数列と級数

級数が収束するかどうかの話が物理でもいろいろと出てくるので、数列と級数の基本的な定理を示します。物理ではダランベールとコーシの収束判定法だけ知っていればほぼ困らないですが、単語だけでも知っておくと便利です。
ここでの話は実数に限定し、数列は実数の無限数列、級数は実数の無限級数です。
ϵ は正の実数、数列の添え字と $N, N(\epsilon)$ は自然数 (0 を含まない) としています。

数列
[A1]a に収束する数列 $\{x_i\}$ の絶対値による数列 $\{|x_i|\}$ は $|a|$ に収束する。
[A2] 数列 $\{x_i\}$ が収束するなら $|x_i| \leq s$ となる正の実数 s がいる (収束するなら有界)。
[A3] 収束する数列同士の和と積は収束する。
[A4]$0 < y < 1$ による数列 $\{y^i\}$ (y^i は y の累乗 $y^1, y^2, \ldots$) は 0 に収束。
[A5]$x_i \leq y_i$ による数列 $\{x_i\}, \{y_i\}$ が収束するなら、収束先 a, b は $a \leq b$。
[A6] はさみうちの原理
[A7]0 に収束する正の実数の数列 $\{y_i\}$、自然数 N、$c > 0$ に対して $|x_n - a| \leq cy_n$ $(n > N)$ なら、$\{x_i\}$ は a に収束。
[A8] 正の実数による数列 $\{x_i\}$ において、x_{i+1}/x_i が $a < 1$ に収束するとき、$\{x_i\}$ は 0 に収束する。
[A9] 数列が a に収束するならその部分列も a に収束。
[A10] 数列から単調数列の部分列を作れる。
[A11] 単調数列は収束するなら有界、有界なら収束する。
[A12] ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理。
[A13] コーシー列は有界。
[A14] 数列でのコーシーの判定法。

級数
[B1] 級数でのコーシーの判定法。
[B2] 級数 Σa_i が収束するなら、$\lim_{i \to \infty} a_i = 0$。
[B3]$\lim_{i \to \infty} a_i \neq 0$ なら、級数は発散する。
[B4] 負でない実数の数列 $\{a_k\}$ があり、部分和の数列が有界なら、級数 Σa_k は収束する。
[B5]$|a_i|$ の級数が収束するなら、a_i の級数は収束する (絶対収束なら収束する)。
[B6] ゼータ関数は $p > 1$ のとき収束する。
[B7] 比較判定法。
[B8]$p > 1$ に対して $\{k^p a_k\}$ が収束するなら、Σa_k は絶対収束する
[B9] ダランベールの収束判定法。
[B10] コーシーの収束判定法。

上限、下限の定義と後で使う関係をまとめておきます。

- 上限、下限
  実数の集合 X での任意の $x \in X$ に対して等しいか大きい実数 a $(x \leq a)$ が存在するとき、a を上界と言い、X は上に有界と言われます。a が X の上界であり、X に a よりも小さな上界がいないなら、a は上限と呼ばれ、$\sup X$ と表記されます。
  実数の集合 X での任意の $x \in X$ に対して等しいか小さい実数 b $(b \leq x)$ が存在するとき、b を下界と言い、X は下に有界と言われます。b が X の下界であり、X に b よりも大きな下界がいないなら、b は下限と呼ばれ、$\inf X$ と表記されます。
  「上限、下限」で示しているように、実数の集合 X に対して、c を実数として

$$c \geq 0 \text{ に対して } \sup(cX) = c\sup X,\ \inf(cX) = c\inf X$$

$$c < 0 \text{ に対して } \sup(cX) = c\inf X,\ \inf(cX) = c\sup X$$

となっています。

実数の数列 (sequence) を見ていきます。実数の数列は実数が並んでいるもので、ここでは無限個並んでいる無限数列とします。例えば $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ は数列です。表記ですが、{ } は集合を表す記号なので、区別するために数列には ( ) が使われる場合もありますが（集合は集まり、数列は自然数によって順序付けがされている）、ここでは { } で表記し

$$\{x_i\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

とします。i は自然数で、添え字のローマ文字は自然数とします。ちなみに、数列は自然数 $1, 2, \ldots$ を実数にする写像として定義されています。

数列 $\{x_i\}$ に対して

$$|x_n - a| < \epsilon \quad (n > N(\epsilon)) \tag{1}$$

となる正の実数 ϵ に対応する自然数 (正の整数)$N(\epsilon)$ が存在するとき、$\{x_i\}$ は実数 a に収束する (converge) と言います。$n \geq N(\epsilon)$ としている場合もありますが、1 ずれるだけです。| | は絶対値です。言い回しはいろいろあり、例えば、ϵ と $N(\epsilon)$ があり、$n > N(\epsilon)$ のとき $|x_n - a| < \epsilon$ であれば a に収束すると言ったりもします。どの言い方にしても、ある $N(\epsilon)$ より先の x_i と a の差が任意に小さくなるなら収束する数列とする、と言っています。収束しないなら発散する (divergent) と言われます。ちなみに、収束、発散は convergence、divergence です。

