# コーシーの主値積分とアダマール正則化

何も考えずに積分公式を使うと勘違いした結果を出してしまう例として、積分範囲内で特異点を持つ $f(x)/(x-x_0)^n$ の形をした積分を扱います。
「複素積分」ではコーシーの主値積分を複素積分で求めてますが、ここでは直接実行します。

　$F(x)=1/(x-x_0)$ の積分

$$\int_a^b dx\frac{1}{x-x_0}\qquad(a<x_0<b)$$

を実行しようとします。$F(x)$ は $x=x_0$ で正則でなく、$x=x_0$ は特異点となっています (「複素積分」参照)。なので、積分をこの範囲で実行することはできないですが (リーマン積分、ルベーグ積分の定義上実行できない)、簡単な積分公式から計算できたように思えてしまいます。しかし、数値計算で例えば台形公式で積分を計算してみると、結果が 1 つの値に収束しません (リーマン積分の意味で積分可能でないことに対応)。これは $x=x_0$ の点で $F(x=x_0)$ は発散してしまうからです。これをどうにかするために、コーシーの主値積分

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx\ F(x)=\lim_{\epsilon\to0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon}dx\ F(x)+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\ F(x)\Big)\qquad(a<x_0<b)$$

によって積分を定義します。pv が主値積分であることを表しています。どうにかすると言っているのは、積分が発散しないように正則化することで、コーシーの主値積分によって積分を正則化しています。この正則化による話をしていきます。
　ここで考えるのは

$$\int_a^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^{m+1}}\qquad(a<x_0<b\ ,\ m=0,1,2,\ldots)$$

という積分です。$f(x)$ は $a\leq x\leq b$ で連続的な関数です。この積分範囲は $x=x_0$ の特異点を含んでいるので、主値積分の形にして

$$\lim_{\epsilon\to0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon}dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^{m+1}}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^{m+1}}\Big)$$

これから見ていくように、この積分の結果は $m\geq1$ のとき $\epsilon$ を含む発散項を持ち、積分結果は有限の値になりません。なので、主値積分としただけでは積分から発散を取り除けません。これに対処するために、発散項がどのように出てくるのかを求めます。
　まずは、$m=0$ の場合を計算します。これは主値積分によって

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{f(x)}{x-x_0}\qquad(a<x_0<b)$$

とするだけで有限の結果を出せます。$f(x)=1$ のときは簡単に積分を実行できて

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{1}{x-x_0} &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{1}{x-x_0}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{1}{x-x_0}\Big) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}(\log|x_0-\epsilon-x_0|-\log|a-x_0|+\log|b-x_0|-\log|x_0+\epsilon-x_0|) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}(\log|b-x_0|-\log|a-x_0|+\log|\epsilon|-\log|\epsilon|) \\
&= \log\frac{b-x_0}{x_0-a} \quad (a<x_0<b)
\end{aligned} \tag{1}
$$

この場合は $\epsilon$ の寄与が出てこず、積分の結果は有限になります。

主値積分は $\epsilon\to 0$ で元の積分の形になるようにしているので

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}
$$

と書き換えて実行しても同じ結果が出てくることが予想できます。これも簡単に計算できて

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\frac{y}{y^2+\epsilon^2} \quad (y=x-x_0) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{(a-x_0)^2}^{(b-x_0)^2} dy^2\frac{1}{y^2+\epsilon^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}(\log|(b-x_0)^2+\epsilon^2|-\log|(a-x_0)^2+\epsilon^2|) \\
&= \frac{1}{2}(\log|(b-x_0)^2|-\log|(a-x_0)^2|) \\
&= \log\frac{b-x_0}{x_0-a}
\end{aligned}
$$

このように実際に同じ結果が出て来ます。なので、この主値積分は

$$
\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{1}{x-x_0}=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}
$$

と定義することもできます。

$f(x)$ がいるときでも同様に

$$
\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{f(x)}{x-x_0}=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)f(x)}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \tag{2}
$$

と成立します。確かめるために、$f(x)$ は $x_0$ 周りでテーラー展開できるとします。テーラー展開は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+\frac{df}{dx}|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots \\
&= f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

$f^{(n)}(x_0)$ は

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}\ ,\ f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{x=x_0}\ ,\ \cdots$$

