n 次元極座標

3 次元極座標の拡張として n 次元での極座標を与えます。球の体積を求めるときにガンマ関数が出てきます。

n 次元の極座標を与えます。そのために、2 次元と 3 次元の対応を見ておきます。2 次元極座標 (r_2, ϕ) を

$$x = r_2 \cos\phi \ , \ y = r_2 \sin\phi$$

3 次元極座標 (r_3, θ, ϕ) を

$$x = r_3 \sin\theta \cos\phi \ , \ y = r_3 \sin\theta \sin\phi \ , \ z = r_3 \cos\theta$$

とします。このとき、θ は z 軸と動径との間の角度で、$z = r_3 \cos\theta$ が 2 次元にはいない 3 次元での新しい座標です (xy 平面に垂直)。そして、$r_3 \sin\theta = r_2$ と対応しており、r_2 は z 軸と直交しています。つまり、3 次元の r_3 を $\cos\theta$ にしたものが 3 次元目の軸、$\sin\theta$ にしたものが 2 次元の r_2 になります。同様に、r_2 は $\cos\phi$ によって 2 次元目の軸、$\sin\phi$ によって 1 次元に移ります。1 次元まできたので、ここで止まります。

4 次元で同様のことをします。θ_1 を 4 次元目の軸と動径 r_4 との角度とし、4 次元目の軸 $x_1 = r_4 \cos\theta_1$ を作り、$\sin\theta_1$ によって 3 次元での r_3 に対応する $r_4 \sin\theta_1$ を作ります。そうすると、3 次元目の軸として

$$x_2 = r_3 \cos\theta_2 = r_4 \sin\theta_1 \cos\theta_2$$

最後に $r_2 = r_3 \sin\theta_2$ によって 2 次元に移して

$$x_3 = r_2 \cos\theta_3 = r_3 \sin\theta_2 \cos\theta_3 = r_4 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

$$x_4 = r_2 \sin\theta_3 = r_3 \sin\theta_2 \sin\theta_3 = r_4 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3$$

となります。これが 4 次元デカルト座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) での極座標 $(r_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ です。今の表記では、通常使われている $x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z$ という並びとは異なっているので、対応を取るときは気をつけてください。

この手順を一般化すれば、n 次元での n 次元目の軸は $\rho\cos\theta_1$ となり、$\rho\sin\theta_1$ は $n-1$ 次元の動径となります ($\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$)。そして、$n-1$ 次元での $n-1$ 次元目の軸は $\rho\sin\theta_1\cos\theta_2$、$\rho\sin\theta_1\sin\theta_2$ は $n-2$ 次元の動径となります。これを繰り返すことで

$$\begin{aligned}
&x_1 = \rho\cos\theta_1 \\
&x_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
&x_3 = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
&\qquad\vdots \\
&x_{n-1} = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
&x_n = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

θ_{n-1} は $0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi$ で、残りは $0 \le \theta_k \le \pi$ $(k \neq 1, 2, \dots, n-2)$ です。これは、手順の最後は 2 次元平面での動径を分解することになるためです (x_{n-1} が x 軸、x_n が y 軸)。

n 次元デカルト座標での半径 r の球の体積 Ω_n は

$$\Omega_n = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \le r^2)$$

これを極座標にします。$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を $(\rho, \theta_1, \dots \theta_{n-1})$ に変数変換するので、x_k から極座標へのヤコビアン

$$J_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix}$$

を求めます。x_k を見れば分かるように n 列目は 1 行目から $n-2$ 行目まで 0 です。これを利用して、n 列に対して余因子展開すると、$n-1$ 行列目と n 行列目の項だけが残り ($n-1$ 行目の項の符号はマイナス)

$$J_n = -\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \theta_{n-2}} \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-2}} \end{vmatrix} + \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \theta_{n-2}} \\ \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-2}} \end{vmatrix} \tag{1}$$

となります。

この余因子展開は 1 つ次元を落とすことに対応しています。2 次元のヤコビアンは (見やすくするために x_1, x_2, x_3 を x, y, z に対応させている)

$$J_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\rho\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \rho\cos\theta_1 \end{vmatrix} \quad (x_1 = \rho\cos\theta_1\ ,\ x_2 = \rho\sin\theta_1)$$

3 次元は

$$x_1 = \rho\cos\theta_1\ ,\ x_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2\ ,\ x_3 = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2$$