収束するときに今の言い回しを繰り返すのも面倒なので、ここでは ϵ と $N(\epsilon)$ をいちいち何か言わずに (1) を書くだけですましている場合もあります。

収束するときの a は数列の極限 (limit) と呼ばれ

$$\lim_{i\to\infty} x_i = a\ ,\ \lim_{i\to\infty}\{x_i\} = a$$

と書かれます。a を極限点と言ったりもします。高校数学での極限の話は曖昧なので (1) に定義し直す、という話が専門的な数学の本ではよくされています (十分大きいや限りなく大きいと言ったときの、十分や限りなくとはなんだっという曖昧さをなくしている)。

$\{x_i\}$ が a に収束することは、$n > N(\epsilon)$ において $a - \epsilon < x_i < a + \epsilon$ となることと同じです。これは、単に絶対値を外しただけで、$x_i = x$ に対して

$$|x - a| < \epsilon \ \Rightarrow\ -\epsilon < x - a < \epsilon \ \Rightarrow\ a - \epsilon < x < a + \epsilon$$

となるからです。
収束の定義を使う例として丁度いいので、収束する数列の収束先は一意的に決まることを示します。これは $\lim_{i\to\infty}\{x_i\} = a,\ \lim_{i\to\infty}\{x_i\} = b$ としたとき $a = b$ であればいいです。言い換えれば、$|a - b|$ を好きなだけ小さく取れるということです。これを三角不等式を使って変形すると

$$|a-b| = |(a-x_i)+(x_i-b)| \le |a-x_i| + |x_i-b|$$

a に収束しているなら、$|x_n-a|<\epsilon$ に対して $n>N_1$ となる正の整数 N_1 がいます。同様に、b に収束しているなら、$|x_n-b|<\epsilon$ に対して $n>N_2$ となる N_2 がいます。そうすると、N_1, N_2 で等しいか大きい方を N として

$$|a-b| \le |a-x_n| + |x_n-b| < 2\epsilon \quad (n>N)$$

よって、任意の $\epsilon' = 2\epsilon > 0$ に対して $|a-b|<\epsilon'$ となり、任意なのでどこまでも小さくできます。よって、$a=b$ となり、収束先は一意的に決まります。

出てくる単語の定義をしておきます。

- 部分列

  数列 $\{x_i\}$ があり、それから $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$ として数列 $\{x_{n_k}\}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \cdots)$ を作ったとき、$\{x_{n_k}\}$ を $\{x_i\}$ の部分列 (subsequence) と言います。部分列も無限数列です。例えば、$\{1, 2, 3, \ldots, \}$ から $\{2, 4, 6, \ldots\}$ を取り出した数列は部分列で、今の表記との対応は

$$\{x_i\} = \{x_1, x_2, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\{x_{n_k}\} = \{x_2, x_4, x_6, \ldots\} = \{2, 4, 6, \ldots\} \quad (n_1 = 2,\ n_2 = 4,\ n_3 = 6, \ldots)$$

  定義から分かるように、$\{x_4, x_2, x_6, \ldots\}$ のように順序を変えたものは部分列ではないです。

  ここでは数列 $\{x_i\}$ の部分列は $\{x_{n_k}\}$ のように表記します。

- 単調数列

  数列 $\{x_i\}$ は

  $x_i \le x_{i+1}$ $(x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k \le \cdots)$ なら広義単調増加 (monotonically increasing)
  $x_i \ge x_{i+1}$ $(x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_k \ge \cdots)$ なら広義単調減少 (monotonically decreasing)

  と言われ、どちらかであれば単調数列 (monotone sequence) と呼ばれます。等号となる場合がない数列では別の呼び方がされ

  $x_i < x_{i+1}$ $(x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots)$ なら狭義単調増加 (strictly increasing)
  $x_i > x_{i+1}$ $(x_1 > x_2 > \cdots > x_k > \cdots)$ なら狭義単調減少 (strictly decreasing)

  狭義は広義に含まれるので、これらも単調数列です。

  ここではこのように定義しますが、単語の使われ方が錯綜しているので気を付けてください (日本語と英語の両方で)。今の定義をもとにすると 2 パターンあって (減少でも同様)

  (i) 広義単調増加 ⇔ 単調増加（increasing）
  狭義単調増加 ⇔ 狭義単調増加 (strictly increasing)

  (ii) 広義単調増加 ⇔ 単調非減少（non-decreasing）
  狭義単調増加 ⇔ 単調増加（increasing）

(i) は広義単調増加から広義を取っただけですが、(ii) では単調非減少として別の言い回しになり、さらに狭義のほうを単調増加と呼ぶという非常に紛らわしいことをしています。(ii) は、$\{1,1,1,\dots\}$ のような増加しない数列に増加という単語を当てたくないからです。さらに、広義単調増加と広義単調減少だけを定義する場合もあります。これは、広義の中に狭義が含まれているために、広義だけで主な定理を説明できるからです。なので、明確な理由がないなら狭義を定義しないほうが混乱が生じないです。

