

## 級数解

べき級数を仮定して微分方程式の解を求める方法を見ていきます。

物理では特殊関数を扱うときくらいでしか出てこないの、知らなくてもあまり困らないです。

必要になるべき級数 (power series) の話をしておきます。べき級数は、一般的に  $x$  を変数とし

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

と与えられる級数のことです。  $x_0$  は級数の中心 (center) と呼ばれ、  $c_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) は定数です。  $x_0$  周りのべき級数と言ったりします。べき級数は大抵は  $n \geq 0$  ですが、  $x^{-1}, x^{-2}, \dots$  を含めた場合もべき級数と言っていることがあります。

べき級数の収束について簡単にまとめます。絶対値を取った場合は

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x - x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |x - x_0|^n$$

これが収束していれば、級数は絶対収束すると言われます。絶対収束ならもとの級数は収束します。絶対収束しているかは ratio test で判別でき、絶対収束しているなら

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{c_n x^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$$

このことから、極限部分を  $L$  とすれば

$$|x - x_0| < \frac{1}{L} = R$$

と書けます。  $R$  を収束半径 (radius of convergence) と言います。収束半径を使うと、ratio test から

- $|x - x_0| < R$  なら絶対収束
- $|x - x_0| > R$  なら発散
- $|x - x_0| = 1$  なら判別できない
- $R = 0$  なら  $x = x_0$  のみで収束
- $R = \infty$  なら絶対収束

となります。

後で出てくるので、べき級数の積を求めておきます。2つの収束するべき級数が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

と与えられているとき

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n a_{n-l} b_l x^n$$

となることを示します。まず、べき級数は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

となっているので、 $a_n$  は微分によって

$$f(x)|_{x=0} = a_0$$

$$\frac{d}{dx} f(x)|_{x=0} = a_1$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x)|_{x=0} = 2a_2 = 2!a_2$$

$$\frac{d^3}{dx^3} f(x)|_{x=0} = (3 \times 2)a_3 = 3!a_3$$

よって

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x)|_{x=0} = a_n$$

と書けます。 $f(x)g(x)$  では

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x))|_{x=0} = c_n$$

微分はライプニッツ則から

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}}$$

なので

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}} \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} \frac{1}{(n-k)!} \frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}} \Big|_{x=0}$$

同様に

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big|_{x=0}, \quad b_{n-k} = \frac{1}{(n-k)!} \frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}} \Big|_{x=0} \quad (1)$$

なので

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^n a_{n-l} b_l \quad (l = n - k)$$

よって

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n a_{n-l} b_l x^n \quad (2)$$

となります。ちなみに、これは

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_k x^k b_m x^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_k b_m x^{k+m}$$

として、 $n = k + m = 0, 1, 2, \dots$  としたとき、 $m$  に対して  $k = n - m$  は  $0$  から  $n$  までを取ることから

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n$$

となるとも言えます。

関数  $f(x)$  の  $x_0$  でのべき級数が収束しているとして、(1) を使うと

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^n$$

これを  $x_0$  周りのテイラー級数 (Taylor series) やテイラー展開と言います。このように書けるとき  $f(x)$  は  $x = x_0$  で解析的 (analytic) と言い、 $x$  がある範囲で与えられており、その範囲内で  $f(x)$  が解析的であるとき  $f(x)$  は解析関数 (analytic function) と呼ばれます。

ここから、同次での 2 階微分方程式の解をべき級数から求める方法を見ていきます。同次の 2 階微分方程式の一般的な形は

$$p_2(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + p_0(x) y(x) = 0$$

$x$  は実数とします。これを  $p_2(x) \neq 0$  として

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y(x) = 0 \quad (p(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}, q(x) = \frac{q_0(x)}{p_2(x)}) \quad (3)$$

