直交多項式

関数が多項式で近似できることを見てから、直交多項式の話をします。ここでは、グラム・シュミットの正規直交法と一般化されたロドリゲスの公式を示しています。ベクトルとしての話はほとんどしていません。
最初にワイエルシュトラスの近似定理を示してますが、飛ばして平気です。
括弧付きの添え字を付けているのは多項式としています。

多項式 (polynomial)$P_{(n)}$ は

$$P_{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

と定義され、最大で n 次の項を含むとき n 次多項式と呼ばれます。a_k は定数です。注意として、多項式 $P_{(n)}$ は

$$P_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \ P_{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} a'_k x^k$$

において、一般的に $a_k \neq a'_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ です。
連続な関数が多項式で近似できることを示します。

- ワイエルシュトラスの近似定理

  実数の関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続なら、$[a, b]$ において極限が $f(x)$ となる n 次多項式 $P_{(n)}(x)$ が存在する。

  まず、状況を簡単にします。閉区間 $[a, b]$ は x を

$$\frac{1}{b-a}((x-a)(1-c) + (b-x)c)$$

と置き換えれば、$[c, 1-c]$ になります。c を 0 に選ぶことにして、$[0, 1]$ で連続とします。
$[0, 1]$ での $f(x)$ から

$$h(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$$

として新しく $h(x)$ を作ると、$h(0) = h(1) = 0$ です。さらに、$[0, 1]$ で連続なので、$[0, 1]$ の外側では $h(x) = 0$ とすれば、x 全体に対して連続になります。そして、この式から分かるように、$h(x)$ が多項式の極限であるなら、$f(x)$ もそうなります。よって、このような $h(x)$ が多項式の極限になることを示せば十分です。
というわけで、$f(x)$ を $[0, 1]$ で連続、$[0, 1]$ の外側で 0、$f(0) = f(1) = 0$ になっているとしていきます。
まず、$Q_n(x)$ として

$$Q_n(x) = q_n(1-x^2)^n \quad (n=1,2,\dots)$$
$$\int_{-1}^{1} dx Q_n(x) = 1$$

q_n は定数です。Q_n から多項式を作ります。これは単純で、まず

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} dt f(x+t) Q_n(t)$$

と与えます。f は $[0,1]$ の外側で 0 としているので、$f(0)$ から $f(1)$ になるように置き換えて

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} dt f(x+t) Q_n(t) = \int_{0}^{1} dt f(t) Q_n(t-x)$$

$Q_n(t-x)$ は

$$Q_1(t-x) = q_1(1-(t-x)^2) = q_1(1-(t^2+x^2-2tx))$$
$$Q_2(t-x) = q_2(1-(t-x)^2)^2 = q_2(1+t^4+x^4+4tx^3+6t^2x^2+4t^3x-2(t^2+x^2-2tx))$$

と続いているので、それに $f(t)$ をかけて 0 から 1 の範囲で t 積分すれば、x の多項式が出てきます。よって、P_n は多項式です。

後で使うので、Q_n の制限を求めます。Q_n の積分は

$$\int_{-1}^{1} dx(1-x^2)^n = 2\int_{0}^{1} dx(1-x^2)^n$$

積分範囲において $1-x^2$ は常に正なので、上限を 1 より小さくなる $1/\sqrt{n}$ に置き換えたものより大きいことから

$$\int_{-1}^{1} dx(1-x^2)^n \geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} dx(1-x^2)^n$$

二項定理から

$$(1-x^2)^n = 1 + \frac{n!}{(n-1)!}(-x^2) + \frac{n!}{2(n-2)!}(-x^2)^2 + \cdots = 1 - nx^2 + \cdots$$

これの差を見るために

$$g(x) = (1-x^2)^n - (1-nx^2)$$
$$\frac{dg}{dx} = -2nx(1-x^2)^{n-1} + 2nx = 2nx(1-(1-x^2)^{n-1})$$

とすれば、$g(0)=0$ と、x は 0 から 1 なので dg/dx の括弧部分は常に正であるために、$g(x)$ は正と分かります。よって

$$2\int_0^{1/\sqrt{n}} dx(1-x^2)^n \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} dx(1-nx^2) = 2(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{n}{3}\frac{1}{n\sqrt{n}}) = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

となり

$$1 = \int_{-1}^{1} dxQ_n(x) = q_n\int_{-1}^{1} dx(1-x^2)^n > \frac{q_n}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ q_n < \sqrt{n}$$

これから、$\gamma \leq x \leq 1$ $(\gamma > 0)$ に対して

$$Q_n(x) = q_n(1-x^2)^n \leq \sqrt{n}(1-x^2)^n \leq \sqrt{n}(1-\gamma^2)^n \tag{1}$$

