極座標

前半は 2 次元と 3 次元での極座標を求め、後半は極座標でのナブラ ∇、ラプラシアン ∇^2 と回転を求めます。

先にここでの結果をまとめておきます。3 次元極座標 (r,θ,φ) はデカルト座標 (x,y,z) から

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ ,\ z = r\cos\theta$$

$\boldsymbol{r}$ は動径ベクトル、$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$、θ は z 軸から $\boldsymbol{r}$ へ向かう角度で、φ は xy 平面での x 軸から $\boldsymbol{r}$ を xy 平面に落とした線へ向かう角度です。$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi$ は極座標の基底ベクトル、$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ はデカルト座標の基底ベクトル、$\boldsymbol{A}=(A_r,A_\theta,A_\varphi)$ です。

- 基底ベクトル (2 次元)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x\cos\theta + \boldsymbol{e}_y\sin\theta\\
&\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_x\sin\theta + \boldsymbol{e}_y\cos\theta\\
&\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta\\
&\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_r\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

- 基底ベクトル (3 次元)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\cos\theta\\
&\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x\cos\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\varphi - \boldsymbol{e}_z\sin\theta\\
&\boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x\sin\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\varphi\\
&\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi - \boldsymbol{e}_\varphi\sin\varphi\\
&\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_r\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi\cos\varphi\\
&\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta\\
&\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = 1\ ,\ \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = 0\\
&\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi\ ,\ \boldsymbol{e}_\varphi\times\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta\ ,\ \boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r\\
&\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial r} = 0\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = 0\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = 0\\
&\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} = \boldsymbol{e}_\theta\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta} = -\boldsymbol{e}_r\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\theta} = 0\\
&\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi} = \boldsymbol{e}_\varphi\sin\theta\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi} = \boldsymbol{e}_\varphi\cos\theta\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\boldsymbol{e}_r\sin\theta - \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

- $\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

- $\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

- $\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r\big(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_\varphi\big) + \boldsymbol{e}_\theta\big(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}A_\varphi\big) + \boldsymbol{e}_\varphi\big(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r}A_\theta\big)$

- デカルト座標 (x,y,z) から (u,v,w) への変換
  変換後の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_u,\boldsymbol{e}_v,\boldsymbol{e}_w$ が

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_w = \boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_w = 0\\
&\boldsymbol{e}'_u\cdot\boldsymbol{e}'_u = 1\ ,\ \boldsymbol{e}'_v\cdot\boldsymbol{e}'_v = 1\ ,\ \boldsymbol{e}'_w\cdot\boldsymbol{e}'_w = 1\\
&\boldsymbol{e}'_u = U\boldsymbol{e}_u\ ,\ \boldsymbol{e}'_v = V\boldsymbol{e}_v\ ,\ \boldsymbol{e}'_w = W\boldsymbol{e}_w
\end{aligned}$$

となっているとき

$$\begin{aligned}
&\nabla = \boldsymbol{e}'_uU\frac{\partial}{\partial u} + \boldsymbol{e}'_vV\frac{\partial}{\partial v} + \boldsymbol{e}'_wW\frac{\partial}{\partial w}\\
&\nabla^2 f = UVW\big(\frac{\partial}{\partial u}(\frac{U}{VW}\frac{\partial f}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{V}{UW}\frac{\partial f}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial w}(\frac{W}{UV}\frac{\partial f}{\partial w})\big)
\end{aligned}$$

U,V,W は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{U^2} &= (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2\\
\frac{1}{V^2} &= (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2\\
\frac{1}{W^2} &= (\frac{\partial x}{\partial w})^2 + (\frac{\partial y}{\partial w})^2 + (\frac{\partial z}{\partial w})^2
\end{aligned}$$

2 次元極座標の基底ベクトルを導出します。ここでは基底ベクトル同士は直交することを利用して求めますが、ベクトルの位置関係から求める方が楽です。

r は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさ、θ は $\boldsymbol{r}$ と x 軸の間の角度とします。原点から伸びている任意のベクトルは位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で、デカルト座標 (x,y) で $\boldsymbol{r}=(x,y)$ とします。デカルト座標上の点 (x,y) を r と θ で書くと

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$$

これから分かるように、$\boldsymbol{r}$ は原点を中心にする半径 r の円周を動き $(x^2+y^2=r^2)$、半径を伸ばす方向 (円周に垂直で外向きの方向) の向きを持ったベクトルであることから、動径ベクトルと呼ばれます (動径は原点を中心にし