このときの  $p(x)$  と  $q(x)$  が  $x = x_0$  で解析的なら、 $x_0$  は通常点 (ordinary point) と呼ばれます。通常点でなければ特異点 (singular point) と呼ばれます。例えば

$$p(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, q(x) = x \Rightarrow x = \pm 2 \text{ は特異点、他は通常点}$$

$$p(x) = \frac{1}{x - 3}, q(x) = \frac{1}{x + 6} \Rightarrow x = 3, -6 \text{ は特異点、他は通常点}$$

$$p(x) = e^x, q(x) = 0 \Rightarrow x \neq \infty \text{ は通常点}$$

特異点はさらに分類されますが、その話は後に回します。

$p(x), q(x)$  が  $x_0$  で解析的なら、通常点  $x_0$  でのべき級数で書けるので

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

$a_n, b_n$  は定数です。ここで、 $y(x)$  も  $x_0$  で解析的として、べき級数で書けると仮定することで

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \quad (4a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d}{dx}(x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x - x_0)^n \quad (4b)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} \frac{d}{dx}(x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) c_{n+1} (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} (x - x_0)^n \quad (4c)$$

$c_n$  は定数です。微分は

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \dots) \\ &= c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

となっています。これらによって

$$p(x)\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (k+1) a_{n-k} c_{k+1} (x - x_0)^n \quad (5a)$$

$$q(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_{n-k} c_k (x - x_0)^n \quad (5b)$$

(2) を使っています。(4c),(5a),(5b) を (3) に入れると

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{n-k}c_{k+1} + \sum_{k=0}^n b_{n-k}c_k)(x-x_0)^n = 0$$

$x = x_0$  ではべき級数にした意味がないので、 $x \neq x_0$  とします。このとき、 $(x-x_0)^n$  の各項の係数が 0 にならないといけなないので

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{n-k}c_{k+1} + \sum_{k=0}^n b_{n-k}c_k = 0$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} = - \sum_{k=0}^n ((k+1)a_{n-k}c_{k+1} + b_{n-k}c_k)$$

$$c_{n+2} = - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n ((k+1)a_{n-k}c_{k+1} + b_{n-k}c_k)$$

これは  $c_n$  の漸化式です。 $n = 0$  のとき  $k = 0$  なので

$$c_2 = -\frac{1}{2}(a_0c_1 + b_0c_0)$$

$n = 1$  では

$$c_3 = -\frac{1}{6}(a_1c_1 + b_1c_0 + 2a_0c_2 + b_0c_1)$$

と続いているので、 $c_0, c_1$  を与えれば、それ以降の  $c_n$  が求まるようになっています。よって、 $p(x), q(x)$  が  $x_0$  で解析的なら、べき級数による解  $y(x) = \sum c_n(x-x_0)^n$  が存在します。

このように級数で表される解を級数解 (series solution)、もしくはべき級数解 (power series solution) と言います。また、 $x_0$  は定数なので、 $x' = x - x_0$  と置き換えれば、中心が 0 でのべき級数の形にできるので、ここからは  $x_0 = 0$  としていきます。

級数解での  $c_n$  は  $c_0, c_1$  によって決まっていき、 $c_0, c_1$  は初期条件から決められます。このため、 $c_0, c_1$  を任意定数として、一般解をべき級数による  $f(x), g(x)$  によって

$$y(x) = c_0f(x) + c_1g(x)$$

とした形で書けます。

ちなみに、物理 (電磁気学や量子力学あたり) で級数解を使うのは主にエルミート方程式やルジャンドル方程式のような特殊関数が出てくる時です。なので、特殊関数というごちゃごちゃした式の話をするときに、漸化式から求める面倒な計算が唐突に出てくるという嫌がらせに出会います。

具体例をいくつか示します。1 階微分方程式でも使えるので、その例から見ていきます。簡単な微分方程式として

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

すぐに分かるように、この解は  $e^x$  です。これをべき級数を使って求めます。係数は定数なので、任意の  $x$  で通常点です。なので、 $y(x)$  を  $x_0 = 0$  でのべき級数に仮定して、(4a) と (4b) から

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

左辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} - c_n)x^n = 0$$

なので、 $x^n \neq 0$  として

$$(n+1)c_{n+1} - c_n = 0$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}c_n$$