と分かります。

知りたいのは $P_{(n)} = P_n$ の極限が $f(x)$ になるかなので

$$\begin{aligned}
|P_{(n)}(x) - f(x)| &= |\int_{-1}^{1} dtf(x+t)Q_n(t) - f(x)| \\
&= |\int_{-1}^{1} dtf(x+t)Q_n(t) - f(x)\int dtQ_n(t)| \\
&= |\int_{-1}^{1} dt(f(x+t)-f(x))Q_n(t)| \\
&\leq \int_{-1}^{1} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)
\end{aligned}$$

$Q_n(t)$ は正なので絶対値をつけていません。f は $[0,1]$ で連続なので、任意の $\epsilon > 0$ と対応する $\delta(\epsilon) > 0$ に対して $|y-x| < \delta(\epsilon)$ なら

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

となっています。δ で積分範囲を分割すると

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t) \\
&\quad = \int_{-1}^{-\delta} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t) + \int_{-\delta}^{\delta} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t) + \int_{\delta}^{1} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)
\end{aligned}
$$

第 2 項は $|y-x| = |x+t-x| = |t| \leq \delta$ なので

$$
\int_{-\delta}^{\delta} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t) < \frac{\epsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} dtQ_n(t)
$$

第 1 項と第 3 項ではこのようにならないので、$|f(x)|$ の最大値を M として

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{-\delta} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t) \leq 2M\int_{-1}^{-\delta} dtQ_n(t) \\
\int_{\delta}^{1} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t) \leq 2M\int_{\delta}^{1} dtQ_n(t)
\end{aligned}
$$

Q_n の積分は (1) を使うと、$\delta \leq t \leq 1$ から

$$
\int_{\delta}^{1} dtQ_n(t) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n\int_{\delta}^{1} dt = \sqrt{n}(1-\delta^2)^n(1-\delta) < \sqrt{n}(1-\delta^2)^n
$$

なので

$$
\int_{-1}^{1} dt|f(x+t)-f(x)|Q_n(t) < 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2}
$$

右辺第 1 項は n を大きくとれば 0 に近づきます。大雑把に示すなら、まず対数を取り

$$
\log[\sqrt{n}(1-\delta^2)^n] = \frac{1}{2}\log n + n\log(1-\delta^2) = \frac{1}{2}\log n - n|\log(1-\delta^2)|
$$

$1-\delta^2 < 1$ なので絶対値をつけています。n を増加させると、対数的に増加する第 1 項と n に比例する第 2 項との差なので、$-\infty$ に向かいます。対数が無限大になるのは $\log 0$ のときなので、$\sqrt{n}(1-\delta^2)^n$ は 0 です。

よって

$$|P_{(n)}(x) - f(x)| = \int_{-1}^{1} dt |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) < \frac{\epsilon}{2}$$

となるので、極限が $f(x)$ となる多項式 $P_{(n)}(x)$ が存在します。また、複素関数では実部と虚部に分けて同様にすれば求まります。

この定理によって、ある区間における連続な関数は多項式で近似できることが分かりました。実際に関数を近似するときには直交多項式が使われるので、それを見ていきます。

関数の直交性を定義します。ここでは実数のみとします。まず、関数の内積を与えます。内積は 2 つのベクトルからスカラーを作るものなので、関数の内積はその変数に対して積分することで与えられており

$$\int_a^b dx F(x) G(x) w(x)$$

と定義されます (実数の関数の場合)。$w(x)$ は正の実数の関数 ($w(x) > 0$) でウェイト関数（weight function）と呼ばれます。ウェイト関数は F, G に含めてしまえば消せますが、分離しておいたほうが便利なので一般的にはこのように書かれます。直交は内積が 0 になることなので、これが 0 のとき $F(x)$ と $G(x)$ は直交すると言われます。なので、直交多項式 $P_{(n)}$ は

$$\int_a^b dx P_{(m)} P_{(n)} w(x) = A_n \delta_{mn} \tag{2}$$

となる多項式のことです。δ_{mn} はクロネッカーデルタ ($n = m$ なら 1、$n \neq m$ なら 0)、A_n は定数です。

連続な関数が多項式で近似されることは別の言い方ができます。多項式は $\{x^n\} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ に係数を付けた和です。そして、$\{x^n\}$ に対して

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$$

となるのが、$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のときなので、$\{x^n\}$ は線形独立です。つまり、連続な関数 $f(x)$ は $\{x^n\}$ の線形結合で近似できると言えます。これはベクトルを基底で展開することに対応し、$\{x^n\}$ を基底として関数を展開できるということです。このときに、直交するという条件を加えることで出てくるのが直交多項式です。

というわけで、$\{x^n\}$ の線形結合から、与えられた内積において直交する $\{P_n\} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ の線形結合に変更します (ある内積が与えられたヒルベルト空間での直交系を作る)。これはグラム・シュミットの正規直交化法を使えばいいです。グラム・シュミットの正規直交化法は、線形独立なベクトル $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$ から

$$\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{v}_0 \ , \ \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{w}_0}{|\boldsymbol{w}_0|}$$