としています。これを主値積分に入れれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{pv}\int_a^b dx \frac{f(x)}{x-x_0} &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{x-x_0}\Big) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{1}{x-x_0}(f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n) \\
&\qquad + \int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{1}{x-x_0}(f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n)\Big) \\
&= f(x_0)\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{1}{x-x_0} \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} + \int_{x_0+\epsilon}^b dx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}\Big) \\
&= f(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a} \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_a^{x_0-\epsilon} dx(x-x_0)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_{x_0+\epsilon}^b dx(x-x_0)^{n-1}\Big)
\end{aligned}$$

第二項は $n \geq 1$ であるために特異点を含まないので、素直に積分して

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_a^{x_0} dx(x-x_0)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_{x_0}^b dx(x-x_0)^{n-1} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_a^b dx(x-x_0)^{n-1} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n}f^{(n)}(x_0)((b-x_0)^n - (a-x_0)^n)
\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{f(x)}{x-x_0} = f(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^n - (a-x_0)^n\big) \tag{3}$$

同様のことを (2) の右辺で行うと、(1) を使って

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)f(x)}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}\big(f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\big) \\
&= f(x_0)\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \\
&= f(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}
\end{aligned}
$$

これの第二項は、$n\geq 1$ なので $x=x_0$ のとき $\epsilon=0$ でも特異点を含みません。なので、$\epsilon=0$ として積分を実行できて

$$
\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^2}=\int_a^b dx(x-x_0)^{n-1}=\frac{1}{n}((b-x_0)^n-(a-x_0)^n)
$$

となることから

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)f(x)}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}=f(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n}f^{(n)}(x_0)((b-x_0)^n-(a-x_0)^n)
$$

これは (3) と同じ結果です。なので、(2) が成立します。

次に $m=1$ として

$$
\int_a^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}
$$

を見てみます。これも $x_0\pm\epsilon$ で分けて

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon}dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}\Big)
$$

このときはどういう状況になっているのか具体的に見るために、$f(x)=1$ の場合を計算してみます。これも素直に積分すると

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon}dx\frac{1}{(x-x_0)^2}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{1}{(x-x_0)^2}\Big) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{a-x_0}^{-\epsilon}dy\frac{1}{y^2}+\int_{\epsilon}^{b-x_0}dy\frac{1}{y^2}\Big) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\big(-(\frac{1}{-\epsilon}-\frac{1}{a-x_0})-(\frac{1}{b-x_0}-\frac{1}{\epsilon})\big) \\
&= -\frac{1}{x_0-a}-\frac{1}{b-x_0}+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{2}{\epsilon}
\end{aligned} \tag{4}
$$

このように発散項 $2/\epsilon$ が出て来ます。なので、積分を有限の値にするためには $2/\epsilon$ の項を消す必要があります。そのためにアダマール (Hadamard) 正則化という手続きがあり

$$\mathcal{H}\int_a^b \frac{f(x)}{(x-x_0)^2}$$

と書かれます。この正則化の手続きは単純で、$1/\epsilon$ の項を取り除いて有限部分だけを使うというものです。今の場合では

$$\mathcal{H}\int_a^b \frac{1}{(x-x_0)^2} = -\frac{1}{x_0-a} - \frac{1}{b-x_0}$$

となります。このためアダマール正則化は

$$\mathcal{H}\int_a^b \frac{1}{(x-x_0)^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{1}{(x-x_0)^2} + \int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{2}{\epsilon}\Big)$$

と定義できます。

アダマール正則化の別の定義として、主値積分の微分としても定義できます。実際に (1) を微分してみると

$$\frac{d}{dx_0}\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{1}{x-x_0} = \frac{d}{dx_0}\log\frac{b-x_0}{x_0-a} = -\frac{1}{x_0-a} - \frac{1}{b-x_0}$$

となって一致しています。なので

$$\mathcal{H}\int_a^b \frac{1}{(x-x_0)^2} = \frac{d}{dx_0}\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{1}{x-x_0}$$

と定義できます。

これらの定義は $f(x)$ に対しても成立していて

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\int_a^b \frac{f(x)}{(x-x_0)^2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2} + \int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2} - \frac{2f(x)}{\epsilon}\Big)\\ &= \frac{d}{dx_0}\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{f(x)}{x-x_0}\end{aligned} \tag{5}$$