これから

$$c_1 = c_0$$

$$c_2 = \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}c_0$$

$$c_3 = \frac{1}{3}c_2 = \frac{1}{3 \times 2}c_0 = \frac{1}{3!}c_0$$

$$c_4 = \frac{1}{4}c_3 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2}c_0 = \frac{1}{4!}c_0$$

と続いているので

$$c_n = \frac{1}{n!}c_0$$

と分かります。よって

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = c_0 \left( 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \right) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = c_0 e^x$$

となり、一般解が求まります。

もう1つ1階微分方程式の例を出しておきます。今度は

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

この解は  $e^{x^2}$  です。  $x = 0$  で通常点なので、左辺を0でのべき級数として、(4a),(4b) から

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - 2(c_0x + c_1x^2 + c_2x^3 + \dots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n \\ &= c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n \\ &= c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} - 2c_{n-1})x^n \end{aligned}$$

これが0になればいいので、  $c_1 = 0$ ,  $x^n \neq 0$  として

$$\begin{aligned} (n+1)c_{n+1} - 2c_{n-1} &= 0 \\ c_{n+1} &= \frac{2}{n+1}c_{n-1} \end{aligned}$$

$n = 1$  から始めると

$$\begin{aligned} c_2 &= c_0 \\ c_4 &= \frac{2}{4}c_2 = \frac{1}{2}c_0 \\ c_6 &= \frac{2}{6}c_4 = \frac{1}{3 \times 2}c_0 = \frac{1}{3!}c_0 \\ c_8 &= \frac{2}{8}c_6 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2}c_0 = \frac{1}{4!}c_0 \end{aligned}$$

として偶数の  $c_n$  で続いていくので

$$c_{2k} = \frac{1}{k!}c_0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$n = 2$  から始めると  $c_1 = 0$  のために、 $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$  です。よって

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^2)^k = c_0 e^{x^2}$$

となります。

2階微分方程式の例に移ります。単純な例として

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

これは三角関数が解です。(3)に対応させると  $p(x) = 0, q(x) = 1$  なので、任意の  $x$  で通常点です。なので、0でのべき級数として、(4a),(4c) から

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$x^n \neq 0$  の解がほしいので

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n)x^n = 0$$

から

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}c_n$$

$c_{n+2}$  と  $c_n$  の式なので、 $c_0$  から始めると偶数、 $c_1$  から始めると奇数の場合が求まります。 $c_0$  からでは

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_0$$

$$c_4 = -\frac{1}{4 \times 3}c_2 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2}c_0 = \frac{1}{4!}c_0$$

$$c_6 = -\frac{1}{6 \times 5}c_4 = -\frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}c_0 = -\frac{1}{6!}c_0$$

となっているので

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}c_0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$



$c_1$  からでも同様に

$$c_3 = -\frac{1}{3 \times 2} c_1 = -\frac{1}{3!} c_1$$

$$c_5 = -\frac{1}{5 \times 4} c_3 = \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 2} c_1 = \frac{1}{5!} c_1$$

と続くので

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

よって

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots) + (c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots) \\ &= c_0 + c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 x + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

この級数は

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

になっているので

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

$c_0, c_1$  は任意に決められ ( $c_0, c_1$  に何も条件が与えられていない)  $\cos$  と  $\sin$  は線形独立なので、これは一般解です。  
もう少し複雑にした例として

$$(1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0$$

これは

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{ax}{1+x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{b}{1+x^2} y = 0$$

なので、 $x$  を実数に制限すれば全て通常点です。 $x_0 = 0$  でのべき級数として、(4a),(4b),(4c) から

$$(1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + ax \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n + b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (6)$$

第1項は

$$\begin{aligned} (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nc_n x^n \end{aligned}$$

これの第2項は  $n = 0, 1$  のとき0になるので

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nc_n x^n = (0-1) \times 0 \times x^0 + (1-1) \times 1 \times x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)nc_n x^n$$

(6) の第2項は

$$ax \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n = a \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^{n+1} = a \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = a \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n$$