た円の半径)。言葉は違っても位置ベクトルと動径ベクトルは同じ $\boldsymbol{r}$ なので、細かいことを気にしなければどちらを使っても大体伝わります。極座標では動径ベクトルとでも覚えておけばいいです。

デカルト座標では x, y によって 2 次元平面上の点を指定するのに対して、2 次元極座標では r と θ で指定します。そのときの基底ベクトルを求めます。動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ は基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x = (1, 0), \boldsymbol{e}_y = (0, 1)$ によって

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y \tag{1}$$

これを、取りあえず極座標の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ として

$$\boldsymbol{r} = \alpha_1\boldsymbol{e}_r + \alpha_2\boldsymbol{e}_\theta \tag{2}$$

とします (同じベクトルを異なる基底ベクトルで書いただけ)。デカルト座標と同じように考えると

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r + \theta\boldsymbol{e}_\theta$$

ですが、これは $\boldsymbol{e}_r$ を x 軸、$\boldsymbol{e}_\theta$ を y 軸のように設定した立場であって、極座標はこういう意味ではないです (そもそも、単位ベクトルは無次元、r は長さ、θ は角度なので和として成立していない)。今欲しいのは原点を $(x, y) = (0, 0)$ とするデカルト座標での任意の点を、$\boldsymbol{r}$ の方向を向いているベクトル $\boldsymbol{e}_r$ とそれに直交するベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ を基底ベクトルとして与える表現です (直交していれば線形独立になり、座標にできる)。ようは、デカルト座標の xy 平面上でのある点 (x, y) を r, θ を使って表現するものです。こういった意味から、極座標を (r, θ) と書くのは単位ベクトルとの対応を見るとき誤解しやすいです。

$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ を、デカルト座標において $\boldsymbol{e}_r$ は $\boldsymbol{r}$ の方向を向いていて、$\boldsymbol{e}_\theta$ は $\boldsymbol{e}_r$ に直交し θ の増加する方向 (反時計回り) を向いているとし、$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ は位置によって変化してもいいとします (実際に θ を変数に持つ)。そして両方とも単位ベクトルとします。直交しているので内積は

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 0$$

$\boldsymbol{e}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向を向いた単位ベクトルなので、$\boldsymbol{r} = (x, y)$ との関係から

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{(x, y)}{|\boldsymbol{r}|} = (\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}, \frac{y}{|\boldsymbol{r}|}) = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{3}$$

$\boldsymbol{e}_\theta$ は図形的に見ずに、$\boldsymbol{e}_r$ との内積が 0 になる性質から求めます。内積が 0 になるには

$$\boldsymbol{e}_\theta = (\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}, -\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}),\ (-\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}, \frac{x}{|\boldsymbol{r}|})\ (= (\sin\theta, -\cos\theta),\ (-\sin\theta, \cos\theta))$$

という 2 通りが考えられます。今は θ が増加する方向に $\boldsymbol{e}_\theta$ を取っているので、$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で x 軸方向にマイナスになることから

$$\boldsymbol{e}_\theta = (-\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}, \frac{x}{|\boldsymbol{r}|}) = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{4}$$

(3),(4) から分かるように、極座標の基底ベクトルはデカルト座標と違い、点の位置で値が変わります。例えば、点 $(x,y)=(1,0)$ では $\theta=\pi$ なので $\boldsymbol{e}_r=(-1,0),\boldsymbol{e}_\theta=(0,-1)$、点 $(x,y)=(0,1)$ では $\theta=0$ なので $\boldsymbol{e}_r=(1,0),\boldsymbol{e}_\theta=(0,1)$ となっています。感覚的に言えば、極座標はある点での動径方向を基底ベクトルの 1 つに選び、常にその方向を正面にするために他の点を指定すると基底はその点の方向に変更されるからです。なので、動いている点では常に基底の方向が変更されていきます。

基底ベクトルが分かったので (2) の α_1,α_2 を求めます。$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ に合わせればいいので、$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ の形から

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}=\alpha_1\boldsymbol{e}_r+\alpha_2\boldsymbol{e}_\theta&=(\alpha_1\cos\theta,\alpha_1\sin\theta)+(-\alpha_2\sin\theta,\alpha_2\cos\theta)\\
&=(\alpha_1\cos\theta-\alpha_2\sin\theta,\alpha_1\sin\theta+\alpha_2\cos\theta)
\end{aligned}
$$

よって

$$\alpha_1=r\ ,\ \alpha_2=0$$

となって

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$$

このように x,y でなく r,θ を使った場合は、$\boldsymbol{r}$ はそれの大きさ r に単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ をかけたものという当たり前の結果となり $(\alpha_1=r,\alpha_2=0)$、$\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ の線形結合で書けています。このように、デカルト座標での位置ベクトル $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$ は極座標からすると $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$ となります。

