として求まっているとして、もう 1 つの解 y_2 を関数 $f(x)$ を使って

$$y_2(x)=f(x)y_1(x)$$

として、$f(x)$ を求めます。微分は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}y_1+f\frac{dy_1}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{df}{dx}y_1+f\frac{dy_1}{dx})=\frac{d^2f}{dx^2}y_1+f\frac{d^2y_1}{dx^2}+2\frac{df}{dx}\frac{dy_1}{dx}$$

なので、(1) に入れれば

$$
\begin{aligned}
&x^2(\frac{d^2f}{dx^2}y_1+f\frac{d^2y_1}{dx^2}+2\frac{df}{dx}\frac{dy_1}{dx})+xP(\frac{df}{dx}y_1+f\frac{dy_1}{dx})+fQy_1\\
&\quad=x^2\frac{d^2f}{dx^2}y_1+fx^2\frac{d^2y_1}{dx^2}+2x^2\frac{df}{dx}\frac{dy_1}{dx}+xP\frac{df}{dx}y_1+xPf\frac{dy_1}{dx}+fQy_1\\
&\quad=f(x^2\frac{d^2y_1}{dx^2}+xP\frac{dy_1}{dx}+Qy_1)+x^2\frac{d^2f}{dx^2}y_1+2x^2\frac{df}{dx}\frac{dy_1}{dx}+xP\frac{df}{dx}y_1
\end{aligned}
$$

y_1 は (1) の解なので、第 1 項は消えて

$$x^2(\frac{d^2f}{dx^2}y_1+2\frac{df}{dx}\frac{dy_1}{dx})+xP\frac{df}{dx}y_1=0$$

$f'=df/dx$ として

$$
\begin{aligned}
\frac{df'}{dx}y_1+f'(2\frac{dy_1}{dx}+\frac{P}{x}y_1)=0&\\
\frac{1}{f'}\frac{df'}{dx}=&\ -(2\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{P}{x})\\
\int\frac{df'}{f'}=&\ -\int dx(2\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{P}{x})\\
\log f'=&\ -2\int dx\frac{dy_1}{dx}\frac{1}{y_1}-\int dx\frac{P(x)}{x}\\
=&\ -2\log y_1-\int dx\frac{P(x)}{x}\\
f'(x)=&\ \lambda\exp[\log y_1^{-2}-\int dx\frac{P(x)}{x}]\\
=&\ \beta y_1^{-2}\exp[-\int dx\frac{P(x)}{x}]
\end{aligned}
$$

β は積分定数です。$P(x)$ は $x=0$ でのべき級数で書けるとしているので

$$\frac{P(x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{a_0}{x}+a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots$$

これを積分すれば

$$\int dx\frac{P(x)}{x}=a_0\log x+a_1x+\frac{1}{2}a_2x^2+\frac{1}{3}a_3x^3+\cdots=a_0\log x+A(x)$$

積分定数も $A(x)$ にいれてます。よって

$$\exp[-\int dx\frac{P(x)}{x}] = \exp[\log x^{-a_0} - A(x)] = x^{-a_0}e^{-A(x)} \tag{8}$$

と書けます。

y_1 はフロベニウス級数から

$$y_1 = x^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$y_1^{-2} = x^{-2t_1}(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n)^{-2} = x^{-2t_1}g(x)$$

c_nx^n のべき級数は $x=0$ で c_0 になるので、$g(x)$ は $x=0$ で解析的です。このため、$g(x)$ も $x=0$ でのべき級数 (テイラー展開) で書けるので

$$(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n)^{-2} = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}g_nx^n$$

として

$$y_1^{-2} = x^{-2t_1}\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^n$$

これと (8) から

$$f'(x) = \beta y_1^{-2}\exp[-\int dx\frac{P(x)}{x}] = \beta x^{-2t_1}x^{-a_0}\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^ne^{-A(x)}$$

さらに e^{-A} もべき級数にして

$$f'(x) = \beta x^{-2t_1-a_0}\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^n\sum_{m=0}^{\infty}A_nx^n = \beta x^{-(2t_1+a_0)}\sum_{n=0}^{\infty}B_nx^n \tag{9}$$