これも  $n = 0$  のとき0になるので、最後に  $n = 0$  からにしています。まとめると、(6) の左辺は

$$\begin{aligned} (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + ax \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n + b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)c_{n+2} + (n-1)nc_n + anc_n + bc_n)x^n \end{aligned}$$

これが  $x^n \neq 0$  で0になればいいので

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)c_{n+2} + ((n-1)n + an + b)c_n &= 0 \\ c_{n+2} &= -\frac{n^2 + (a-1)n + b}{(n+1)(n+2)}c_n \end{aligned}$$

分母が  $n^2 + 3n + 2$  なので、 $a = 4, b = 2$  の場合では

$$c_{n+2} = -c_n$$

となります。この場合を求めることにして

$$c_2 = -c_0$$

$$c_4 = -c_2 = c_0$$

$$c_6 = -c_4 = -c_0$$

これから、 $c_{2m} = (-1)^m c_0$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) となります。 $c_1$  からでも同様に

$$c_3 = -c_1$$

$$c_5 = -c_3 = c_1$$

$$c_7 = -c_5 = -c_1$$

となるので、 $c_{2m+1} = (-1)^m c_1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) となります。よって

$$\begin{aligned} y(x) &= (c_0 + c_2 x^2 + \dots) + (c_1 x + c_3 x^3 + \dots) \\ &= c_0 + c_0 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{2m} + c_1 x + c_1 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{2m+1} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \\ &= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \end{aligned}$$

これが一般解となります。 $x^{2n}$  と  $x^{2n+1}$  のために  $y_1, y_2$  は線形独立です。各級数は ratio test から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} x \right| = |x|$$

なので、どちらも  $|x| < 1$  で収束します (収束半径が 1)。実際に、級数は幾何級数になっているので、 $|x| < 1$  のとき

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \\ y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

となります。

最後に、フロベニウスの方法 (method of Frobenius) について少し触れておきます。ここまでは通常点周りでのべき級数を使うことで解が求められていましたが、特異点周りではべき級数を使うと解が求まりません。しかし、特異点付近の解が必要になることが多くあり、そのための手段を簡単に見ておきます。

特異点には分類があり、 $x_0$  で  $p(x), q(x)$  は解析的でなく、 $(x - x_0)p(x), (x - x_0)^2q(x)$  なら  $x_0$  で解析的であるとき、 $x_0$  は確定特異点 (regular singular point) と呼ばれます。確定特異点でなければ不確定特異点 (irregular singular point) と呼ばれます。例えば、 $p(x) = x^{-1}, q(x) = 0$  なら、 $p(x)$  は  $x = 0$  で解析的ではないですが

$$(x - 0)\frac{1}{x} = 1 \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{x} = 1\right)$$

となるので、 $0$  は確定特異点です。確定特異点の場合、微分方程式は

$$(x - x_0)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x - x_0)P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

$$P(x) = (x - x_0)p(x), \quad Q(x) = (x - x_0)^2q(x)$$

とすることで、 $x_0$  で解析的な  $P(x), Q(x)$  で書けます。このような確定特異点での級数解を求めるのがフロベニウスの方法です。

まず、コーシー・オイラー方程式から見ていきます。コーシー・オイラー方程式は

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (y > 0)$$

という形の微分方程式です。 $a, b$  は定数です。 $x^2$  でわれば

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{b}{x^2} y = 0$$

となるので、 $x = 0$  で確定特異点です。これは解けますが、先にべき級数を仮定して求めてみます。 $x_0 = 0$  でのべき級数を使うと、(4b),(4c) から

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dx} &= x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n \\ x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n \end{aligned}$$

どちらも最後は  $n = 0$  で  $0$  になるので、和を  $n = 0$  からにしています。これらを入れると

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + a \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