- コーシー列

  数列 $\{x_i\}$ があり、任意の実数 $\epsilon > 0$ に対して

$$|x_n - x_m| < \epsilon \quad (m, n > N(\epsilon)) \tag{2}$$

となる自然数 $N(\epsilon)$ がいるとき、$\{x_i\}$ はコーシー列 (Cauchy sequence) と定義されます。もしくは、極限を使って

$$\lim_{m,n\to\infty} |x_n - x_m| = 0$$

と定義されます。ここでのコーシー列は実数の場合のみを指します。

収束の定義と同じように、ここではコーシー列であることを (2) と書くだけですましている場合もあります。

- 上極限、下極限

  ここでは出てこない単語ですが定義していおきます。下で示している関係や単語を使っています。$\{x_i\}$ を有界な数列とし、$k \geq m$ での上限を $y_m = \sup\{x_k\}$ とします ($\{x_i\}$ での x_{m-1} までを省いた中での sup)。そうすると

$$y_1 = \sup\{x_k |\ k \geq 1\},\ y_2 = \sup\{x_k |\ k \geq 2\}$$

としたとき、$k \geq 1$ での上限が y_1、$k \geq 2$ での上限が y_2 なので、$y_1 \geq y_2$ です ($k \geq 1$ で 1 番大きいのが y_1、$k \geq 2$ で 1 番大きいのが y_2)。これを続ければ、$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \cdots$ となり、広義単調減少です ([A10] も参照)。そして、$\{y_m\}$ は有界なので [A12] から $\{y_m\}$ は収束します。$\{y_m\}$ の極限 (収束先) は $\{x_i\}$ の上極限 (limit superior, upper limit) と言われ、$\limsup\{x_i\}$ や $\overline{\lim}\{x_i\}$ と表記されます。

別の言い方もできます。$\{y_m\}$ が a に収束するなら、上限の定義から $y_m < a + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) です。そして、$\{y_m\}$ は $x_k \leq y_m$ ($k \geq m$) として作っているので、$x_k < a + \epsilon$ です。言い換えれば $k < m$ のとき、$x_k \geq a + \epsilon$ です。

一方で、ある自然数 N に対して $x_n \leq a - \epsilon$ ($n > N$) となっているとして $\{y_m\}$ を作るなら、これによる上限のために $y_m \leq a - \epsilon$ ($m > N$) が要求されます。しかし、$\{y_m\}$ は a に収束するので ($\lim\{y_m\} = a$)、矛盾します。よって、$n > N$ に対して $x_n > a - \epsilon$ です。

つまり、有限個の n に対して $x_n \geq a + \epsilon$、無限個の n に対して $x_n > a - \epsilon$ となっているとき、a は上極限と定義できます。

同様に、$k \geq m$ での下限を $z_m = \inf\{x_k\}$ として

$$z_1 = \inf\{x_k |\ k \geq 1\}\ ,\ z_2 = \inf\{x_k |\ k \geq 2\}$$

とすれば、$k \geq 1$ での下限が z_1、$k \geq 2$ での下限が z_2 なので、$z_1 \leq z_2$ です ($k \geq 1$ で 1 番小さいのが z_1、$k \geq 2$ で 1 番小さいのが z_2)。これを続ければ、$z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq \cdots$ となり、広義単調増加になります。これによって、$\{z_m\}$ の極限は $\{x_i\}$ の下極限 (limit inferior, lower limit) と言われ、$\liminf\{x_i\}$ や $\underline{\lim}\{x_i\}$ と表記されます。

上極限と同様にすれば、有限個の n に対して $x_n \leq a - \epsilon$、無限個の n に対して $s_n < a + \epsilon$ なら、a は下極限と定義できます。

数列に関する定理を示していきます。

[A1] a に収束する数列 $\{x_i\}$ の絶対値による数列 $\{|x_i|\}$ は $|a|$ に収束する。

絶対値の三角不等式から

$$||x_i| - |a|| \leq |x_i - a|$$

となるので、$\{x_i\}$ が a に収束していれば $|x_i|$ は $|a|$ に収束します。

[A2] 数列 $\{x_i\}$ が収束するなら $|x_i| \leq s$ となる正の実数 s がいる (収束するなら有界)。

$\{x_i\}$ は収束することと、絶対値の三角不等式から

$$|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < \epsilon \quad (n > N(\epsilon))$$

となるので

$$\begin{aligned} |x_n| - |a| &< \epsilon \\ |x_n| &< |a| + \epsilon \end{aligned} \tag{3}$$

つまり、$N(\epsilon)$ より先の x_n に対して $|x_n| < |a|+\epsilon$ です。そして、$N(\epsilon)$ までの x_i の絶対値を取った $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$ には必ず $|x_i| \leq s'$ $(i \leq N(\epsilon))$ となる s' がいるので、$\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |a| + \epsilon\}$ の中の最大を s とすれば、$|x_i| \leq s$ となります。このように、$|x_i| \leq s$ となる s が存在するとき、$\{x_i\}$ は有界 (bounded) と言われます。ただし、$|x_i| \leq s$ なら収束するとは言えません。

[A3] 収束する数列同士の和と積は収束する。

数列を $\{x_i\}, \{y_i\}$ として、それぞれ a, b に収束するとします。そうすると

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2},\ |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