これらも $f(x)$ をテーラー展開すれば確かめられます。

まず一行目が成立していることを確かめます。計算するものは

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2} + \int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}\Big)$$

という積分です。これは

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}\Big)\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\Big(f(x_0)\big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{1}{(x-x_0)^2}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{1}{(x-x_0)^2}\big)\\
&\qquad\qquad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{(x-x_0)^n}{(x-x_0)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{(x-x_0)^n}{(x-x_0)^2}\Big)\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\Big(f(x_0)\big(-\frac{1}{x_0-a}-\frac{1}{b-x_0}\big)+\frac{2f(x_0)}{\epsilon}\\
&\qquad\qquad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_a^{x_0-\epsilon} dx(x-x_0)^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_{x_0+\epsilon}^b dx(x-x_0)^{n-2}\Big)
\end{aligned}
$$

残っている積分は $n=1$ のときは (1) で、$n\geq 2$ は普通の積分なので

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{1}{x-x_0}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{1}{x-x_0}\Big)=\log\frac{b-x_0}{x_0-a}\qquad(n=1)\\
&\int_a^b dx(x-x_0)^{n-2}=\frac{1}{n-1}((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\qquad(n\geq 2)
\end{aligned}
$$

を入れて

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}\Big)\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\frac{2f(x_0)}{\epsilon}+f(x_0)\big(-\frac{1}{x_0-a}-\frac{1}{b-x_0}\big)\\
&\qquad\qquad+f^{(1)}(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!(n-1)}((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\Big)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

アダマール正則化はこれから発散項を除いて有限項のみにするので、

$$
\mathcal{H}\int_a^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}-\frac{2f(x_0)}{\epsilon}\Big)\tag{7}
$$

となり、(5) の 1 行目となります。

(5) の 2 行目は (3) から

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx_0}\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{f(x)}{x-x_0} &= \frac{d}{dx_0}\big(f(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n}f^{(n)}(x_0)((b-x_0)^n-(a-x_0)^n)\big) \\
&= f(x_0)(-\frac{1}{b-x_0}-\frac{1}{x_0-a})+f^{(1)}(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a} \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n}f^{(n+1)}(x_0)\big((b-x_0)^n-(a-x_0)^n)\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!n}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&= f(x_0)(-\frac{1}{b-x_0}-\frac{1}{x_0-a})+f^{(1)}(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a} \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n}f^{(n+1)}(x_0)\big((b-x_0)^n-(a-x_0)^n)\big)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big)
\end{aligned}
$$

和の部分は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n}f^{(n+1)}(x_0)\big((b-x_0)^n-(a-x_0)^n)\big)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\qquad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\qquad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\qquad +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\qquad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\qquad +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big) \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big)-f^{(1)}(x_0) \\
&\quad = f^{(1)}(x_0)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big)-f^{(1)}(x_0) \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1})\big)
\end{aligned}
$$

と変形できるので、(6),(7) と比較して

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx_0}\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{f(x)}{x-x_0} &= f(x_0)(-\frac{1}{b-x_0}-\frac{1}{x_0-a})+f^{(1)}(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a}\\
&\quad+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)}f^{(n)}(x_0)\big((b-x_0)^{n-1}-(a-x_0)^{n-1}\big)\\
&=\mathcal{H}\int_a^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}
\end{aligned}
$$

となり、(5) が成立しています。
　このように、

$$
\int_a^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}
$$

という形をした積分では、アダマール正則化によって有限の結果を取り出すことが行われます。これは一般化され

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}\int_a^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\lim_{\epsilon\to0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon}dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}}+\int_{x_0+\epsilon}^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}}-H_n(x_0,\epsilon)\Big)\\
&H_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!(n-k)}\frac{1-(-1)^{n-k}}{\epsilon^{n-k}}\qquad(n=1,2,\dots)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

となります。これの $n=0$ のときは主値積分です。例えば、$n=1,2,3$ のとき発散部分は

$$
\begin{aligned}
&H_1=f(x_0)\frac{1-(-1)^1}{\epsilon}=\frac{2f(x_0)}{\epsilon}\\
&H_2=\sum_{m=0}^{1}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!(2-m)}\frac{1-(-1)^{2-m}}{\epsilon^{2-m}}=\frac{f(x_0)}{2}\frac{1-(-1)^2}{\epsilon^2}+f^{(1)}(x_0)\frac{1-(-1)}{\epsilon}=\frac{2f^{(1)}(x_0)}{\epsilon}\\
&H_3=\sum_{m=0}^{2}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!(3-m)}\frac{1-(-1)^{3-m}}{\epsilon^{3-m}}=\frac{2}{3}\frac{f(x_0)}{\epsilon^3}+\frac{2f^{(2)}(x_0)}{\epsilon}
\end{aligned}
$$