別の手順として、$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y$ を $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ で書き換えても出てきます。$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ は $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y$ を使えば

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r&=\boldsymbol{e}_x\cos\theta+\boldsymbol{e}_y\sin\theta\\
\boldsymbol{e}_\theta&=-\boldsymbol{e}_x\sin\theta+\boldsymbol{e}_y\cos\theta
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r\cos\theta&=\boldsymbol{e}_x\cos^2\theta+\boldsymbol{e}_y\sin\theta\cos\theta\\
\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta&=-\boldsymbol{e}_x\sin^2\theta+\boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\theta
\end{aligned}
$$

から

$$\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta$$

また

$$\boldsymbol{e}_r\sin\theta = \boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\theta + \boldsymbol{e}_y\sin^2\theta$$

$$\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta = -\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\theta + \boldsymbol{e}_y\cos^2\theta$$

から

$$\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_r\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta$$

となるので、これを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$ に入れると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y &= x(\boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta) + y(\boldsymbol{e}_r\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta) \\
&= (x\cos\theta + y\sin\theta)\boldsymbol{e}_r - (x\sin\theta - y\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta \\
&= (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_r - (r\cos\theta\sin\theta - r\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta \\
&= r\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}$$

となって同じ結果になります。

3 次元極座標 (r,θ,φ) の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ を導出します。いろいろな方法がありますが 2 次元と同じ方法で求めます。まず、$\boldsymbol{r}$ は 3 次元デカルト座標の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ から

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z$$

なので、$\boldsymbol{e}_r$ は角度の関係から

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_x\frac{x}{r} + \boldsymbol{e}_y\frac{y}{r} + \boldsymbol{e}_z\frac{z}{r} = \boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\cos\theta$$

と求まります。次に、これに直交するベクトルを見つけます。

まず、角度 φ は xy 平面上を動くものなので、$\boldsymbol{e}_\varphi$ は $\boldsymbol{e}_r$ とは

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r\cdot(\alpha_1,\alpha_2,0) = (\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\cos\theta)\cdot(\boldsymbol{e}_x\alpha_1 + \boldsymbol{e}_y\alpha_2) = 0$$

のように直交しているはずです。これから

$$\alpha_1\sin\theta\cos\varphi + \alpha_2\sin\theta\sin\varphi = 0$$

となり、xy 平面上に制限されているために、取れる角度は φ だけなので

$$\alpha_1 = \pm\sin\varphi\ ,\ \alpha_2 = \mp\cos\varphi$$

符号は、φ は x 軸から y 軸に向かうようにしているので、φ は x のマイナス方向を向いている必要があり

$$\alpha_1 = -\sin\varphi\ ,\ \alpha_2 = +\cos\varphi$$

と取ります (これは 2 次元極座標と同じ)。よって、φ の基底ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x \sin\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\varphi$$

これは $\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi = 1$ にもなっています。
　残っている $\boldsymbol{e}_\theta$ は

$$\boldsymbol{e}_\theta = (\boldsymbol{e}_x\beta_1 + \boldsymbol{e}_y\beta_2 + \boldsymbol{e}_z\beta_3)$$

とすれば、$\boldsymbol{e}_\varphi$ と直交することから

$$\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi = (\boldsymbol{e}_x\beta_1 + \boldsymbol{e}_y\beta_2 + \boldsymbol{e}_z\beta_3) \cdot (-\boldsymbol{e}_x \sin\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\varphi) = -\beta_1 \sin\varphi + \beta_2 \cos\varphi = 0$$

$\boldsymbol{e}_\theta$ では xy 平面上という制限がないので、θ, φ の両方を含められることを踏まえれば

$$\beta_1 = \beta\cos\varphi\ ,\ \beta_2 = \beta\sin\varphi$$

となります。$\boldsymbol{e}_r$ との内積からは

$$\begin{aligned}
0 &= \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta \\
&= (\boldsymbol{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\cos\theta) \cdot (\boldsymbol{e}_x\beta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\beta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\beta_3) \\
&= \beta\sin\theta\cos^2\varphi + \beta\sin\theta\sin^2\varphi + \beta_3\cos\theta \\
&= \beta\sin\theta + \beta_3\cos\theta \\
\beta_3 &= -\beta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