において、$\{x_i\}, \{y_i\}$ それぞれに $n > N_x(\epsilon),\ n > N_y(\epsilon)$ となる自然数 $N_x(\epsilon), N_y(\epsilon)$ がいます。そして、三角不等式から

$$|(x_n+y_n)-(a+b)| = |(x_n-a)+(y_n+b)| \leq |x_n-a|+|y_n-b| < \epsilon$$

このとき、$N_x(\epsilon), N_y(\epsilon)$ で等しいか大きな方を $N(\epsilon)$ とすれば、$n > N(\epsilon)$ となる $N(\epsilon)$ が存在するので、和を取った数列 $\{x_i\}+\{y_i\}=\{x_i+y_i\}$ は収束します。和でなく差でも同様です。

積 x_iy_i では

$$|x_iy_i-ab| = |(x_iy_i-x_ib)+(x_ib-ab)| \leq |x_iy_i-x_ib|+|x_ib-ab| = |x_i||y_i-b|+|x_i-a||b|$$

$\{x_i\}$ は収束するので [A2] から $|x_i| \leq s$ となる実数 s がいます。s と $|b|$ で大きい方 (等しければどちらでも) を α とすれば

$$|x_iy_i-ab| \leq \alpha(|x_i-a|+|y_i-b|)$$

和のときと同じ形なので、$\{x_iy_i\}$ は収束 ab します。定数倍による数列 $\{cx_i\}$ も同様に収束します。

ついでに、$\{\dfrac{x_i}{y_i}\}$ が a/b に収束することも示します。$\{y_i\}, b$ は 0 でないとします。$\{1/y_i\}$ が $1/b$ に収束すると予想して

$$|\frac{1}{y_i}-\frac{1}{b}| = |\frac{b-y_i}{by_i}| = \frac{|y_i-b|}{|b||y_i|}$$

三角不等式から

$$||y_i|-|b|| \leq |y_i-b| \ \Rightarrow\ -|y_i-b| \leq |y_i|-|b|$$

収束しているので、自然数 $N_y(\epsilon_y)$ に対して $|y_n-b| < \epsilon_y\ (n > N_y(\epsilon_y))$ として

$$-\epsilon_y < -|y_n-b| \leq |y_n|-|b|$$

ϵ_y を $|b|/2$ とすれば

$$\frac{1}{2}|b| = |b|-\epsilon_y < |y_n| \ \Rightarrow\ \frac{2}{|b|} > \frac{1}{|y_n|}$$

これを使うと

$$|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}| = \frac{|y_n-b|}{|b||y_n|} < \frac{2}{|b|^2}|y_n-b|$$

$m > N'_y(\epsilon'_y)$ で $|y_m - b| < \epsilon'_y|b|^2/2$ となるとすれば

$$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| < \epsilon'_y$$

となるので、$\{1/y_i\}$ は $1/b$ に収束します。よって、$\{x_i\}$ と $\{1/y_i\}$ の積の数列 $\{x_i/y_i\}$ は a/b に収束します。
　今の結果は極限の計算規則を与えていて

$$\lim_{i\to\infty}\{x_i + y_i\} = \lim_{i\to\infty}\{x_i\} + \lim_{i\to\infty}\{y_i\} = a + b$$

$$\lim_{i\to\infty}\{x_i y_i\} = (\lim_{i\to\infty}\{x_i\})(\lim_{i\to\infty}\{y_i\}) = ab$$

数列の数が増えても同様です。

[A4] $0 < y < 1$ による数列 $\{y^i\}$ (y^i は y の累乗 $y^1, y^2, \ldots$) は 0 に収束。

　$y^n < \epsilon$ として、これを対数にして

$$n\log y < \log\epsilon$$

$y < 1$ では $\log y$ は負の値なので

$$n > |\frac{\log\epsilon}{\log y}|$$

右辺の値を n を超えない自然数 $N(\epsilon)$ に置き換えれば $n > N(\epsilon)$ となる $N(\epsilon)$ がいるのが分かるので、$|y^n - 0| < \epsilon$ $(n > N(\epsilon))$ から $0 < y < 1$ での $\{y^i\}$ は 0 に収束します。

[A5] $x_i \leq y_i$ による数列 $\{x_i\}, \{y_i\}$ が a, b に収束するなら $a \leq b$。

　$\{x_i\}, \{y_i\}$ が収束するので、[A3] から $\{y_i\} - \{x_i\} = \{y_i - x_i\}$ は収束します。$y_i - x_i \geq 0$ とすれば、[A1] から $\{y_i - x_i\} = \{|y_i - x_i|\}$ は $c = |c| \geq 0$ に収束するので

$$\lim_{i\to\infty}\{y_i - x_i\} = \lim_{i\to\infty}\{y_i\} - \lim_{i\to\infty}\{x_i\} \geq 0$$

よって、$\{x_i\}, \{y_i\}$ が a, b に収束するとすれば $a \leq b$ です。

[A6] はさみうちの原理 (squeeze theorem)
$\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}$ があり、$\{x_i\}, \{z_i\}$ は a, c に収束しているなら、$x_i \leq y_i \leq z_i$ で $a = c$ のとき $\{y_i\}$ は収束し、b に収束するなら $a = b = c$。