なので、 $x \neq 0$  なら

$$(n(n-1) + an + b)c_n = 0$$

このため  $c_n = 0$  となり、 $y = 0$  の解しか求まりません。

しかし、オイラー方程式は  $y = 0$  でない解を持ちます。オイラー方程式では、 $x^2$  には  $d^2/dx^2$ 、 $x$  には  $d/dx$  がくっついているので、解を  $x^t$  と仮定すれば

$$x^2 t(t-1)x^{t-2} + ax^t x^{t-1} + bx^t = (t(t-1) + at + b)x^t$$

よって

$$t^2 + (a-1)t + b = 0 \Rightarrow t = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$$

$t$  を決める式は決定方程式 (indicial equation) と呼ばれます。独立な 2 つの解は  $t = t_1, t_2$  とすれば、 $x^{t_1}, x^{t_2}$  となります。 $t_1 = t_2 = \tau = (1-a)/2$  のときは、階数低減法を使うなら、もう 1 つの解を  $f(x)x^\tau$  と仮定して

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(\tau x^{\tau-1} \frac{df}{dx} + x^\tau \frac{d^2 f}{dx^2}) + \tau(\tau-1)fx^{\tau-2} + \tau \frac{df}{dx} x^{\tau-1} + ax(x^\tau \frac{df}{dx} + \tau f x^{\tau-1}) + bfx^\tau \\ &= (\tau x^{\tau+1} \frac{df}{dx} + x^{\tau+2} \frac{d^2 f}{dx^2}) + \tau(\tau-1)fx^\tau + \tau \frac{df}{dx} x^{\tau+1} + a(x^{\tau+1} \frac{df}{dx} + \tau f x^\tau) + bfx^\tau \\ &= (\tau x \frac{df}{dx} + x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \tau(\tau-1)f + \tau \frac{df}{dx} x) + a(x \frac{df}{dx} + \tau f) + bf \\ &= x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + (2\tau + a)x \frac{df}{dx} + (\tau^2 + (a-1)\tau + b)f \\ &= x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + (2\tau + a)x \frac{df}{dx} \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= -\frac{1}{x} \frac{df}{dx} \end{aligned}$$

これから  $f(x) = \log x$  と分かるので、 $t_1 = t_2 = \tau$  のときの独立な 2 つの解は  $x^\tau, x^\tau \log x$  です。

このように、確定特異点の場合ではべき級数を仮定しても解が求められません。これを修正します。コーシー・オイラー方程式は、 $p(x), q(x)$  が定数で  $x = 0$  が確定特異点の微分方程式で、その解は  $x^t$  を含んで出てきます。そうすると

$$p(x) = \frac{a}{x}, \quad q(x) = \frac{b}{x^2}$$

のときでは解に  $x^t$  が現れるなら

$$P(x) = xp(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad Q(x) = x^2q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

のときでの解は、 $a_0, b_0$  が  $x^t$  に対応すると見て

$$y(x) = c_0x^t + c_1x^{t+1} + c_2x^{t+2} + \dots = x^t(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (7)$$

という形になっていると予想します。これはフロベニウス級数 (Frobenius series) と呼ばれます。  
 というわけで、確定特異点を持つ微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a+x}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{b}{x^2}y = 0 \quad (8)$$

で試してみます。  $a, b$  は定数です。フロベニウス級数によって

$$y(x) = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+t}$$

と仮定すれば、微分は

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= c_0 t x^{t-1} + c_1(t+1)x^t + c_2(t+2)x^{t+1} + \dots = x^{t-1}(c_0 t + c_1(t+1)x + c_2(t+2)x^2 + \dots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)x^{n+t-1} \end{aligned}$$

2回では

$$\begin{aligned} \frac{dy^2}{dx^2} &= c_0 t(t-1)x^{t-2} + c_1(t+1)t x^{t-1} + c_2(t+2)(t+1)x^t + \dots \\ &= x^{t-2}(c_0 t(t-1) + c_1(t+1)t x + c_2(t+2)(t+1)x^2 + \dots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t+n)(t+n-1)x^{n+t-2} \end{aligned}$$