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{u}_0 \ , \ \boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{|\boldsymbol{w}_1|}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{u}_0 - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{u}_1 \ , \ \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{|\boldsymbol{w}_2|}$$

として、1 に規格化され直交するベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots$ を作る方法です。

$\boldsymbol{v}_i$ を $1, x, x^2, \ldots$ に変えて行います。$L_n(x) = x^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ として、内積はウェイト関数を 1 とすることで

$$\int_{-1}^{1} dx L_m(x) L_n(x)$$

と与えます。範囲を-1 から 1 にしてるのは結果が分かってるからです。これは

$$\int_{-1}^{1} dx L_m(x) L_n(x) = \int_{-1}^{1} dx\ x^m x^n = \int_{-1}^{1} dx\ x^{m+n} = \frac{1}{m+n+1}(1^{m+n+1} - (-1)^{m+n+1})$$

となるので、$m+n+1$ が偶数でないと 0 になりません。最初の方を取り出せば

$$\int_{-1}^{1} dx L_0 L_2 = \int_{-1}^{1} dx\ x^2 = \frac{2}{3}\ ,\ \int_{-1}^{1} dx L_0 L_1 = \int_{-1}^{1} dx\ x = 0\ ,\ \int_{-1}^{1} dx L_1 L_2 = \int_{-1}^{1} dx\ x^3 = 0$$

L_0 と L_1、L_1 と L_2 は直交し、L_0 と L_2 は直交していません。というわけで、グラム・シュミットの正規直交化法を使います。

L_0, L_1 は 1 に規格化するだけでよく

$$\int_{-1}^{1} dx\ L_0 L_0 = \int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{2}\ ,\ \int_{-1}^{1} dx\ L_1 L_1 = \int_{-1}^{1} dx\ x^2 = \frac{2}{3}$$

から

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} L_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} L_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

L_2 は

$$P_2 = L_2 - P_0 \int_{-1}^{1} dx P_0 L_2(x) - P_1 \int_{-1}^{1} dx P_1(x) L_2(x) = L_2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\ x^2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

実際に

$$\int_{-1}^{1} dx P_0 P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} dx (x^2 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = 0\ ,\ \int_{-1}^{1} dx P_1 P_2 = \int_{-1}^{1} dx (x^3 - \frac{1}{3} x) = 0$$

となり、直交します。このようにして、直交する P_n を求められます。1 に規格化せずに、$P_1(1) = P_2(1) = \cdots = 1$ になるように係数を変えて P_4 まで求めると

$$P_0(x) = 1\ ,\ P_1(x) = x\ ,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\ ,\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\ ,\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

P_n は見て分かるように n 次多項式なので、$\{x^n\}$ から直交多項式 $P_{(n)} = P_n$ が求められたことになります。この直交多項式はルジャンドル多項式 (Legendre polynomials) と呼ばれます。多くの直交多項式では 1 に規格化せずに、今のように係数を適当に選ぶようにして作られています。これを標準化 (standardization) と言ったりします。

このように作られたルジャンドル多項式 $P_{(n)}$ の線形結合として $[-1, 1]$ で連続な関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_{(n)}(x)$$

と展開されます。n の無限大の極限を取っています。このように、与えられた内積において直交するように $\{x^n\}$ を変更することで直交多項式が出てきます。係数 a_n は $P_{(n)}$ が直交しているので、$P_{(m)}$ を外からかけて積分すれば、(2) から

$$\int_{-1}^{1} dx P_{(m)}(x) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} dx P_{(m)}(x) P_{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A_n \delta_{mn} = a_m A_m$$

として取り出せます。

これで、$\{x^n\}$ から直交多項式が求められることと、直交多項式で関数が展開できることが分かりました。次に、別の方向から直交多項式を求める方法を見ていきます。

結果を先に出せば、n 次多項式 $C_{(n)}$ は

$$C_{(n)}(x) = \frac{1}{K_n} \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x) s^n(x)) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

$$\int_a^b dx \ P_{(m)} C_n(x) w(x) = 0 \quad (m < n) \tag{4}$$

と与えられます。s は 2 次以下の多項式、K_n は規格化定数、$P_{(m)}$ は任意の m 次多項式です。実数の関数 $w(x) > 0$ は a から b の範囲で積分可能で、両端において $w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0$ としています。これを一般化されたロドリゲスの公式 (generalized Rodrigues formula) と言います。(4) は $C_{(m)}, C_{(n)}$ でも成立するので、s, w を指定すれば直交多項式 $C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots$ が求められます。また、$C_{(n)}^2$ の場合は (9) になります。