　$\{x_i\}$ と $\{z_i\}$ は同じ a に収束するので

$$|x_n - a| < \epsilon\ ,\ |z_n - a| < \epsilon \quad (n > N(\epsilon))$$

これは絶対値を外せば $-\epsilon < x_n - a < \epsilon$ の意味なので、$x_i \leq y_i \leq z_i$ から

$$\begin{aligned} x_n - a \leq & y_n - a \leq z_n - a \\ -\epsilon < & y_n - a < \epsilon \end{aligned}$$

よって、$|y_n - a| < \epsilon\ (n > N(\epsilon))$ が言えるので $\{y_i\}$ は a に収束し、極限で書けば

$$\lim_{i\to\infty}\{x_i\} = \lim_{i\to\infty}\{y_i\} = \lim_{i\to\infty}\{z_i\}$$

となります。

[A7] 0 に収束する正の実数の数列 $\{y_i\}$、自然数 N、$c > 0$ に対して $|x_n - a| \leq cy_n\ (n > N)$ なら、$\{x_i\}$ は a に収束。

$\{y_i\}$ は 0 に収束するので、$c > 0$ として

$$y_n < \frac{\epsilon}{c} \quad (n > N_y(\epsilon))$$

今は $n > N$ となる自然数 N に対して、a を実数として

$$|x_n - a| \leq cy_n$$

となっているとしているので

$$|x_n - a| \leq cy_n < \epsilon \quad (n > N, N_y(\epsilon))$$

よって、$\{x_i\}$ は a に収束します。

[A8] 正の実数による数列 $\{x_i\}$ において、x_{i+1}/x_i が $a < 1$ に収束するとき、$\{x_i\}$ は 0 に収束する。

x_{i+1}/x_i が a に収束するとして

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n} - a| < \epsilon \quad (n > N(\epsilon))$$

三角不等式から

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| - |a| \leq |\frac{x_{n+1}}{x_n} - a|$$

正の実数なので

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - a \leq |\frac{x_{n+1}}{x_n} - a| < \epsilon \ \Rightarrow \ \frac{x_{n+1}}{x_n} < a + \epsilon = a'$$

これから、$x_{n+1} < a'x_n$、$n-1$ にすれば $x_n < a'x_{n-1}$、というようにして $N(\epsilon) < n$ まで続いていくので

$$0 < x_{n+1} < a'x_n < a'^2 x_{n-1} < \cdots < a'^{n-N} x_{N+1}$$

一番右は

$$a'^{n-N} x_{N+1} = \frac{x_{N+1}}{a'^N} a'^n$$

a'^n $(n > N(\epsilon))$ の数列 $\{a'^n\}$ と見たとき、$0 < a < 1$ から $0 < a' < 1$ $(a' = a + \epsilon < 1)$ なので、[A4] から $\{a'^n\}$ は 0 に収束します。そうすると、x_i は正の実数なので

$$x_{n+1} = |x_{n+1} - 0| < ca'^n \qquad (c = \frac{x_{N+1}}{a'^N})$$

よって、[A7] から $\{x_i\}$ は 0 に収束します。

[A9] 数列が a に収束するならその部分列も a に収束する。

部分列 $\{x_{n_k}\}$ の n_k は増加すると設定しているので、もとの数列 $\{x_i\}$ での $|x_n - a| < \epsilon$ $(n > N(\epsilon))$ となる自然数 $N(\epsilon)$ がいれば、n_k がどこかで $n_k > N(\epsilon)$ になるので、$|x_{n_k} - a| < \epsilon$ がそのまま成立します。

[A10] 数列から単調数列の部分列を作れる。

数列 $\{x_i\}$ を

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots\}$$

と書きます。この数列に対して、x_1 が x_2 以降の値以上なら取り出し、そうでないなら取り出さないという手順を続けていきます。例えば、x_1 が x_2 以降の値以上なら取り出すことにし $x_1 \geq x_m$ $(m \geq 2)$、x_2 が x_3 以降の値以上なら取り出すので $x_1 \geq x_2 \geq x_m$ $(m \geq 3)$、x_3 が x_4 以降の値以上でなければ取り出さないので $x_1 \geq x_2 \geq x_m$ $(m \geq 4)$、というようにします。そうして取り出した部分列 $\{x_{k_1}\}$ は $x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \cdots$ なので、広義単調減少です。

無限に続かずに有限の回数で止まった場合は、無限大の数列にならないので今の方法では作れません。というわけで、今の手順が x_j を取り出したところで止まったとします。j 番目で止まったということは、

その先の $j+1$ 番目以降は取り出されないので $x_{j+1} < x_{j+2}$、$x_{j+2} < x_{j+3}$、と続いていきます。よって、$x_{j+1} < x_{j+2} < \cdots$ と続くことから、これらによって狭義単調増加の部分列を作れます。よって、数列から単調数列の部分列が作れます。

