数列の極限と級数の例

数列の極限と級数の例を示しています。
数列は $\{a_k\}$ とし、k は自然数です。

- $\{\frac{(-1)^k}{k^2}\}$
  絶対値を見ると

$$|\frac{(-1)^k}{k^2}| = \frac{1}{|k^2|} = \frac{1}{k^2}$$

自然数 n と実数 ϵ に対して、$n > N(\epsilon)$ で

$$\frac{1}{n^2} < \epsilon$$

となる自然数 $N(\epsilon)$ は $N(\epsilon) = \epsilon^{-1/2}$ で与えられます。よって

$$|\frac{(-1)^n}{n^2} - 0| < \epsilon \quad (n > N(\epsilon))$$

となる $N(\epsilon)$ が存在するので、0 に収束します。

- $\{\frac{1}{k^l}\}$ (l は自然数)
  $l = 1$ では実数 ϵ より小さいとして、ある自然数 n で

$$|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

となるとします。自然数 $N(\epsilon)$ を $1/N(\epsilon) < \epsilon$ として、$n > N(\epsilon)$ となるなら

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} < \epsilon$$

よって、$n > N(\epsilon)$ で

$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$$

となる $N(\epsilon)$ が存在するので、$\{1/k\}$ は 0 に収束します。そして、収束する数列の積は極限の積になることから、$\{1/k^l\}$ は 0 に収束します。

ついでに、$l=3$ の場合も見ておきます。することは同じで、k^{-3} は実数 ϵ よりも小さいとして

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^3} &< \epsilon \\ k^3 &> \epsilon^{-1} \\ k &> \epsilon^{-1/3} \end{aligned}$$

よって、$n > N(\epsilon) = \epsilon^{-1/3}$ とすれば

$$|\frac{1}{n^3} - 0| < \epsilon$$

となるので、0 に収束します。

- $\{\dfrac{a^k}{k!}\}$ (a は $a>0$ の実数)
  m, n を自然数として $n > m$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} = \frac{a^n}{n(n-1)(n-2)\cdots(m+1)m!} &= \frac{a^{n-m}}{n(n-1)(n-2)\cdots(m+1)}\frac{a^m}{m!} \\ &= \frac{a^{n-m}}{(m+1)(m+2)\cdots n}\frac{a^m}{m!} \\ &= \frac{a}{m+1}\frac{a}{m+2}\cdots\frac{a}{n}\frac{a^m}{m!} \end{aligned}$$

$m > 2a$ のとき

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{m+1}\frac{a}{m+2}\cdots\frac{a}{n}\frac{a^m}{m!} < \frac{a}{2a}\frac{a}{2a}\cdots\frac{a}{2a}\frac{a^m}{m!} = \frac{1}{2^{n-m}}\frac{a^m}{m!} = \frac{2^m}{2^n}\frac{a^m}{m!}$$

$2^n > n$ なので

$$\frac{2^m}{2^n}\frac{a^m}{m!} < \frac{2^m}{n}\frac{a^m}{m!}$$

今は $n > m > 2a$ なので、実数 ϵ が小さいとして、自然数 $N(\epsilon)$ を

$$n > N(\epsilon) = 2^m\frac{a^m}{m!}\frac{1}{\epsilon}$$

と与えれば

$$\frac{a^n}{n!} < \epsilon \ \Rightarrow \ |\frac{a^n}{n!} - 0| < \epsilon$$

よって、0 に収束します。

- $\sqrt{a_k}$ $(a_k \geq 0, \ \lim_{k\to\infty}\{a_k\} = a \geq 0)$
  $a = 0$ では $\{a_k\}$ は 0 に収束するので

$$|a_n| < \epsilon \quad (n > N(\epsilon))$$

となる $N(\epsilon)$ が存在します。$|a_n| = (\sqrt{a_n})^2$ から

$$|\sqrt{a_n} - 0| < \sqrt{\epsilon} = \epsilon'$$

となるので、$\sqrt{a} = 0$ に収束します。
  $a_k > 0$ では

$$|\sqrt{a_k} - \sqrt{a}| = \frac{|a_k - a|}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_k - a|}{\sqrt{a}}$$