とします。

$2t_1+a_0$ は書き換えられます。今は t の解は t_1, t_2 で $t_2 = t_1 - N$ (N は正の整数) とするので、決定方程式は

$$0 = (t-t_1)(t-t_2) = (t-t_1)(t-t_1+N) = t^2 - (2t_1-N)t + t_1(t_1-N)$$

と書けます。これともとの決定方程式

$$t^2 + (a_0 - 1)t + b_0 = 0$$

を比較すれば

$$1 - a_0 = 2t_1 - N$$

$$2t_1 + a_0 = N + 1$$

よって、$f'(x)$ は

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \beta x^{-(N+1)} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \\
&= \beta x^{-(N+1)} (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_{N-1} x^{N-1} + B_N x^N + B_{N+1} x^{N+1} + B_{N+2} x^{N+2} \cdots) \\
&= \beta (B_0 x^{-(N+1)} + B_1 x^{-N} + B_2 x^{-N+1} + \cdots + B_{N-1} x^{-2} + B_N x^{-1} + B_{N+1} + B_{N+2} x + \cdots) \\
f(x) &= \beta \int dx (B_0 x^{-(N+1)} + B_1 x^{-N} + B_2 x^{-N+1} + \cdots + B_{N-1} x^{-2} + B_N x^{-1} + B_{N+1} + B_{N+2} x + \cdots) \\
&= \beta (-\frac{B_0}{N} x^{-N} + \frac{B_1}{-N+1} x^{-N+1} + \frac{B_2}{-N+2} x^{-N+2} + \cdots + \frac{B_{N-1}}{-1} x^{-1} + B_N \log x + \lambda + B_{N+1} x + \frac{1}{2} B_{N+2} x^2 + \cdots) \\
&= \beta B_N \log x \\
&\quad + \beta x^{-N} (-\frac{B_0}{N} + \frac{B_1}{-N+1} x + \frac{B_2}{-N+2} x^2 + \cdots + \frac{B_{N-1}}{-1} x^{N-1} + \lambda x^N + B_{N+1} x^{N+1} + \frac{1}{2} B_{N+2} x^{N+2} + \cdots)
\end{aligned}$$

λ は積分定数です。βB_N を D_N、第 2 項にいる係数を D_n とし

$$f(x) = D_N \log x + x^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$$

というわけで、$t_1 - t_2 = N$ のときの y_2 は

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= f(x) y_1(x) \\
&= D_N y_1 \log x + x^{-N} y_1 \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n \\
&= D_N y_1 \log x + x^{-N} x^{t_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n \\
&= D_N y_1 \log x + x^{t_1 - N} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \\
&= D_N y_1 \log x + x^{t_2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n
\end{aligned}$$

また、y_2 がフロベニウス級数で書けないとして求めましたが、$D_N=0$ なら y_2 もフロベニウス級数になります。

$t_1=t_2$ の場合でも 1 つのフロベニウス級数しか出てこないです。なので、一般解を作るにはもう 1 つの解を求める必要がありますが、今の階数低減法の手順そのままで求められます。$f(x)$ の変形をしている (9) までは同じで、違うのは決定方程式が $t_1=t_2=\tau$ による

$$0=(t-\tau)^2=t^2-2\tau t+t_1^2$$

となることだけです。これによって

$$2\tau+a_0=1$$

となるので

$$y_2(x)=D_0y_1\log x+x^{t_2}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \tag{10}$$

と求まります。

$t_1=t_2$ の場合を別の方法で求めてみます。求め方を作るために、まずコーシー・オイラー方程式を使ってみます。コーシー・オイラー方程式は

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0$$

a,b は定数です。解を x^t と仮定したとき決定方程式は

$$t^2+(a-1)t+b=0\ \Rightarrow\ t=\frac{-(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$$

t が $t=\tau$ となるなら、1 つの解 x^τ が求まります。「級数解」ではもう 1 つの解を階数低減法をで求めましたが、別の方法を使います。

今は x^t が解であることから、$y(x,t)$ として t にも依存させて、コーシー・オイラー方程式を t で偏微分すれば

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+ax\frac{d}{dx}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+b\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=0$$

$y(x,t)=x^t$ とし、x^t の微分は $\log x^t=A(t)$ とおけば

$$\frac{d}{dt}x^t=\frac{d}{dt}e^A=\frac{dA}{dt}e^A=x^t\log x=Y(x,t)$$

一方で、決定方程式

$$F(t) = t^2 + (a-1)t + b$$

を使うと

$$x^2\frac{d^2x^t}{dx^2} + ax\frac{dx^t}{dx} + bx^t = (t^2 + (a-1)t + b)x^t = F(t)x^t$$