(3) が n 次多項式になっていることと、直交関係 (4) を示します。まだ多項式になっているとは分からないとして、C_n を

$$C_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x) s^n(x)) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

このとき、C_1 は x の 1 次の多項式、$s(x)$ は 2 次以下の多項式、$w(x)$ は正の実数とします。$w(x)$ は a から b の範囲で積分可能とし、両端において $w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0$ とします。

必要な関係を求めていきます。w の微分は

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{w} \frac{d}{dx}(ws) \\ &= \frac{s}{w} \frac{dw}{dx} + \frac{ds}{dx} \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{w}{s}(C_{(1)} - \frac{ds}{dx}) \end{aligned}$$

これを使うと、k 次以下の任意の多項式を $q(x;k)$ として

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(ws^n q) &= s^n q\frac{dw}{dx} + nws^{n-1}q\frac{ds}{dx} + ws^n\frac{dq}{dx} \\
&= \frac{w}{s}s^n q(C_{(1)} - \frac{ds}{dx}) + nws^{n-1}q\frac{ds}{dx} + ws^n\frac{dq}{dx} \\
&= s^{n-1}w((C_{(1)} - \frac{ds}{dx})q + nq\frac{ds}{dx} + ws\frac{dq}{dx})
\end{aligned}
$$

$C_{(1)}, ds/dx$ は x の 1 次までなので、括弧内の第 1 項は $k+1$ 次以下の多項式 $q(x;k+1)$ です。$q(x;k)$ とは係数が変わりますが、そのまま q を使っています。第 2 項も同様に $q(x;k+1)$ です。第 3 項は、dq/dx が $k-1$ 次以下の多項式、s は 2 次以下の多項式なので、ここも $q(x;k+1)$ です。よって

$$
\frac{d}{dx}(ws^n q(x;k)) = ws^{n-1}q(x;k+1)
$$

さらに微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}(ws^n q(x;k)) &= \frac{d}{dx}(ws^{n-1}q(x;k+1)) \\
&= s^{n-1}q(x;k+1)\frac{dw}{dx} + (k-1)ws^{n-2}q(x;k+1)\frac{ds}{dx} + ws^{n-1}\frac{dq(x;k+1)}{dx} \\
&= s^{n-2}wq(x;k+1)(C_{(1)} - \frac{ds}{dx}) + (n-1)ws^{n-2}q(x;k+1)\frac{ds}{dx} + ws^{n-1}\frac{dq(x;k+1)}{dx} \\
&= s^{n-2}w\big(q(x;k+1)(C_{(1)} - \frac{ds}{dx}) + (n-1)q(x;k+1)\frac{ds}{dx} + s\frac{dq(x;k+1)}{dx}\big)
\end{aligned}
$$

これの括弧内は $q(x;k+2)$ の多項式になります。よって、繰り返すことで

$$
\frac{d^m}{dx^m}(ws^n q(x;k)) = ws^{n-m}q(x;k+m) \tag{5}
$$

左辺で $q(x;k=0)=1$ とすれば

$$
C_n = \frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}(w(x)s^n(x)) = \frac{1}{w(x)}ws^{n-n}q(x;n) = q(x;n) \tag{6}
$$

これから、C_n は n 次以下の多項式と分かります。

また、ws^n だけの微分は

$$
\frac{d}{dx}(ws^n) = ws^{n-1}q(x;1)
$$

右辺は $w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0$ なので、$n-1>0$ なら $x=a,b$ で 0 になります。このため、$n-m>0$ なら

$$\frac{d^m}{dx^m}(ws^n)|_{x=a,b} = ws^{n-m}q(x;m)|_{x=a,b} = 0 \tag{7}$$

となります。

任意の m 次多項式を $P_{(m)}$ として、$m < n$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_a^b dx P_{(m)}(x) C_n w(x) =& \int_a^b dx P_{(m)}(x) \frac{d^n}{dx^n}(w(x)s^n(x)) \\
=& \int_a^b dx P_{(m)}(x) \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)s^n(x)) \\
=& \big[P_{(m)}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)s^n(x))\big]_a^b - \int_a^b dx\ \frac{dP_{(m)}}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)s^n(x)) \\
=& -\int_a^b dx\ \frac{dP_{(m)}}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)s^n(x)) \\
=& -\int_a^b dx\ \frac{dP_{(m)}}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(w(x)s^n(x)) \\
=& (-1)\big(\big[\frac{dP_{(m)}}{dx}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(w(x)s^n(x))\big]_a^b + \int_a^b dx \frac{d^2P_{(m)}}{dx^2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(w(x)s^n(x))\big) \\
=& (-1)\int_a^b dx \frac{d^2P_{(m)}}{dx^2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(w(x)s^n(x))
\end{aligned}$$