後は $\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 1$ から

$$\begin{aligned}
1 = \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta &= (\boldsymbol{e}_x\beta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\beta\sin\varphi - \boldsymbol{e}_z\beta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}) \cdot (\boldsymbol{e}_x\beta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\beta\sin\varphi - \boldsymbol{e}_z\beta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}) \\
&= \beta^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}) \\
&= \beta^2(1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}) \\
&= \beta^2\frac{1}{\cos^2\theta} \\
\beta &= \pm\cos\theta
\end{aligned}$$

というわけで

$$\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x\beta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\beta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\beta_3 = \pm\boldsymbol{e}_x\cos\theta\cos\varphi \pm \boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\varphi \mp \boldsymbol{e}_z\sin\theta$$

θ の向きは z 軸のマイナス方向にしているので、$\mp\boldsymbol{e}_z\sin\theta$ はマイナスを選びます。よって

$$\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x\cos\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\varphi - \boldsymbol{e}_z\sin\theta$$

これで 3 つの基底ベクトルが求まりました。また、今の定義では基底ベクトルのベクトル積は

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi\ ,\ \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta\ ,\ \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r$$

のように巡回した関係を持っています ($\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_k$ としたとき、i, j, k を k, i, j、j, k, i と動かす。i, j, k を x, y, z にしたときも同様の関係になっている)。2 つ求まれば、これらの関係から残りの 1 つを求めることもできます。

$\boldsymbol{e}_x$ は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\varphi = \boldsymbol{e}_x\sin^2\theta\cos^2\varphi + \boldsymbol{e}_y\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \boldsymbol{e}_z\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\
&\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi = \boldsymbol{e}_x\cos^2\theta\cos^2\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \boldsymbol{e}_z\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\
&\boldsymbol{e}_\varphi\sin\varphi = -\boldsymbol{e}_x\sin^2\varphi + \boldsymbol{e}_y\sin\varphi\cos\varphi
\end{aligned}$$

から

$$\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi - \boldsymbol{e}_\varphi\sin\varphi$$

$\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ も同様に求めれば

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_r\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi\cos\varphi \\
&\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta
\end{aligned}$$

となっています。このような求め方はかなり面倒な手順で、ベクトルの位置関係や微小変化の関係から求めたほうが格段に簡単です。

基底ベクトルの微分は単純な微分の計算から

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial r} = 0\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = 0\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \\
&\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} = \boldsymbol{e}_\theta\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta} = -\boldsymbol{e}_r\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\theta} = 0 \\
&\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi} = \boldsymbol{e}_\varphi\sin\theta\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi} = \boldsymbol{e}_\varphi\cos\theta\ ,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\boldsymbol{e}_r\sin\theta - \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

となります。

次に、極座標のナブラ ∇、ラプラシアン ∇^2、回転を求めるために、デカルト座標 (x,y,z) から別の座標 (u,v,w) に変えたときの基底ベクトルの関係を求めます。

x,y,z を別の u,v,w に変えるので、x は u,v,w、y は u,v,w、z は u,v,w を使って書ける必要があります。これを

$$x = x(u,v,w)\ ,\ y = y(u,v,w)\ ,\ z = z(u,v,w)$$

と表記することが多く、右辺の x,y,z は u,v,z から x,y,z を作る関数という意味です。紛らわしい書き方なので (数学の人から嫌われている表記)、区別するなら

$$x = f(u,v,w)$$

とでも書けばいいです。逆変換では

$$u = u(x,y,z)\ ,\ v = v(x,y,z)\ ,\ w = w(x,y,z)$$

とします。例えば、極座標 (r,θ,φ) では

$$x = x(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$$

となります。

まずは基底ベクトルの変換を求めます。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ とそれが微小変化した $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ との差 $d\boldsymbol{r}$ は、x,y,z の変化を dx,dy,dz として

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$$

と書けます。$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ は x,y,z の基底ベクトルです。座標系は基底に何を選ぶかで決まり、任意のベクトルは基底ベクトルの線形結合から作られます。なので、別の座標系の基底ベクトルも元の座標系の基底ベクトルの線形結合で書けます。そして、dx,dy,dz はそれぞれが u,v,z に依存していることから

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw\\
dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw\\
dz &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw
\end{aligned}$$

となり、これらを $d\boldsymbol{r}$ に入れて

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_x(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw) + \boldsymbol{e}_y(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw) + \boldsymbol{e}_z(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw) \\
&= \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial u}du + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial u}du + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial u}du + \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial v}dv + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial v}dv + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial v}dv + \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial w}dw + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial w}dw + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial w}dw \\
&= (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial u} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial u} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial u})du + (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial v} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial v} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial v})dv + (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial w} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial w}dw + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial w})dw \\
&= \boldsymbol{e}_u du + \boldsymbol{e}_v dv + \boldsymbol{e}_w dw
\end{aligned}
$$