[A11] 単調数列は収束するなら有界、有界なら収束する。そのとき、広義単調増加なら上限、広義単調減少なら下限に収束する。

収束する数列は有界なので、有界なら収束することを示せばいいです。
広義単調増加の場合から見ます。$\{x_i\}$ が有界なら $x_i \leq s$ となる実数 s が存在します。そうすると、$\{x_i\}$ の上限となる実数 u がいます。任意の $\epsilon > 0$ に対して、$u-\epsilon$ は上限ではなくなるので

$$x_N > u - \epsilon$$

となる x_N がいます (上限の定義)。そして、広義単調増加のために $x_n \geq x_N$ $(n \geq N)$ となる x_n がいて、u は上限なので $x_n \leq u$ です。そうすると、N を $N(\epsilon)$ として

$$|x_n - u| = -(x_n - u) \leq u - x_N < \epsilon \quad (n \geq N(\epsilon))$$

となるので、上に有界で広義単調増加では上限に収束します。
広義単調減少の場合は、$x_1 \geq x_2 \geq \cdots$ なので、符号を反転させれば $-x_1 \leq -x_2 \leq \cdots$ として広義単調増加になります。すでに見たように、有界で広義単調増加な $\{-x_i\}$ は上限 $-u$ に収束します。そして、$\sup\{-x_i\} = -\inf\{x_i\}$ から

$$-\lim_{i\to\infty}\{x_i\} = \lim_{i\to\infty}\{-x_i\} = \sup(-\{x_i\}) = -\inf\{x_i\}$$

となり、広義単調減少では下限に収束します。というわけで、下に有界なら収束します。

[A12] ボルツァーノ・ワイエルシュトラス (Bolzano-Weierstrass) の定理 (数列の場合)
有界な数列は収束する部分列を持つ。

有界な数列 $\{x_i\}$ があるとします。このとき、[A10] から単調数列となる部分列 $\{x_{n_k}\}$ が作れ、有界な数列の部分列なので $\{x_{n_k}\}$ も有界です。そして、[A11] から有界な単調数列は収束するので、$\{x_{n_k}\}$ は収束します。よって、有界な数列は収束する部分列を持ちます。
ちなみに、ワイエルシュトラスはドイツ語の発音に寄せるならヴァイヤシュトラスです。

[A13] コーシー列は有界。

$\{x_i\}$ がコーシー列なら

$$|x_n| - |x_m| \leq |x_n - x_m| < \epsilon \quad (m, n > N(\epsilon))$$

なので

$$|x_n| < |x_m| + \epsilon$$

これは x_m を収束先 a と思えば (3) と同じなので、$\{x_i\}$ は有界です。

[A14] 数列でのコーシーの判定法（Cauchy criterion）
数列が収束するならコーシー列、数列がコーシー列なら収束する。

収束する数列がコーシー列になることを示します。$\{x_i\}$ が収束するなら

$$|x_m - a| < \epsilon\ ,\ |x_n - a| < \epsilon \quad (m, n > N(\epsilon))$$

となる $N(\epsilon)$ がいます。そして、絶対値の三角不等式から

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < 2\epsilon \quad (m, n > N(\epsilon))$$

となり、コーシー列になります。
コーシー列なら収束することを示します。$\{x_i\}$ をコーシー列として

$$|x_n - x_m| < \epsilon \quad (m, n > N(\epsilon))$$

コーシー列は有界なので、[A12] から $\{x_i\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ は収束します。実数 b に収束するとすれば

$$|x_M - b| < \epsilon \quad (n_k = M\ ,\ M > N(\epsilon))$$

となる自然数 M がいます。$m = M$ とすれば

$$|x_n - x_M| < \epsilon$$

そうすると、$n > N(\epsilon)$ に対して

$$|x_n - b| = |(x_n - x_M) + (x_M - b)| \leq |x_n - x_M| + |x_M - b| < 2\epsilon$$

となるので、$\{x_i\}$ は b に収束します。よって、コーシー列は収束します。

ここから級数 (series) を見ていきます。ここでの級数は実数の無限級数 (infinite series) のことです。
数列 $\{a_i\}$ があり、それによる

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

を数列 $\{a_i\}$ の部分和 (partial sum) と言います。級数はこれを無限大の範囲にしたもので

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{4}$$

と定義されます。ここでの文章中に Σa_i のように書かれたものは (4) を指します。部分和の数列 $\{A_n\}$ が収束するとき、級数は収束すると言います。言い換えれば

$$\lim_{n\to\infty} \{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = c$$

となる $\{A_n\}$ の収束先 c が級数の和になることです。c が存在しなければ、級数は発散すると言います。

- 絶対収束、条件収束
  a_i の絶対値による

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \tag{5}$$

  が収束するとき、Σa_i は絶対収束する (converge absolutely) と言います。(5) が発散しても (4) が収束するときは条件収束する (converge conditionally) と言います。ちなみに、単語としての絶対収束、条件収束は absolute convergence、conditional convergence です。

- 幾何級数
  幾何級数 (geometric series) は、b, r を実数として

$$\sum_{k=0}^{\infty} br^k = b + br + br^2 + br^3 + \cdots$$

  と定義されます。幾何級数は $|r| < 1$ で収束します。簡単に示しておきます。b は係数なので無視して

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

  とすれば

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n - (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}) \\ &= 1 - r^{n+1} \\ S_n &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