と続いていきます。下から 2 行目で (7) を使っています。$P_{(m)}$ は x^m までを含んでいるので、m 回繰り返せば

$$\begin{aligned}
\int_a^b dx P_{(m)}(x) C_n w(x) &= (-1)^m \int_a^b dx\ \frac{d^mP_{(m)}}{dx^m}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(w(x)s^n(x)) \\
&= (-1)^m P_{(0)} \int_a^b dx \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(w(x)s^n(x)) \\
&= (-1)^m P_{(0)} \int_a^b dx \frac{d}{dx}\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(w(x)s^n(x)) \\
&= (-1)^m P_{(0)} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(w(x)s^n(x))\big|_a^b \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって、直交関係 (4) が求まりました。

C_n が n 次多項式になることを示します。C_n は n 次以下の多項式ですが、n 次多項式になっていると仮定して、x^n の項を分離すれば

$$C_n = q(x; n-1) + c_n x^n$$

このとき、$C_n^2 w$ の積分は

$$\int_a^b dx C_n^2(x)w(x) = \int_a^b dx(q(x;n-1)+c_n x^n)C_n w$$
$$= \int_a^b dx\ q(x;n-1)C_n w + c_n\int_a^b dx\ x^n C_n w$$
$$= c_n\int_a^b dx\ x^n C_n w$$

(4) から 2 行目の第 1 項は 0 です。左辺は C_n^2 と正の実数 $w(x)$ による積分なので、正の実数です。そうすると、右辺は一般的に $c_n \neq 0$ が要求されます。よって、n 次多項式と仮定したとき、$c_n \neq 0$ なので C_n は n 次多項式です。

また、n 次多項式と分かったので、(4) での $C_{(n)}$ 同士の積分は、$C_{(n)} = \Sigma c_k x^k$ として

$$h_n = \int_a^b dx C_{(n)}^2 w = \int_a^b dx\ C_{(n)}(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n)w$$
$$= \int_a^b dx\ C_{(n)}(p_{(n-1)} + c_n x^n)$$
$$= c_n\int_a^b dx\ C_{(n)} x^n w \tag{8}$$

と書けます。(3) を入れて、(7) を使えば

$$h_n = \frac{c_n}{K_n}\int_a^b dx\ x^n \frac{d^n}{dx^n}(w(x)s^n(x))$$
$$= \frac{c_n}{K_n}\int_a^b dx\ x^n \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(ws^n)$$
$$= \frac{c_n}{K_n}\Big[x^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(ws^n)\Big]_a^b - \frac{c_n}{K_n}\int_a^b dx \frac{dx^n}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(ws^n)$$
$$= (-1)\frac{c_n}{K_n}\int_a^b dx\ nx^{n-1}\frac{d}{dx}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(ws^n)$$
$$= (-1)\frac{c_n}{K_n}\Big(\Big[nx^{n-1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(ws^n)\Big]_a^b - \int_a^b dx\ n(n-1)x^{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(ws^n)\Big)$$
$$= (-1)^2\frac{c_n}{K_n}\int_a^b dx\ n(n-1)x^{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(ws^n)$$

と続いていくので、x^n が 1 になるまで n 回繰り返せば

$$h_n = (-1)^n \frac{c_n n!}{K_n}\int_a^b dx\ w(x)s^n(x) \tag{9}$$

となります。

これで一般化されたロドリゲスの公式が示せました。次に、$C_{(n)}$ の漸化式と微分方程式を求めます。

$C_{(n)}$ の漸化式から求めます。$C_{(n)}$ の係数を

$$
\begin{aligned}
C_{(n-1)} &= c_0^{(n-1)} + c_1^{(n-1)}x + \cdots + c_{n-1}^{(n-1)}x^{n-1} + c_n^{(n-1)}x^n \\
C_{(n)} &= c_0^{(n)} + c_1^{(n)}x + \cdots + c_{n-1}^{(n)}x^{n-1} + c_n^{(n)}x^n \\
C_{(n+1)} &= c_0^{(n+1)} + c_1^{(n+1)}x + \cdots + c_n^{(n+1)}x^n + c_{n+1}^{(n+1)}x^{n+1}
\end{aligned}
$$

と表記します。ここで

$$
C_{(n+1)} - \frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{c_n^{(n)}}xC_{(x)}
$$

とすると、$n+1$ の項は消えるので、これは n 次以下の多項式となります (x^n の係数が同じになる可能性があるため n 次以下としている)。このことから、k 次多項式 $C_{(k)}$ に適当な係数 a_k を付けて足していって等しくなるようにすれば

$$
C_{(n+1)} - \frac{c'_{n+1}}{c_n}xC_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} a_k C_{(k)} \tag{10}
$$