これらを (8) に入れて

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a+x}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{b}{x^2}y &= x^{t-2}(c_0 t(t-1) + c_1(t+1)t x + c_2(t+2)(t+1)x^2 + \dots) \\ &\quad + \frac{a+x}{x} x^{t-1}(c_0 t + c_1(t+1)x + c_2(t+2)x^2 + \dots) \\ &\quad + \frac{b}{x^2} x^t (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \\ &= x^{t-2}(c_0 t(t-1) + c_1(t+1)t x + c_2(t+2)(t+1)x^2 + \dots) \\ &\quad + (a+x)x^{t-2}(c_0 t + c_1(t+1)x + c_2(t+2)x^2 + \dots) \\ &\quad + b x^{t-2}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \end{aligned}$$

$x^{t-2}$  を落として

$$\begin{aligned}0 &= c_0 t(t-1) + c_1(t+1)tx + c_2(t+2)(t+1)x^2 + \cdots \\ &\quad + a(c_0 t + c_1(t+1)x + c_2(t+2)x^2 + \cdots) \\ &\quad + x(c_0 t + c_1(t+1)x + c_2(t+2)x^2 + \cdots) \\ &\quad + b(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) \\ &= c_0 t(t-1) + ac_0 t + bc_0 \\ &\quad + (c_1(t+1)t + ac_1(t+1) + c_0 t) + bc_1 x \\ &\quad + (c_2(t+2)(t+1) + ac_2(t+2) + c_1(t+1) + bc_2)x^2 \\ &= c_0(t(t-1) + at + b) \\ &\quad + (c_1((t+1)t + a(t+1) + b) + c_0 t)x \\ &\quad + (c_2((t+2)(t+1) + a(t+2) + b) + c_1(t+1))x^2\end{aligned}$$

$x^n$  の各項で 0 になる必要があることと、 $c_0 \neq 0$  を要求することで、 $x^0$  の項から

$$t(t-1) + at + b = t^2 + (a-1)t + b = 0$$

として、決定方程式が現れます。 $t$  を具体的にするために、 $a = 1/2, b = -1/2$  とすれば

$$t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}$$

$t_1$  を使うと、 $x, x^2$  の項からは

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{t_1}{(t_1+1)t_1 + (t_1+1)/2 - 1/2}c_0 = -\frac{1}{2+1-1/2}c_0 = -\frac{2}{5}c_0 \\ c_2 &= -\frac{t_1+1}{(t_1+2)(t_1+1) + (t_1+2)/2 - 1/2}c_1 = -\frac{2}{6+3/2-1/2}\left(-\frac{2}{5}c_0\right) = \frac{4}{35}c_0\end{aligned}$$

$t_2$  では

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{t_2}{(t_2+1)t_2 + (t_2+1)/2 - 1/2}c_0 = -c_0 \\ c_2 &= -\frac{t_2+1}{(t_2+2)(t_2+1) + (t_2+2)/2 - 1/2}c_1 = -\frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}c_0\end{aligned}$$

$t_1, t_2$  がそれぞれ独立な解を与えるので

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+t_1} + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n x^{n+t_2} \\
&= x^{t_1}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) + x^{t_2}(c'_0 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \dots) \\
&= c_0 x(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 - \dots) + c'_0 x^{-1/2}(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \dots)
\end{aligned}$$

というわけで、確定特異点付近での級数解が求まったことになります。この求め方をフロベニウスの方法と呼んでいます。

簡単にまとめます。微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

において、 $x = 0$  で  $p(x), q(x)$  は解析的でないとし（ $x = 0$  は特異点）。このとき、 $P(x) = xp(x)$ ,  $Q(x) = x^2q(x)$  が  $x = 0$  で解析的であるなら  $x = 0$  は確定特異点と呼ばれ、 $P(x), Q(x)$  によって

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P(x)}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{Q(x)}{x^2} y = 0$$

と書かれる微分方程式は  $x = 0$  で確定特異点を持ちます（ $x - x_0$  では  $x' = x - x_0$  に置き換えられれば同じ）。この形の微分方程式の解を求めるために級数の形を

$$y(x) = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

と仮定するのがフロベニウスの方法です。実際は、 $t$  の解によって場合分けが必要になります。この話は「フロベニウスの方法」でします。