なので

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}Y(x,t) + ax\frac{d}{dx}Y(x,t) + bY(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(F(t)x^t)$$

決定方程式からは $t=\tau$ が出てくるとしているので

$$F(t) = (t-\tau)^2$$

として

$$\frac{\partial}{\partial t}((t-\tau)^2x^t) = 2(t-\tau)x^t + (t-\tau)^2x^t\log x$$

これは $t=\tau$ で消えるので

$$\begin{aligned}x^2\frac{d^2}{dx^2}Y(x,\tau) + ax\frac{d}{dx}Y(x,\tau) + bY(x,\tau) &= \frac{\partial}{\partial t}(F(t)x^t)|_{t=\tau}\\ &= 0\end{aligned}$$

これはコーシー・オイラー方程式そのものなので、$Y(x,\tau) = x^\tau\log|x|$ はコーシー・オイラー方程式のもう 1 つの解となります。

同じようにして求めます。1 つの解 y_1 がフロベニウス級数によって

$$y_1(x) = x^\tau\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

と求められているとします。これを (1) に入れれば、(3) から

$$
\begin{aligned}
&x^2\frac{d^2y_1}{dx^2}+xP(x)\frac{dy_1}{dx}+Q(x)y_1\\
&\quad=\ \sum_{n=0}^{\infty}((t+n)(t+n-1)c_n+\sum_{k=0}^{n}((t+k)a_{n-k}+b_{n-k})c_k)x^{t+n}\\
&\quad=c_0(t(t-1)+(a_0t+b_0))x^t+\sum_{n=1}^{\infty}((t+n)(t+n-1)c_n+\sum_{k=0}^{n}((t+k)a_{n-k}+b_{n-k})c_k)x^{t+n}\\
&\quad=c_0F(t)x^t+\sum_{n=1}^{\infty}((t+n)(t+n-1)c_n+\sum_{k=0}^{n}((t+k)a_{n-k}+b_{n-k})c_k)x^{t+n}
\end{aligned}
$$

第 2 項が 0 になるように、t に対して $c_n(t)=c_n\ (n\geq 1)$ が求められているとして

$$
x^2\frac{d^2y_1(x,t)}{dx^2}+xP(x)\frac{dy_1(x,t)}{dx}+Q(x)y_1(x,t)=c_0F(t)x^t
$$

t で偏微分して

$$
x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial t}+xP(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial t}+Q(x)\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial t}=c_0\frac{\partial}{\partial t}(F(t)x^t)
$$

決定方程式が $t=\tau$ で 0 になっているとすることで

$$
x^2\frac{d^2}{dx^2}Y(x,\tau)+xP(x)\frac{d}{dx}Y(x,\tau)+Q(x)Y(x,\tau)=0
$$

コーシー・オイラー方程式と同ように (1) そのものになったので、もう 1 つの解 y_2 は

$$
\begin{aligned}
y_2(x)=Y(x,\tau)=\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial t}|_{t=\tau}&=\frac{\partial}{\partial t}(x^t\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t)x^n)|_{t=\tau}\\
&=(x^\tau\log x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+x^\tau\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dc_n}{dt}|_{t=\tau}x^n\\
&=y_1(x)\log x+x^\tau\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dc_n}{dt}|_{t=\tau}x^n\\
&=y_1(x)\log x+x^\tau\sum_{n=0}^{\infty}C_n(\tau)x^n
\end{aligned}
$$

と求まります。c_0 は定数なので $n=1$ からにしても同じです。$Y(x,\tau)$ の定数倍も解なので D_0 をくっつければ (10) と同じ形になります。ちなみに、t_1-t_2 が正の整数のときも同じように t の偏微分を利用して求められますが、今の話より複雑になります。

まとめると、2 つの解は

- $t_1 - t_2\ (t_1 > t_2)$ が正の整数でない場合

$$y_1(x) = x^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1)x^n\ ,\ y_2(x) = x^{t_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_2)x^n$$

- $t_1 - t_2\ (t_1 > t_2)$ が正の整数 N の場合

$$y_1(x) = x^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1)x^n\ ,\ y_2(x) = D_N y_1(x)\log x + x^{t_2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

- $t = \tau$ の場合

$$y_1(x) = x^{\tau}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau)x^n\ ,\ y_2(x) = y_1(x)\log x + x^{\tau}\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

D_N とそれぞれの $c_n, C_n\ (n \geq 1)$ は微分方程式から出てくる漸化式から求まる定数です。
$t_2 - t_1$ が整数になる具体例を見ておきます。微分方程式は