$C_{(m)}$ と w をかけて積分すると

$$
\int_a^b dx C_{(m)}C_{(n+1)}w - \frac{c'_{n+1}}{c_n}\int_a^b dx\ xC_{(m)}C_{(n)}w = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b dx C_{(m)}C_{(k)}w
$$

直交関係 (4) から、左辺の第 1 項は $m \leq n$ で消え、第 2 項は x がいるので $C_{(m)}$ に対して $m \leq n-2$ ($m+1 \leq n-1$) なら消えます。そうすると

$$
\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b dx C_{(m)}C_{(k)}w = 0 \quad\quad (m \leq n-2)
$$

$k \neq m$ なら積分は 0 になり、$k = m$ なら積分は 0 にならないので、和で生き残るのは $k = m$ のときで

$$
a_m \int_a^b dx C_{(m)}C_{(m)}w = 0
$$

これから、$a_m = 0$ ($m \leq n-2$) と分かります。このため

$$
\sum_{k=0}^{n} a_k C_{(k)} = a_0 C_{(0)} + \cdots + a_{n-2}C_{(n-2)} + a_{n-1}C_{(n-1)} + a_n C_{(n)} = a_{n-1}C_{(n-1)} + a_n C_{(n)}
$$

となり、(10) は

$$C_{(n+1)} - \frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{c_n^{(n)}} x C_{(n)} = a_{n-1} C_{(n-1)} + a_n C_{(n)} \tag{11}$$

後は a_{n-1} と a_n が分かればいいです。

a_{n-1} を取り出すために、(11) に $C_{(n-1)}$ をかけて積分すると

$$\int_a^b dx C_{(n+1)} C_{(n-1)} w - \frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{c_n^{(n)}} \int_a^b dx\ x C_{(n)} C_{(n-1)} w = a_{n-1} \int_a^b dx C_{(n-1)} C_{(n-1)} w + a_n \int_a^b dx C_{(n)} C_{(n-1)} w$$

$$-\frac{c'_{n+1}}{c_n} \int_a^b dx\ x C_{(n)} C_{(n-1)} w = a_{n-1} \int_a^b dx C_{(n-1)} C_{(n-1)} w \tag{12}$$

右辺は (8) から h_{n-1} になり、左辺は

$$\begin{aligned} x C_{(n-1)} &= x(c_0^{(n-1)} + c_1^{(n-1)} x + \cdots + c_{n-1}^{(n-1)} x^{n-1}) \\ &= c_0^{(n-1)} x + c_1^{(n-1)} x^2 + \cdots + c_{n-1}^{(n-1)} x^n \\ &= p_{(n-1)} + \frac{c_{n-1}^{(n-1)}}{c_n^{(n)}} c_n^{(n)} x^n \end{aligned}$$

と置き換えれば、$p_{(n-1)}$ は $n-1$ 次多項式なのでこの項は消えて

$$-\frac{c'_{n+1}}{c_n} \frac{c_{n-1}^{(n-1)}}{c_n^{(n)}} c_n^{(n)} \int_a^b dx\ C_{(n)} x^n w = -\frac{c'_{n+1}}{c_n} \frac{c_{n-1}^{(n-1)}}{c_n^{(n)}} h_n$$

そうすると、(12) から

$$\begin{aligned} -\frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{c_n} \frac{c_{n-1}^{(n-1)}}{c_n^{(n)}} h_n = a_{n-1} h_{n-1} \\ a_{n-1} = -\frac{h_n}{h_{n-1}} \frac{c_{n+1}^{(n+1)} c_{n-1}^{(n-1)}}{(c_n^{(n)})^2} \end{aligned}$$

として、a_{n-1} が求まります。

a_n は (11) での x^n の項を取り出すことで

$$
\begin{aligned}
C_{(n+1)}-\frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{c_n}xC_{(n)}&=a_{n-1}C_{(n-1)}+a_nC_{(n)}\\
c_n^{(n+1)}x^n-\frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{c_n}c_{n-1}^{(n)}x^n&=a_nc_n^{(n)}x^n\\
c_n^{(n+1)}-\frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{c_n^{(n)}}c_{n-1}^{(n)}&=a_nc_n^{(n)}\\
a_n&=\frac{c_n^{(n+1)}}{c_n^{(n)}}-\frac{c_{n+1}^{(n+1)}c_{n-1}^{(n)}}{(c_n^{(n)})^2}
\end{aligned}
$$

となります。
　まとめると

$$
A_n=\frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{c_n^{(n)}}\ ,\ B_n=a_n=\frac{c_n^{(n+1)}}{c_n^{(n)}}-\frac{c_{n+1}^{(n+1)}c_{n-1}^{(n)}}{(c_n^{(n)})^2}\ ,\ D_n=a_{n-1}=-\frac{h_n}{h_{n-1}}\frac{c_{n+1}^{(n+1)}c_{n-1}^{(n-1)}}{(c_n^{(n)})^2}
$$