$\{a_k\}$ は a に収束するので

$$|a_n - a| < \epsilon \quad (n > N(\epsilon))$$

となる $N(\epsilon)$ が存在します。そうすると

$$|\sqrt{a_k} - \sqrt{a}| \leq \frac{|a_k - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon' \quad (n > N(\epsilon))$$

となるので、$\sqrt{a}$ に収束します。

- $\{a^{1/k}\}$ (a は $a > 0$ の実数)
  $a = 1$ では 1 に収束します。
  $a > 1$ として、$b_k = a^{1/k} - 1 > 0$ とすると

$$(1+b_k)^k = a$$

二項定理から

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} 1^{n-m} x^m = 1 + \frac{n!}{(n-1)!}x + \frac{n!}{2(n-2)!}x^2 + \cdots = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \cdots \geq 1 + nx$$

となっているので

$$1 + kb_k \leq (1+b_k)^k = a$$

これから

$$b_k \leq \frac{a-1}{k}$$

$b_k > 0$ で、$\{1/k\}$ は 0 に収束するので、はさみうちの原理から b_k は 0 に収束します。よって、$a > 1$ では

$$\lim_{k\to\infty}\{b_k\} = \lim_{k\to\infty}\{a^{1/k} - 1\} = 0$$

から、1 に収束します。$0 < a < 1$ では、$b_k = a^{-1/k} - 1 > 0$ として

$$1 + kb_k \leq (1+b_k)^k$$
$$b_k \leq \frac{a^{-1}-1}{k} \qquad (a^{-1} = (1+b_k)^k)$$

よって、同様に 1 に収束します。というわけで、$\{a^{1/k}\}$ は 1 に収束します。

・$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

ゼータ関数の $1/k^p$ での $p = 1, 2$ の場合を見ます。$1/k$ での部分和は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{16}) + \cdots$$

括弧内は

$$\frac{1}{2^l+1}+\frac{1}{2^l+2}+\frac{1}{2^l+3}+\cdots+\frac{1}{2^l+2^l} \quad (l \geq 1)$$

と書けます。1 つ目の括弧までなら S_4、2 つ目までなら S_8、3 つ目までなら S_{16} となっているので、$\{S_n\}$ の部分列 $\{S_{2^l}\}$ は

$$\begin{aligned}
&S_2 = 1+\frac{1}{2}\\
&S_4 = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\\
&S_8 = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})\\
&S_{16} = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{16})
\end{aligned}$$

これらは

$$\begin{aligned}
&S_2 = 1+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{2}{2}\\
&S_4 = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) > S_2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{2}\\
&S_8 = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}) > S_4+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{2}\\
&S_{16} > S_8+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{16}) = \frac{4}{2}+\frac{8}{16} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

となっているので

$$S_{2^l} > \frac{l+1}{2} \tag{1}$$

実際に

$$S_4 > S_2+\frac{2^1}{2^1+2^1}\ ,\ S_8 > S_4+\frac{2^2}{2^2+2^2}\ ,\ S_{16} > S_8+\frac{2^3}{2^3+2^3}\ ,\ \ldots,\ S_{2^l} > S_{2^{l-1}}+\frac{2^{l-1}}{2^{l-1}+2^{l-1}}$$

から、(1) が成立しているなら $l+1$ のとき

$$S_{2^{l+1}} = S_{2^l}+(\frac{1}{2^l+1}+\frac{1}{2^l+2}+\frac{1}{2^l+3}+\cdots+\frac{1}{2^l+2^l}) > \frac{l+1}{2}+\frac{2^l}{2^l+2^l} = \frac{l+1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{l+2}{2}$$

となるので、数学的帰納法から正しいことが確認できます。

(1) での $\{l\}$ は発散するので $\{S_{2^l}\}$ は発散し、S_n の部分列が発散するので $\{S_n\}$ も発散します。よって、$1/k$ の級数は発散します。