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x(\alpha - \beta x)\frac{dy}{dx} + (a - bx)y = 0 \tag{11}$$

α, β, a, b は定数で、後で

$$\alpha = 0\ ,\ a = -2\ ,\ \beta = 1\ ,\ b = 3$$

とします。フロベニウス級数を使うと

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)(t+n-1)x^{t+n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)(t+n-1)x^{t+n}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = x^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)x^{t+n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)x^{t+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}(t+n-1)x^{t+n}$$

$$x\frac{dy}{dx} = x\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)x^{t+n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)x^{t+n}$$

$$xy = x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{t+n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{t+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^{t+n}$$

なので

$$\begin{aligned}x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x(\alpha-\beta x)\frac{dy}{dx}+(a-bx)y=&\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t+n)(t+n-1)x^{t+n}\\&+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t+n)x^{t+n}-\beta\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}(t+n-1)x^{t+n}\\&+a\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{t+n}-b\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{t+n}\end{aligned}$$

決定方程式を取り出すために、x^t の項を分離させると

$$\begin{aligned}&t(t-1)c_0x^t+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t+n)(t+n-1)x^{t+n}+\alpha tc_0x^t+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t+n)x^{t+n}\\&-\beta\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}(t+n-1)x^{t+n}+ac_0x^t+a\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^{t+n}-b\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{t+n}\end{aligned}$$

そうすると、c_0 の項から決定方程式は

$$t(t-1)+\alpha t+a=t^2+(\alpha-1)t+a=0$$

t_1-t_2 が正の整数になる場合を見たいので、$\alpha=0,a=-2$ として

$$t^2-t-2=(t-2)(t+1)=0$$

これから、$t=2,-1$ になり、差が正の整数になります。
　残っている $n\geq 1$ の項は $\alpha=0,a=-2$ として

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t+n)(t+n-1)x^{t+n}-\beta\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}(t+n-1)x^{t+n}-2\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^{t+n}-b\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{t+n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}((t+n)(t+n-1)c_n-2c_n-\beta(t+n-1)c_{n-1}-bc_{n-1})x^{t+n}\end{aligned}$$

これが $x^{t+n}\neq 0$ として 0 になればいいので

$$(t+n-2)(t+n+1)c_n-(\beta(t+n-1)+b)c_{n-1}=0$$

$$c_n=\frac{\beta(t+n-1)+b}{(t+n-2)(t+n+1)}c_{n-1}\tag{12}$$

$t=2$ のときは

$$c_n = \frac{\beta(n+1)+b}{n(n+3)}c_{n-1}$$

これは

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{4}(2\beta+b)c_0 \\
c_2 &= \frac{3\beta+b}{2\times 5}c_1 = \frac{3\beta+b}{2\times 5}\frac{2\beta+b}{4}c_0 = \frac{1}{4}\frac{1}{2!}(3\beta+b)\frac{2\beta+b}{5}c_0 \\
c_3 &= \frac{4\beta+b}{3\times 6}c_2 = \frac{1}{4}\frac{1}{3!}(4\beta+b)\frac{3\beta+b}{6}\frac{2\beta+b}{5}c_0 \\
c_4 &= \frac{5\beta+b}{4\times 7}c_3 = \frac{1}{4}\frac{1}{4!}(5\beta+b)\frac{4\beta+b}{7}\frac{3\beta+b}{6}\frac{2\beta+b}{5}c_0
\end{aligned}$$

と続いていきます。結果を分かりやすくするために、$\beta = 1, b = 3$ とすれば

$$c_1 = \frac{5}{4}c_0\ ,\ c_2 = \frac{6}{4}\frac{1}{2!}c_0\ ,\ c_3 = \frac{7}{4}\frac{1}{3!}c_0\ ,\ c_4 = \frac{8}{4}\frac{1}{4!}c_0$$

となるので

$$c_n = \frac{n+4}{4}\frac{1}{n!}c_0$$

よって、微分方程式が

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} - (2+3x)y = 0 \tag{13}$$

となっているときの $t = 2$ の解は

$$\begin{aligned}
y_1(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n &= \frac{c_0}{4}x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{n!}x^n \\
&= \frac{c_0}{4}x^2(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n) \\
&= \frac{c_0}{4}x^2(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n + 4e^x) \\
&= \frac{c_0}{4}x^2(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1} + 4e^x) \\
&= \frac{c_0}{4}x^2(x+4)e^x
\end{aligned}$$