となっています ($f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$)。また、微分の形では

$$
\mathcal{H}\int_a^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\big(\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{f(x)}{x-x_0}\big)
$$

と書けます。
　アダマール正則化は

$$
\lim_{\epsilon\to0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2f(x)}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}
$$

を使って定義することもできます。それを見るために、テーラー展開を入れて発散項を取り出します。テーラー展開から

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2 f(x)}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}\\
&\quad= \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2 f(x_0)}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}+\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\\
&\quad= f(x_0)\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}+\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}f^{(1)}(x_0)(x-x_0)\\
&\qquad+\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

第一項は

$$
\int dz\frac{z^2}{(z^2+c^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+c^2}+\frac{1}{2c}\arctan\frac{z}{c}
$$

を使えば

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{a-x_0}^{b-x_0}dy\frac{y^2}{(y^2+\epsilon^2)^2}\\
&\quad= \lim_{\epsilon\to 0}\big[-\frac{1}{2}\frac{y}{y^2+\epsilon^2}+\frac{1}{2\epsilon}\arctan\frac{y}{\epsilon}\big]_{a-x_0}^{b-x_0}\\
&\quad= \lim_{\epsilon\to 0}\big(-\frac{1}{2}\frac{b-x_0}{(b-x_0)^2+\epsilon^2}+\frac{1}{2\epsilon}\arctan\frac{b-x_0}{\epsilon}+\frac{1}{2}\frac{a-x_0}{(a-x_0)^2+\epsilon^2}-\frac{1}{2\epsilon}\arctan(-\frac{x_0-a}{\epsilon})\big)\\
&\quad= -\frac{1}{2}\frac{1}{b-x_0}+\frac{1}{2\epsilon}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{a-x_0}-\frac{1}{2\epsilon}(-\frac{\pi}{2})\qquad(\lim_{z\to\infty}\arctan(\pm z)=\pm\frac{\pi}{2})\\
&\quad= -\frac{1}{2}\frac{1}{b-x_0}-\frac{1}{2}\frac{1}{x_0-a}+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\pi}{2\epsilon}
\end{aligned}
$$

第二項は

$$
\int dz\frac{z^3}{(z^2+c^2)^2}=\frac{1}{2}\int dz^2\frac{z^2}{(z^2+c^2)^2}=\frac{1}{2}\int dt\frac{t}{(t+c^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{c^2}{t+c^2}+\frac{1}{2}\log|t+c^2|
$$

を使って

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^3}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}&=\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\big[\frac{\epsilon^2}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}+\log|(x-x_0)^2+\epsilon^2|\big]_a^b\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\big(\frac{\epsilon^2}{(b-x_0)^2+\epsilon^2}-\frac{\epsilon^2}{(a-x_0)^2+\epsilon^2}+\log|(b-x_0)^2+\epsilon^2|-\log|(x_0-a)^2+\epsilon^2|\big)\\
&=\log\frac{b-x_0}{x_0-a}
\end{aligned}
$$

第三項は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^{n+2}}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}$$

これは $n\geq 2$ から

$$\frac{(x-x_0)^4}{(x-x_0)^4}=1\ ,\ \ \frac{(x-x_0)^5}{(x-x_0)^4}=(x-x_0)\ ,\ \ \frac{(x-x_0)^6}{((x-x_0)^4}=(x-x_0)^2\ ,\ \ldots$$

のように、$\epsilon=0$ としても特異点を持たないです。なので

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^{n+2}}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}=\int_a^b dx(x-x_0)^{n-2}$$

よって

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\frac{(x-x_0)^2f(x)}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}\\&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\pi f(x_0)}{2\epsilon}+\frac{f(x_0)}{2}(-\frac{1}{b-x_0}-\frac{1}{x_0-a})+f^{(1)}(x_0)\log\frac{b-x_0}{x_0-a}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\int_a^b dx(x-x_0)^{n-2}\end{aligned}$$