から、3 列目で余因子展開して

$$
\begin{aligned}
J_3 &= \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\rho\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \rho\cos\theta_1\cos\theta_2 & -\rho\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \rho\cos\theta_1\sin\theta_2 & \rho\sin\theta_1\cos\theta_2 \end{vmatrix} \\
&= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2 \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\rho\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \rho\cos\theta_1\sin\theta_2 \end{vmatrix} + \rho\sin\theta_1\cos\theta_2 \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\rho\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \rho\cos\theta_1\cos\theta_2 \end{vmatrix} \\
&= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_2 J_2 + \rho\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_2 J_2 \\
&= \rho\sin\theta_1(\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2)J_2 \\
&= \rho\sin\theta_1 J_2
\end{aligned}
$$

このように、n 次元での n 行列目だけが $n-1$ 次元と異なり、それによって上手いこと $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ が作られるようになっています。

実際に、例えば n 列目の $n-1, n$ 行目を、$m = n-1$ 次元と比較してみると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_{n-2}}{\partial \theta_{n-2}} &= -\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2} \\
\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-2}} &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
\frac{\partial x_{n}}{\partial \theta_{n-2}} &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\
\frac{\partial x_{m-1}}{\partial \theta_{m-1}} &= -\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1} = -\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2} \\
\frac{\partial x_{m}}{\partial \theta_{m-1}} &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1} = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_{n-2}}{\partial \theta_{n-2}} &= \frac{\partial x_{m-1}}{\partial \theta_{m-1}} \\
\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-2}} &= \cos\theta_{n-1}\frac{\partial x_{m}}{\partial \theta_{m-1}} \qquad (2a) \\
\frac{\partial x_{n}}{\partial \theta_{n-2}} &= \sin\theta_{n-1}\frac{\partial x_{m}}{\partial \theta_{m-1}} \qquad (2b)
\end{aligned}
$$

のようになっています。

というわけで、(1) は (2a),(2b) と

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} &= -\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\
\frac{\partial x_{n}}{\partial \theta_{n-1}} &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
J_n &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \sin^2\theta_{n-1} J_{n-1} + \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \cos^2\theta_{n-1} J_{n-1} \\
&= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} J_{n-1}
\end{aligned}
$$

これは

$$
J_{n-1} = \rho \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-3} J_{n-2}\ ,\ \ J_{n-2} = \rho \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-5} \sin\theta_{n-4} J_{n-3}
$$

のように続いていくので

$$
\begin{aligned}
J_n &= \rho \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2} J_{n-1} = \rho^2 \sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} J_{n-2} \\
&= \rho^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin^2\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} \\
&= \rho^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\sin\theta_k)^{n-1-k}
\end{aligned}
$$

最後の記号は

$$
\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n
$$

という意味です。よって、極座標での Ω_n は $(x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2 \leq r)$

$$
\Omega_n = \int dx_1 \cdots dx_n = \int_0^r d\rho\ \rho^{n-1} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\pi} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-1-k}
$$

となります。

積分を実行します。ρ と θ_{n-1} の積分を実行して

$$
\Omega_n = \pi \frac{1}{n} r^n \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\pi} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-1-k} = 2\pi \frac{1}{n} r^n \prod_{k=1}^{n-2} S_k
$$

S_k は

$$
S_k = \int_0^{\pi/2} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1} + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1}
$$

としています。これの第 2 項を

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{0} d\theta_k\ (\sin(\theta_k + \pi))^{n-k-1} &= \int_{-\pi/2}^{0} d\theta_k\ (-\sin\theta_k)^{n-k-1} \\
&= -\int_{\pi/2}^{0} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1} \qquad (\sin\theta = -\sin(-\theta)) \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1}
\end{aligned}
$$

と変形させます。この積分はガンマ関数 Γ によって

$$2\int_0^{\pi/2} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1} = \frac{\Gamma(\frac{n-k}{2})}{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}\sqrt{\pi}$$

と与えられます (「ガンマ関数」参照)。これを使って

$$\prod_{k=1}^{n-2} S_k = (\sqrt{\pi})^{n-2}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n-3}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}\cdots\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})}\frac{\Gamma(\frac{2}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{(\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma(n/2)}$$

よって、n 次元球の体積は

$$\begin{aligned}\Omega_n &= 2\pi\frac{1}{n}r^n\prod_{k=1}^{n-2}\int_0^{\pi} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-1-k} = 2\pi\frac{1}{n}r^n(\sqrt{\pi})^{n-2}\frac{1}{\Gamma(n/2)}\\ &= r^n(\sqrt{\pi})^n(\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2}))^{-1}\\ &= r^n(\sqrt{\pi})^n\frac{1}{\Gamma(n/2+1)}\end{aligned}$$

となります。