これは等比数列の和として出てくるものです。右辺は $|r| < 1$ なら r^{n+1} は $n \to \infty$ で 0 になるので

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

となり、収束します。また、明らかに $|r| \geq 1$ なら発散します。

級数に関する定理を示していきます。

[B1] 級数でのコーシーの判定法
部分和の数列がコーシー列なら級数は収束、級数が収束するなら部分和の数列はコーシー列。

級数の収束は部分和の数列が収束するという意味なので、級数が収束するなら部分和の数列はコーシー列です。

部分和 A_n による数列を $\{A_n\}$ とします。$\{A_n\}$ がコーシー列なら収束するので、極限の式で書けば

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} A_n = c$$

として、級数は収束します。

また、$n > m$ のとき

$$A_n - A_m = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$$
$$= a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

と書けるので、コーシー列の定義から、級数が収束するためには

$$|A_n - A_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| = |\sum_{i=m+1}^{n} a_i| < \epsilon \quad (n > m > N(\epsilon)) \tag{6}$$

となる自然数 N が存在すればいいとも言えます。

[B2] 級数 Σa_k が収束するなら、$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$。

Σa_k は収束するので、それを c として

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} A_n = c$$

そして

$$A_n - A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

から

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = c - c = 0$$

となるので、級数が収束するなら $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ です。ただし、$\lim_{k\to\infty} a_i = 0$ なら収束するとは言えません。

[B3] $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ なら、級数 Σa_k は発散する。

[B2] の対偶。

[B4] 負でない実数の数列 $\{a_k\}$ があり、部分和の数列が有界なら、級数 Σa_k は収束する。

部分和 A_n は

$$A_1 = a_1\ ,\ A_2 = a_1 + a_2\ ,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3\ ,\ \ldots$$

と続くために、$a_k \geq 0$ なら $\{A_n\}$ は広義単調増加の数列です。なので、[A11] から $\{A_n\}$ が有界なら収束します。収束するならコーシー列なので、[B1] から Σa_k は収束します。そして [A11] から、広義単調増加の $\{A_n\}$ の極限は上限なので

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} A_n = \sup\{A_n\}$$

もしくは、広義単調増加なので、適当な N によって

$$A'_n = a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n$$

と与えれば

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = \sup\{A'_n\} \quad (n \geq N)$$

としても成立するので、このときでも Σa_k は収束します。

また、級数が収束するなら部分和の数列 $\{A_n\}$ はコーシー列で、コーシー列は有界なので、これは必要十分条件です。

[B5] $|a_i|$ の級数が収束するなら、a_i の級数は収束する (絶対収束なら収束する)。

a_i の絶対値での級数 $\Sigma|a_i|$ が収束するなら、(6) から

$$|\sum_{i=k+1}^{m} a_i| < \epsilon \quad (m > k > N(\epsilon))$$

となる自然数 N がいます。一方で、$n > m$ として

$$A_n - A_m = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

に対して、a_i の部分和 A_n の絶対値 $|A_n|$ は三角不等式から

$$|A_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

となっていることを使うと

$$|A_n - A_m| = |\sum_{i=k+1}^{m} a_i| \leq \sum_{i=k+1}^{m} |a_i|$$

なので

$$|A_n - A_m| < \epsilon \quad (m, n > N(\epsilon))$$

となる $N(\epsilon)$ がいるので、$\{A_n\}$ はコーシー列です。コーシー列は収束するので Σa_i は収束します。よって、絶対収束なら収束します。

[B6] p を実数として

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

と定義される級数をゼータ関数 (zeta function) と言い、$p > 1$ のとき収束する。

級数の各項を

$$1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) + (\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}) + (\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15}) + \cdots$$

とまとめると、括弧内の分母は、第 2 項は 2 と 3 の 2 項、第 3 項は 4 から 7 の 4 項、第 4 項は 8 から 15 の 8 項と続いていきます。そうすると、第 2 項は $(1/2)^p$ が 2 個、第 3 項は $(1/4)^p$ が 4 個、第 4 項は $(1/8)^p$ が 8 個あるより小さいです。このことから、$m = 2^{n+1} - 1$ の部分和とすると

$$\begin{aligned}
A_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^p} &= 1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) + (\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}) + \cdots + (\frac{1}{(2^n)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}) \\
&< 1 + 2 \times \frac{1}{2^p} + 4 \times \frac{1}{4^p} + \cdots + 2^n \frac{1}{(2^n)^p} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^n}
\end{aligned}$$

これは等比数列の和なので

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^n} &= \frac{1-u^{n+1}}{1-u} \quad (u = \frac{1}{2^{p-1}}) \\
&< \frac{u}{u-1} \quad (\frac{1}{2^{p-1}} > \frac{1}{(2^{p-1})^{n+1}} - 1)
\end{aligned}$$

n とは無関係な値に制限されているために $\{A_m\}$ は上に有界です。$\{A_m\}$ は有界な単調数列なので [A11] から収束し、収束する数列はコーシー列です。というわけで、部分和がコーシー列なので、ゼータ関数は $p > 1$ のとき収束します。また、$p \leq 1$ では発散しますが同じように項をまとめていけば示せます。