$1/k^2$ での部分和は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

2 乗なので、片方を 1 減らした $1 \times 2, 2 \times 3, \ldots, (n-1)n$ より小さくなるので

$$S_n < 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})$$

括弧内の後ろと前が打ち消しあうので

$$S_n < 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

これから、$\{S_n\}$ は有界で単調増加なので収束します。よって、$1/k^2$ の級数は収束します。収束先は $\pi^2/6$ となりますが、求めるのに必要な知識が多いので省きます。

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (幾何級数)

  n までの部分和は

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}$$

xS_n との差を取ると

$$\begin{aligned} S_n - xS_n &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - x^{n+1} \\ (1-x)S_n &= 1 - x^{n+1} \\ S_n &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \end{aligned}$$

極限は

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x}\lim_{n\to\infty}\{x^{n+1}\}$$

$|x| < 1$ であれば $\{x^{n+1}\}$ は 0 に収束し、$|x| > 1$ なら発散するので

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$$

$x = 1$ のときは $1+1+\cdots$ なので $n\to\infty$ で発散し、$x = -1$ では $(-1)^k$ のため発散します。よって、$|x| \geq 1$ で発散します。

- オイラー数 e

  数列が

$$a_k = (1+\frac{1}{k})^k$$

で与えられているとします。二項定理から

$$\begin{aligned}
a_k = (1+\frac{1}{k})^k = &\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}\frac{1}{k^m} \\
&= 1 + \frac{k}{1}\frac{1}{k} + \frac{k(k-1)}{2!}\frac{1}{k^2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\frac{1}{k^3} + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots\times 2\times 1}{k!}\frac{1}{k^k} \\
&= 1 + \frac{k}{1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2!}\frac{k}{k}\frac{k-1}{k} + \frac{1}{3!}\frac{k}{k}\frac{k-1}{k}\frac{k-2}{k} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{k}{k}\frac{k-1}{k}\cdots\frac{1}{k} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{k}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{k})(1-\frac{2}{k}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{k})(1-\frac{2}{k})\cdots(1-\frac{k-1}{k}) \qquad (2)
\end{aligned}$$

a_{k+1} は

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= (1+\frac{1}{k+1})^{k+1} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{m!(k+1-m)!}\frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{k'}\frac{k'!}{m!(k'-m)!}\frac{1}{k'!} \qquad (k' = k+1) \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{k+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{k+1})(1-\frac{2}{k+1}) + \cdots + \frac{1}{(k+1)!}(1-\frac{1}{k+1})(1-\frac{2}{k+1})\cdots(1-\frac{k}{k+1})
\end{aligned}$$

a_k と a_{k+1} の第 3 項は $1-1/k \leq 1-1/(k+1)$ で、他の項も同様です。そして、k は自然数なので、a_k, a_{k+1} の各項は全て正で、a_{k+1} では a_k よりも項が 1 つ多いです。このため、$\{a_k\}$ は単調増加です。

a_k の各項は $1/n!$ と 1 以下の積になっているので、各項は $1/n!$ より大きな値を持たないです。そして、2 の累乗と階乗は

$$2 = (1+1)!\ ,\ 2^2 < (2+1)!\ ,\ 2^3 < (3+1)!$$

となっていることから、$2 \leq n \leq m$ において $2^n < (n+1)!$ が成立します。これは、$n+1$ では

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n < 2(n+1)! < (2+n)(n+1)! = (n+2)!$$

として成立するので、数学的帰納法から正しいことが分かります。というわけで、$1/k!$ の項までに

$$\frac{1}{n!} < (\frac{1}{2})^{n-1} \quad (n \geq 3)$$

を使うと

$$\begin{aligned}
a_k &= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{k})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{k})(1-\frac{2}{k})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{k})(1-\frac{2}{k})\cdots(1-\frac{k-1}{k}) \\
&< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!} \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{k-1} \\
&= 1+\sum_{m=0}^{k-1}(\frac{1}{2})^m \\
&= 1+1+1-(\frac{1}{2})^{k-1} \qquad (3)
\end{aligned}$$