と求まります。
　$t=-1$ の解を求めます。このときの漸化式は (12) から

$$c_n = \frac{(-1+n-1)+3}{(-1+n-2)(-1+n+1)}c_{n-1} = \frac{n+1}{(n-3)n}c_{n-1}$$

これは

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{-2}c_0 = -c_0 \\ c_2 &= \frac{3}{-2}c_1 = \frac{3}{2}c_0 \\ c_3 &= \frac{4}{(3-3)3}c_2 = \frac{4}{(3-3)3}\frac{3}{2}c_0 \end{aligned}$$

となって、c_3 で成立しなくなります。このように、t_1-t_2 が整数のときはもう 1 つの解が求まらないのが確認できます。というわけで、もう 1 つの解 y_2 を

$$y_2(x) = Dy_1\log x + x^{t_2}\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n$$

として、D, C_n を求めます。これの微分は

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= D\log x\frac{dy_1}{dx} + D\frac{y_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty}(t_2+n)C_n x^{t_2+n-1} \\ \frac{d^2y_2}{dx^2} &= D\log x\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2D\frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx} - D\frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty}(t_2+n)(t_2+n-1)C_n x^{t_2+n-2} \end{aligned}$$

これらを (13) に入れて

$$
\begin{aligned}
x^2\frac{d^2y_2}{dx^2}-x^2\frac{dy_2}{dx}-(2+3x)y_2 &= Dx^2\log x\frac{d^2y_1}{dx^2}+2Dx\frac{dy_1}{dx}-Dy_1+\sum_{n=0}^{\infty}(t_2+n)(t_2+n-1)C_nx^{t_2+n}\\
&\quad-(Dx^2\log x\frac{dy_1}{dx}+Dxy_1+\sum_{n=0}^{\infty}(t_2+n)C_nx^{t_2+n+1})\\
&\quad-(2+3x)(Dy_1\log x+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{t_2+n})\\
&=D(x^2\frac{d^2y_1}{dx^2}-x^2\frac{dy_1}{dx}-(2+3x)y_1)\log x+2Dx\frac{dy_1}{dx}-Dy_1-Dxy_1\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}(t_2+n)(t_2+n-1)C_nx^{t_2+n}-\sum_{n=0}^{\infty}(t_2+n)C_nx^{t_2+n+1}\\
&\quad-2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{t_2+n}-3\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{t_2+n+1}
\end{aligned}
$$

y_1 は (13) の解なので、第 1 項は消えます。級数は $t_2=-1$ として

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(t_2+n)(t_2+n-1)C_nx^{t_2+n}=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)C_nx^n\\
&-\sum_{n=0}^{\infty}(t_2+n)C_nx^{t_2+n+1}=-x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)C_nx^{n+1}=-x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)C_{n-1}x^n\\
&-2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{t_2+n}=-2x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\\
&-3\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{t_2+n+1}=-3x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}=-3x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}x^n
\end{aligned}
$$

1 番目と 3 番目の $n=0$ を分離させてこれらを足すと

$$
\begin{aligned}
&2x^{-1}C_0+x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n-2)C_nx^n-x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)C_{n-1}x^n\\
&\quad-2x^{-1}C_0-2x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n-3x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}x^n\\
&=x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)(n-2)C_n-(n-2)C_{n-1}-2C_n-3C_{n-1})x^n\\
&=x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n(n-3)C_n-(n+1)C_{n-1})x^n
\end{aligned}
$$

よって、(13) は

$$D\big(2x\frac{dy_1}{dx}-(1+x)y_1\big)+x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\big(n(n-3)C_n-(n+1)C_{n-1}\big)x^n=0$$

y_1 は指数関数で書けますが、第 2 項の級数に合わせるために

$$y_1(x)=\frac{c_0}{4}x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{n!}x^n=\frac{c_0}{4}x^2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+1}{(n-3)!}x^{n-3}=\frac{c_0}{4}x^{-1}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+1}{(n-3)!}x^n$$