[B7] 比較判定法 (comparison test)
$0 \leq a_k \leq b_k$ $(k \geq N)$ のとき、Σb_k が収束するなら Σa_k は収束し、Σa_k が発散するなら Σb_k は発散する。

A'_k, B'_k を自然数 N に対して

$$A'_k = a_N + a_{N+1} + \cdots + a_k \ , \ B'_k = b_N + b_{N+1} + \cdots + b_k \quad (k \geq N)$$

として、数列 $\{A'_k\}, \{B'_k\}$ を作ります。Σb_k が収束するなら部分和はコーシー列なので $\{B'_k\}$ は有界で、$0 \leq a_k \leq b_k$ から $A'_k \leq B'_k$ なので $\{A_k\}$ も有界になります。よって、[B4] から Σa_k は収束します。
発散する場合は収束する場合の対偶です。

[B8] $p > 1$ に対して $\{k^p a_k\}$ が収束するなら、Σa_k は絶対収束する。

数列 $\{k^p a_k\}$ $(p > 1)$ は収束するので

$$k^p|a_k| - |c| \leq |k^p a_k - c| < \epsilon \quad (k > N(\epsilon) \ , \ \lim_{k\to\infty} k^p a_k = c)$$

$\epsilon = 1$ と選べば

$$|a_k| < \frac{|c|+1}{k^p}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c|+1}{k^p}$$

[B6] から右辺は収束するので、$\Sigma|a_k|$ は収束します。よって、Σa_k は絶対収束します。

[B9] ダランベールの収束判定法 (ratio test)
数列 $\{a_k\}$ において、$|a_{k+1}/a_k| \leq r\ (k \geq N)$ となる $0 < r < 1$ と自然数 N がいるなら、Σa_k は絶対収束し、$|a_{k+1}/a_k| \geq 1$ のとき発散する。

$0 < r < 1$ と自然数 N に対して数列 $\{a_k\}$ が

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq r \quad (k \geq N)$$

となるとします。これから

$$|\frac{a_{N+1}}{a_N}|\ ,\ |\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}|\ ,\ \ldots, |\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}| \leq r$$

となっているので

$$|\frac{a_{N+1}}{a_N}||\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}|\cdots|\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}| \leq r^m$$

左辺は

$$|\frac{a_{N+1}}{a_N}||\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}|\cdots|\frac{a_{N+m-1}}{a_{N+m-2}}||\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}| = |\frac{a_{N+m}}{a_N}|$$

なので

$$|\frac{a_{N+m}}{a_N}| \leq r^m$$

$$|a_{N+m}| \leq |a_N|r^m$$

これを使って

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i| = \sum_{i=1}^{N}|a_i| + \sum_{m=1}^{n}|a_{N+m}| \leq \sum_{i=1}^{N-1}|a_i| + |a_N| + \sum_{m=1}^{n}|a_N|r^m = \sum_{i=1}^{N-1}|a_i| + \sum_{m=0}^{n}|a_N|r^m$$

としたとき、最右辺の第 2 項は等比数列の和なので、$0 < r < 1$ のために $n \to \infty$ で収束します。よって、比較判定法から $\Sigma|a_k|$ は収束するので、Σa_k は絶対収束します。

$r > 1$ では $|a_N| < |a_{N+1}| < \cdots$ と増加していくために、$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ です。よって、[B3] から発散します。

極限を取った形にもできて

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = r$$

としたとき、$r < 1$ なら級数は収束し、$r > 1$ なら発散します。これは、$r < r' < 1$ となる r' を使って、$k \geq N$ に対して

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < r' \quad (k \geq N)$$

となっているなら級数は収束するので、その $|a_{k+1}/a_k|$ の極限が $r < 1$ なら収束すると言えます。$r > 1$ で発散するのも同様です。ただし、$r = 1$ のとき収束するか発散するかを判断できません。

[B10] コーシーの収束判定法 (root test)

数列 $\{a_k\}$ において、$|a_k|^{1/k} \leq r$ $(k \geq N)$ となる $0 < r < 1$ と N がいるなら、級数 Σa_k は絶対収束し、$|x_k|^{1/k} \geq 1$ なら発散する。

$|a_k|^{1/k} \leq r$ $(k \geq N)$ となる $0 < r < 1$ と自然数 N がいるとして

$$|a_k| \leq r^k$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} r^k$$

右辺は等比数列なので収束します。よって、比較判定法から $\Sigma|a_k|$ は収束するので、Σa_k は絶対収束します。

$|a_k| \geq 1$ での数列の極限は 0 にはならないので、[B3] から発散します。

極限を取った形にして

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = r$$

としたときは、$r < 1$ なら級数は収束し、$r > 1$ なら発散します。$r < r' < 1$ を使うと、$|x_k|^{1/k} < r'$ $(k \geq N)$ のとき級数が収束するので、$|a_k|^{1/k}$ の極限が $r < 1$ なら収束すると言えます。発散も同様です。ただし、$r = 1$ のとき収束するか発散するかを判断できません。