として、(11) は

$$
C_{(n+1)}=(A_nx+B_n)C_{(n)}+D_nC_{(n-1)} \tag{13}
$$

これが $C_{(n)}$ の漸化式です。
　次に $C_{(n)}$ の微分方程式を作ります。(5) は $n=m=1$ のとき

$$
\frac{d}{dx}(wsq(x;k-1))=ws^{1-1}q(x,k-1+1)=wq(x;k)
$$

となるので、左辺は k 次以下の多項式です。そうすると、$C_{(n)}$ の微分は $n-1$ 次多項式なので、適当な係数 λ_k を使って

$$
\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n)}}{dx})=-w\sum_{k=1}^{n}\lambda_kC_{(k)} \tag{14}
$$

と書けます。$C_{(m)}$ をかけて積分すれば

$$
\int_a^b dxC_{(m)}\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n)}}{dx})=-w\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\int_a^b dxC_{(m)}C_{(k)}w
$$

右辺の積分は $k=m$ のとき h_m で、それ以外は 0 なので

$$
\int_a^b dxC_{(m)}\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n)}}{dx})=-\lambda_mh_m
$$

左辺は

$$\int_a^b dxC_{(m)}\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n)}}{dx}) = \int_a^b dx\frac{d}{dx}(C_{(m)}ws\frac{dC_{(n)}}{dx}) - w\int_a^b dx\ ws\frac{dC_{(m)}}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx})$$

これの左辺は $C_{(m)}$ は m 次多項式で、微分部分は n 次多項式なので、$m<n$ なら消えます。右辺第 1 項は $w(a)s(a)=w(b)s(b)=0$ なので消えます。よって

$$\int_a^b dx\ ws\frac{dC_{(m)}}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx} = 0 \quad (m<n)$$

となるので、$\lambda_m h_m = 0$ から $\lambda_m = 0$ $(m<n)$ です。そうすると、(14) で λ_n だけが消えずに残るので

$$\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n)}}{dx}) = -w\lambda_n C_{(n)} \tag{15}$$

として、$C_{(n)}$ の微分方程式になります。

残っている λ_n を求めます。(15) に $C_{(n)}$ をかけて積分すると、

$$\int_a^b dxC_{(n)}\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n)}}{dx}) = -\lambda_n\int_a^b dxwC_{(n)}C_{(n)}$$

右辺は $-\lambda_n h_n$ です。左辺は

$$\begin{aligned}\int_a^b dxC_{(n)}\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n)}}{dx}) &= \int_a^b dxC_{(n)}(\frac{d(ws)}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx} + ws\frac{d^2C_{(n)}}{dx^2})\\ &= \int_a^b dxC_{(n)}(w\frac{ds}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx} + s\frac{dw}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx} + ws\frac{d^2C_{(n)}}{dx^2})\\ &= \int_a^b dxwC_{(n)}(\frac{ds}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx} + \frac{s}{w}\frac{dw}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx} + s\frac{d^2C_{(n)}}{dx^2})\end{aligned} \tag{16}$$

s は 2 次以下の多項式なので ds/dx は最大で 1 次です。第 2 項は、w が多項式で書けたとき最大で x^k になっているとすれば

$$\frac{s}{w}\frac{dw}{dx} \ \Rightarrow\ \frac{x^2}{x^k}\frac{x^k}{x} = x$$

となるので、最大で 1 次です。よって、括弧内の第 1 項と第 2 項は $C_{(1)}$ に適当な係数 K をくっつけて

$$
\begin{aligned}
\int_a^b dxwC_{(n)}(\frac{ds}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx}+\frac{s}{w}\frac{dw}{dx}\frac{dC_{(n)}}{dx}) &= \int_a^b dxwC_{(n)}KC_{(1)}\frac{dC_{(n)}}{dx} \\
&= K\int_a^b dxwC_{(n)}C_{(1)}\frac{dC_{(n)}}{dx} \\
&= K\int_a^b dxwC_{(n)}(c_0^{(1)}+c_1^{(1)}x)\frac{d}{dx}(c_0^{(n)}+c_1^{(n)}x+\cdots+c_n^{(n)}x^n) \\
&= K\int_a^b dxwC_{(n)}(c_0^{(1)}+c_1^{(1)}x)(c_1^{(n)}+2c_2^{(n)}x+\cdots+nc_n^{(n)}x^{n-1}) \\
&= K\int_a^b dxwC_{(n)}c_1^{(1)}(c_1^{(n)}x+2c_2^{(n)}x^2+\cdots+nc_n^{(n)}x^n) \\
&= Kc_1^{(1)}\int_a^b dxwC_{(n)}(c_1^{(n)}x+2c_2^{(n)}x^2+\cdots+(n-1)c_{n-1}^{(n)}x^{n-1}+nc_n^{(n)}x^n) \\
&= nK\frac{dC_{(1)}}{dx}c_n^{(n)}\int_a^b dxwC_{(n)}x^n \\
&= nK\frac{dC_{(1)}}{dx}h_n
\end{aligned}
$$