和は幾何級数なので

$$\sum_{m=0}^{k-1}(\frac{1}{2})^m = \frac{1-(1/2)^{k-1}}{1-1/2} = 2-(\frac{1}{2})^{k-1} = 1+1-(\frac{1}{2})^{k-1}$$

$(1/2)^{k-1}$ は 0 に収束するので、$\{a_k\}$ は $2 < a_k < 3$ となり、有界で単調増加の数列と分かります。有界で単調増加なので $\{a_k\}$ は収束し、その極限は e で表され、オイラー数 (Euler's number) やネイピア数 (Napier's constant) と呼ばれます。オイラーの定数 (Euler's constant) というのもあるので、オイラー数と呼ぶのは紛らわしくなっています。

オイラー数 e が階乗の和で書けることを示します。a_k を e_k と書くことにして、(2) を

$$
\begin{aligned}
e_k &= 1 + \frac{1}{1}\frac{k}{k} + \frac{1}{2!}\frac{k(k-1)}{k^2} + \frac{1}{3!}\frac{k(k-1)(k-2)}{k^3} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{k(k-1)\cdots\times 2\times 1}{k^k} \\
&= 1 + c_1(k) + c_2(k) + \cdots + c_k(k)
\end{aligned}
$$

このときの $c_j(k)$ は

$$
c_j(k) = \frac{1}{j!}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)}{k^j} = \frac{1}{j!}(1-\frac{1}{k})(1-\frac{2}{k})\cdots(1-\frac{j-1}{k})
$$

括弧部分は k の無限大の極限で 1 なので、$c_j(k)$ は $1/j!$ に収束します。そして、e_k は単調増加なので、$c_j(k)$ を適当な n で切った時の極限に対して

$$
\lim_{k\to\infty} e_k \geq \lim_{k\to\infty}(1 + \sum_{j=1}^{n} c_j(k)) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!} \tag{4}
$$

となります。

今度は上側から見ます。e_k は (3) から

$$
e_k < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!} = 1 + S_k
$$

e_k は収束しているので、S_k も収束します。e_k は単調増加で収束先があるために、$\lim_{k\to\infty}(1+S_k)$ を超えることはできなく

$$
\lim_{k\to\infty}\{e_k\} \leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}
$$

よって、これと (4) から $\{e_k\}$ の収束先であるオイラー数 e は

$$
e = \lim_{k\to\infty}\{e_k\} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}
$$

として、級数で書けます。

ついでに、e が無理数であることを示します。e は有理数と仮定します。q を自然数として、e と q までの差を見ると

$$\begin{aligned}
e - E_q &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} - \sum_{j=0}^{q}\frac{1}{j!} = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \cdots \\
&< \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{(q+1)^2} + \cdots \\
&= \frac{1}{(q+1)!}(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots) \\
&= \frac{1}{(q+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^n} \\
&= \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{1-1/(q+1)} \\
&= \frac{1}{(q+1)!}\frac{q+1}{q} \\
&= \frac{1}{q!}\frac{1}{q} \qquad (5)
\end{aligned}$$

これに $q!$ をかけると

$$q!(e - E_q) < \frac{1}{q}$$

q は自然数なので

$$0 < q!(e - E_q) < 1 \qquad (6)$$

となります。一方で

$$q!E_q = q!(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}) = q! + q! + q(q-1)\cdots\times 3 + \cdots + 1$$

自然数の階乗は自然数なので、$q!E_q$ は自然数です。そして、今は e を有理数と仮定しているので、自然数 p, q によって、$e = p/q$ と書けます。そうすると、$q!e = (q-1)!p$ は自然数です。自然数と自然数の差も自然数なので $q!(e - E_q) \geq 1$ となりますが、これは (6) と矛盾します。よって、e は無理数です。

また、(5) から q を増やせば差が大きく減っていくのが分かります。例えば、$q = 10$ での値は

$$E_{10} \simeq 2.718281801$$

となり、e との差は

$$0 < e - E_q < \frac{1}{10!}\frac{1}{10} \simeq 2.8 \times 10^{-8}$$

と見積もられます。