発散項は第一項だけなので、アダマール正則化は

$$\mathcal{H}\int_a^b dx\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b dx\Big(\frac{(x-x_0)^2f(x)}{((x-x_0)^2+\epsilon^2)^2}-\frac{\pi f(x_0)}{2\epsilon}\Big)$$

と定義できます。

$f(x)=x^n$ ($n$ は整数) とした主値積分とアダマール正則化を計算します。他にも実際の計算で出てくる例はいくつもありますが、積分をどう計算するかの話になってしまうので、簡単に積分が実行できる $f(x)=x^n$ だけを行います (結果だけは最後に載せています)。

まずは主値積分

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{x^n}{x-x_0}$$

を求めます。二項定理を使って変形すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{x^n}{x-x_0}&=\mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0}dy\frac{(y+x_0)^n}{y}\\&=\mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0}dy\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_ky^kx_0^{n-k}\qquad({}_nC_k=\frac{n!}{(n-k)!k!})\\&=\mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0}dy\sum_{k=0}^{n}{}_nC_ky^{k-1}x_0^{n-k}\end{aligned}$$

$k=0$ のとき $1/y$ が出てくるので、そこは分離して

$$\mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k y^{k-1} x_0^{n-k} = x_0^n \mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy \frac{1}{y} + \mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k y^{k-1} x_0^{n-k}$$

第一項は

$$\begin{aligned} x_0^n \mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy \frac{1}{y} &= x_0^n \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{a-x_0}^{-\epsilon} dy \frac{1}{y} + \int_{\epsilon}^{b-x_0} dy \frac{1}{y}\Big) \\ &= x_0^n \lim_{\epsilon\to 0}(\log\epsilon - \log[x_0 - a] + \log[b - x_0] - \log\epsilon) \\ &= x_0^n \log\frac{b-x_0}{x_0-a} \end{aligned}$$

第二項は

$$\begin{aligned} \mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k y^{k-1} x_0^{n-k} &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{a-x_0}^{-\epsilon} dy + \int_{\epsilon}^{b-x_0} dy\Big) \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k y^{k-1} x_0^{n-k} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k ([\frac{1}{k}y^k]_{a-x_0}^{-\epsilon} + [\frac{1}{k}y^k]_{\epsilon}^{b-x_0}) x_0^{n-k} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \frac{1}{k}((-\epsilon)^k - (a-x_0)^k + (b-x_0)^k - (\epsilon)^k) x_0^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \frac{x_0^{n-k}}{k}((b-x_0)^k - (a-x_0)^k) \end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx \frac{x^n}{x-x_0} = x_0^n \log\frac{b-x_0}{x_0-a} + \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_nC_k}{k} x_0^{n-k}((b-x_0)^k - (a-x_0)^k)$$

となります。

今度は $(x-x_0)^2$ として

$$\mathcal{H}\int_a^b dx \frac{x^n}{(x-x_0)^2}$$

を求めます。これも二項定理を使って

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}\int_a^b dx\frac{x^n}{(x-x_0)^2} &= \mathcal{H}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\frac{(y+x_0)^n}{y^2}\\
&= \mathcal{H}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\frac{1}{y^2}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k y^k x_0^{n-k}\\
&= \mathcal{H}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k y^{k-2} x_0^{n-k}\\
&= \mathcal{H}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\ y^{-2}x_0^n + \mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\ ny^{-1}x_0^{n-1} + \mathcal{H}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\sum_{k=2}^{n} {}_nC_k y^{k-2} x_0^{n-k}
\end{aligned}
$$

第一項から発散項が出て来ます。
第一項は

$$
x_0^n\mathcal{H}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\ y^{-2} = x_0^n\mathcal{H}\int_a^b dy\frac{1}{(x-x_0)^2}
$$

という形なので、(4) や (8) から発散項は $H_1 = 2/\epsilon$ $(f(x_0)=1)$ です。なので

$$
\begin{aligned}
x_0^n\mathcal{H}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dy\ y^{-2} &= x_0^n\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon} dy\frac{1}{(x-x_0)^2} + \int_{x_0+\epsilon}^{b} dy\frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{2}{\epsilon}\Big)\\
&= x_0^n(-\frac{1}{x_0-a} - \frac{1}{b-x_0})
\end{aligned}
$$