とします。y_2 の解を求めるのに y_1 の任意定数を任意のままにしておく必要はないので、$c_0/4=1$ にしてしまいます。微分すれば

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+4)(n+2)}{n!}x^{n+1}\\2x\frac{dy_1}{dx}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+4)(n+2)}{n!}x^{n+2}\\&=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(n+1)(n-1)}{(n-3)!}x^{n-1}\\&=x^{-1}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(n+1)(n-1)}{(n-3)!}x^n\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}&2x\frac{dy_1}{dx}-(1+x)y_1\\&=x^{-1}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(n+1)(n-1)}{(n-3)!}x^n-x^{-1}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+1}{(n-3)!}x^n-x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{n!}x^n\\&=x^{-1}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(n+1)(n-1)}{(n-3)!}x^n-x^{-1}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+1}{(n-3)!}x^n-x^{-1}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{(n-4)!}x^n\\&=12x^2+x^{-1}\sum_{n=4}^{\infty}(\frac{2(n+1)(n-1)}{(n-3)!}-\frac{n+1}{(n-3)!}-\frac{n}{(n-4)!})x^n\end{aligned}$$

第 2 項は

$$\begin{aligned}\frac{2(n+1)(n-1)}{(n-3)!}-\frac{n+1}{(n-3)!}-\frac{n}{(n-4)!}&=\frac{2n^2-n-3}{(n-3)!}-\frac{n}{(n-4)!}\frac{n-3}{n-3}\\&=\frac{2n^2-n-3-n^2+3n}{(n-3)!}\\&=\frac{(n+3)(n-1)}{(n-3)!}\end{aligned}$$

となるので

$$12Dx^2 + Dx^{-1}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(n+3)(n-1)}{(n-3)!}x^n + x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n(n-3)C_n - (n+1)C_{n-1})x^n = 0 \tag{14}$$

第 3 項は

$$\begin{aligned}
&x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n(n-3)C_n - (n+1)C_{n-1})x^n \\
&\quad = x^{-1}(-2C_1 - 2C_0)x + x^{-1}(-2C_2 - 3C_1)x^2 + x^{-1}(-4C_2)x^3 + x^{-1}(3(3-3)C_3 - 4C_2)x^4 + \cdots \\
&\quad = (-2C_1 - 2C_0) + (-2C_2 - 3C_1)x - 4C_2x^2 + (3(3-3)C_3 - 4C_2)x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

なので、x^0 と x^1 の項から

$$\begin{aligned}
C_1 &= -C_0 \\
C_2 &= -\frac{3}{2}C_1 = \frac{3}{2}C_0
\end{aligned}$$

x^2 の項は (14) の第 1 項と合わせて

$$\begin{aligned}
12D - 4C_2 &= 0 \\
C_2 &= 3D \\
\frac{3}{2}C_0 &= 3D \\
D &= \frac{C_0}{2}
\end{aligned}$$

これで D が求まりました。

x^3 の項は

$$12D + 3(3-3)C_3 - 4C_2 = 0$$

なので

$$0 \times C_3 = 4C_2 - 12D = 12D - 12D = 0$$

このため、C_3 は任意です。

x^4 以降は

$$x^{-1}\sum_{n=4}^{\infty}(D\frac{(n+3)(n-1)}{(n-3)!} + n(n-3)C_n - (n+1)C_{n-1})x^n = 0$$

なので

$$D\frac{(n+3)(n-1)}{(n-3)!}+n(n-3)C_n-(n+1)C_{n-1}=0$$

$$C_n=\frac{n+1}{n(n-3)}C_{n-1}-D\frac{(n+3)(n-1)}{n(n-3)}\frac{1}{(n-3)!}\quad(n\geq 4)$$

$C_3=0$ と選べば

$$C_4=\frac{5}{4}C_3-\frac{21}{4}D=-\frac{21}{4}D=-\frac{21}{4}\frac{C_0}{2}$$

となり、C_5 以降が求まっていきます。

というわけで、y_2 は

$$\begin{aligned}y_2(x)&=Dy_1(x)\log x+x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\\&=\frac{C_0}{2}y_1(x)\log x+x^{-1}(C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+\cdots)\\&=\frac{C_0}{2}y_1(x)\log x+\frac{C_0}{2}x^{-1}(2-2x+3x^2-\frac{21}{4}x^4+\cdots)\end{aligned}$$

よって、y_1 での $c_0/4$ を A_1、$C_0/2$ を A_2 とすれば、一般解は

$$\begin{aligned}y(x)&=A_1y_1(x)+A_2y_2(x)\\&=A_1x^2(x+4)e^x+A_2(x^2(x+4)e^x\log x+x^{-1}(2-2x+3x^2-\frac{21}{4}x^4+\cdots))\end{aligned}$$

となります。