(16) の第 3 項は

$$
\begin{aligned}
\int_a^b dxC_{(n)}ws\frac{d^2C_{(n)}}{dx^2} &= \int_a^b dxC_{(n)}ws\frac{d^2}{dx^2}(c_0^{(n)}+c_1^{(n)}x+\cdots+c_n^{(n)}x^n) \\
&= \int_a^b dxC_{(n)}ws\frac{d}{dx}(c_1^{(n)}+2c_2^{(n)}x+3c_3^{(n)}x^2+\cdots+nc_n^{(n)}x^{n-1}) \\
&= \int_a^b dxwC_{(n)}s(2c_2^{(n)}+6c_3^{(n)}x+\cdots+n(n-1)c_n^{(n)}x^{n-2}) \\
&= \int_a^b dxwC_{(n)}sp_{(n-2)}
\end{aligned}
$$

s が 1 次以下なら x^n が作れず 0 になります。なので、2 次多項式 $s=d_0+d_1x+d_2x^2$ として

$$
\begin{aligned}
\int_a^b dxwC_{(n)}(d_0+d_1x+d_2x^2)p_{(n-2)} &= d_2\int_a^b dxwC_{(n)}x^2p_{(n-2)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dx^2}\int_a^b dxwC_{(n)}(2c_2^{(n)}x^2+6c_3^{(n)}x^3+\cdots+n(n-1)c_n^{(n)}x^n) \\
&= \frac{1}{2}n(n-1)\frac{d^2s}{dx^2}c_n^{(n)}\int_a^b dxwC_{(n)}x^n \\
&= \frac{1}{2}n(n-1)\frac{d^2s}{dx^2}h_n
\end{aligned}
$$

s の微分にしているのは 1 次以下のとき 0 にできるからです。よって、λ_n は

$$nK\frac{dC_{(1)}}{dx}h_n+\frac{1}{2}n(n-1)\frac{d^2s}{dx^2}h_n= -\lambda_n h_n$$

$$\lambda_n= -n(K\frac{dC_{(1)}}{dx}+\frac{1}{2}(n-1)\frac{d^2s}{dx^2})$$

となります。

微分方程式を使って漸化式 (13) から $C_{(n+1)}$ を消せます。漸化式を微分して、ws をかけてまた微分して、(15) を入れると

$$\begin{aligned}
\frac{dC_{(n+1)}}{dx} &= A_nC_{(n)}+(A_nx+B_n)\frac{dC_{(n)}}{dx}+D_n\frac{dC_{(n-1)}}{dx}\\
\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n+1)}}{dx}) &= A_n\frac{d(ws)}{dx}C_{(n)}+A_nws\frac{dC_{(n)}}{dx}+\frac{d}{dx}((A_nx+B_n)ws\frac{dC_{(n)}}{dx})+D_n\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n-1)}}{dx})\\
&= A_n\frac{d(ws)}{dx}C_{(n)}+2A_nws\frac{dC_{(n)}}{dx}+(A_nx+B_n)\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n)}}{dx})+D_n\frac{d}{dx}(ws\frac{dC_{(n-1)}}{dx})\\
-w\lambda_{n+1}C_{(n+1)} &= A_n\frac{d(ws)}{dx}C_{(n)}+2A_nws\frac{dC_{(n)}}{dx}-E_nw\lambda_nC_{(n)}-D_nw\lambda_{n-1}C_{(n-1)} \qquad (E_n=A_nx+B_n)
\end{aligned}$$

左辺にまた漸化式を入れれば

$$\begin{aligned}
-\lambda_{n+1}(E_nC_{(n)}+D_nC_{(n-1)}) &= A_n\frac{1}{w}\frac{d(ws)}{dx}C_{(n)}+2A_ns\frac{dC_{(n)}}{dx}-E_n\lambda_nC_{(n)}-D_n\lambda_{n-1}C_{(n-1)}\\
2A_ns\frac{dC_{(n)}}{dx} &= -A_n\frac{1}{w}\frac{d(ws)}{dx}C_{(n)}+E_n\lambda_nC_{(n)}-\lambda_{n+1}E_nC_{(n)}+D_n\lambda_{n-1}C_{(n-1)}-\lambda_{n+1}D_nC_{(n-1)}\\
&= (-A_n\frac{1}{w}\frac{d(ws)}{dx}+E_n(\lambda_n-\lambda_{n+1}))C_{(n)}+D_n(\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1})C_{(n-1)}
\end{aligned}$$

このように、$C_{(n+1)}$ のいない漸化式になります。