第二項は主値積分 (1) から

$$
nx_0^{n-1}\mathrm{pv}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dx\ y^{-1} = nx_0^{n-1}\mathrm{pv}\int_a^b dx\frac{1}{x-x_0} = nx_0^{n-1}\log\frac{b-x_0}{x_0-a}
$$

第三項は素直に積分して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}\int_{a-x_0}^{b-x_0} dx\sum_{k=2}^{n} {}_nC_k y^{k-2} x_0^{n-k} &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{a-x_0}^{-\epsilon} dy + \int_{\epsilon}^{b-x_0} dy\Big)\sum_{k=2}^{n} {}_nC_k y^{k-2} x_0^{n-k}\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{{}_nC_k}{k-1}x_0^{n-k}\lim_{\epsilon\to 0}\big((-\epsilon)^{k-1} - (a-x_0)^{k-1} + (b-x_0)^{k-1} - (\epsilon)^{k-1}\big)\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{{}_nC_k}{k-1}x_0^{n-k}\big((b-x_0)^{k-1} - (a-x_0)^{k-1}\big)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}\int_a^b dx\frac{x^n}{(x-x_0)^2} = x_0^n\big(-\frac{1}{x_0-a} - \frac{1}{b-x_0}\big) + nx_0^{n-1}\log\frac{b-x_0}{x_0-a}\\
+ \sum_{k=2}^{n}\frac{{}_nC_k}{k-1}x_0^{n-k}\big((b-x_0)^{k-1} - (a-x_0)^{k-1}\big)
\end{aligned}
$$

となります。
　最後に結果だけをいくつか載せておきます。

・pv：コーシーの主値積分
・$\mathcal{H}$：アダマール正則化
・$n$：整数
・$\gamma = 0.57721\ldots$：オイラー定数
・$a < x_0 < b$

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx \frac{1}{x-x_0} = \log\frac{b-x_0}{x_0-a}$$

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx \frac{x}{x-x_0} = x_0\log\frac{b-x_0}{x_0-a} + (b-a)$$

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx \frac{x^n}{x-x_0} = x_0^n\log\frac{b-x_0}{x_0-a} + \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{k}x_0^{n-k}\big((b-x_0)^k-(a-x_0)^k\big)$$

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx \frac{e^x}{x-x_0} = e^{x_0}\big(\log\frac{b-x_0}{x_0-a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(b-x_0)^k-(a-x_0)^k}{k!k}\big)$$

$$\mathrm{pv}\int_a^b dx \frac{e^{-x}}{x-x_0} = e^{-x_0}\big(\log\frac{b-x_0}{x_0-a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(b-x_0)^k-(a-x_0)^k}{k!k}\big)$$

$$\mathrm{pv}\int_0^\infty dx \frac{e^{-x}}{x-x_0} = e^{-x_0}\big(\log\frac{1}{x_0} - \gamma - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_0^k}{k!k}\big)$$

$$\mathcal{H}\int_a^b dx \frac{1}{(x-x_0)^2} = -\frac{1}{b-x_0} - \frac{1}{x_0-a}$$

$$\mathcal{H}\int_a^b dx \frac{x}{(x-x_0)^2} = x_0\big(-\frac{1}{b-x_0} - \frac{1}{x_0-a}\big) + \log\frac{b-x_0}{x_0-a}$$

$$\mathcal{H}\int_a^b dx \frac{x^n}{(x-x_0)^2} = x_0^n(-\frac{1}{b-x_0} - \frac{1}{x_0-a}) + nx_0^{n-1}\log\frac{b-x_0}{x_0-a} + \sum_{k=2}^{n}\frac{{}_nC_k}{k-1}x_0^{n-k}\big((b-x_0)^{k-1}-(a-x_0)^{k-1}\big)$$

$$\mathcal{H}\int_a^b dx \frac{e^x}{(x-x_0)^2} = e^{x_0}\big(\frac{b-a}{(b-x_0)(a-x_0)} + \log\frac{b-x_0}{x_0-a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(b-x_0)^k-(a-x_0)^k}{(k+1)!k}\big)$$

$$\mathcal{H}\int_a^b dx \frac{e^{-x}}{(x-x_0)^2} = e^{-x_0}\big(\frac{b-a}{(b-x_0)(a-x_0)} - \log\frac{b-x_0}{x_0-a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(b-x_0)^k-(a-x_0)^k}{(k+1)!k}\big)$$