とすれば

$$
\boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial u} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial u} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial u} \tag{5a}
$$

$$
\boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial v} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial v} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial v} \tag{5b}
$$

$$
\boldsymbol{e}_w = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial w} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial w} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial w} \tag{5c}
$$

として、新しい基底ベクトル $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_w$ が作れます。これは微分の形で書かれた座標変換の式です。

ここで制限を加えます。$d\boldsymbol{r}$ の内積は線素 ds の 2 乗で

$$
(ds)^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz)\cdot(\boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz) = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2
$$

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ の直交性

$$
\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z = 0 \ , \ \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z = 1
$$

を使っています。ここでは、u, v, w に対しても $(ds)^2$ の形が

$$
(ds)^2 = (\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_u)(du)^2 + (\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_v)(dv)^2 + (\boldsymbol{e}_w\cdot\boldsymbol{e}_w)(dw)^2 = \frac{1}{U^2}(du)^2 + \frac{1}{V^2}(dv)^2 + \frac{1}{W^2}(dw)^2
$$

と与えられるとします。つまり、変換後の基底ベクトルに対しても

$$
\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_w = \boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_w = 0
$$

という条件を入れます。そして、同じ基底ベクトル同士の内積は

$$
\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_u = \frac{1}{U^2} \ , \ \boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_v = \frac{1}{V^2} \ , \ \boldsymbol{e}_w\cdot\boldsymbol{e}_w = \frac{1}{W^2}
$$

となっているので、1 になるように

$$
\boldsymbol{e}'_u = U\boldsymbol{e}_u \ , \ \boldsymbol{e}'_v = V\boldsymbol{e}_v \ , \ \boldsymbol{e}'_w = W\boldsymbol{e}_w \quad (\boldsymbol{e}'_u\cdot\boldsymbol{e}'_u = 1 \ , \ \boldsymbol{e}'_v\cdot\boldsymbol{e}'_v = 1 \ , \ \boldsymbol{e}'_w\cdot\boldsymbol{e}'_w = 1) \tag{6}
$$

と定義したものを変換後の基底として使います。U, V, W はすぐに分かるように

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{U^2} &= \boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2 \\
\frac{1}{V^2} &= \boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_v = (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2 \\
\frac{1}{W^2} &= \boldsymbol{e}_w \cdot \boldsymbol{e}_w = (\frac{\partial x}{\partial w})^2 + (\frac{\partial y}{\partial w})^2 + (\frac{\partial z}{\partial w})^2
\end{aligned}
$$

これで変換の形が決まりました。この変換によってナブラとラプラシアンがどうなるかを知りたいので、それを求めるのに使う関係を出しておます。

偏微分の連鎖則と $\partial u/\partial u = 1$ から偏微分には

$$
1 = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial u} = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}
$$

という関係があります。他の場合も同様なので

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\
1 &= \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \\
1 &= \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}
\end{aligned}
$$

これらと基底ベクトルの直交性を使えば

$$
(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}) \cdot (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial u} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial u} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial u}) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 1
$$

となっているのが分かります。そうすると (5a) と (6) から

$$
\begin{aligned}
1 &= (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}) \cdot (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial u} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial u} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial u}) \\
&= (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}) \cdot \boldsymbol{e}_u \\
&= U^2\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_u
\end{aligned}
$$

他の場合も同様にすることで、変換前と後の基底ベクトルの関係

$$\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}=U^2\boldsymbol{e}_u=U\boldsymbol{e}'_u \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{\partial v}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial v}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial v}{\partial z}=V^2\boldsymbol{e}_v=V\boldsymbol{e}'_v \tag{7b}$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{\partial w}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial w}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial w}{\partial z}=W^2\boldsymbol{e}_w=W\boldsymbol{e}'_w \tag{7c}$$

が求まります。
　ナブラ ∇ から求めます。今求めた関係 (7a)〜(7c) を使うと

$$\begin{aligned}
\nabla &= \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{e}_x(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial w})+\boldsymbol{e}_y(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial w})+\boldsymbol{e}_z(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w}) \\
&= (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial}{\partial u}+(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial v}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial v}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial v}{\partial z})\frac{\partial}{\partial v}+(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial w}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial w}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial w}{\partial z})\frac{\partial}{\partial w} \\
&= \boldsymbol{e}'_uU\frac{\partial}{\partial u}+\boldsymbol{e}'_vV\frac{\partial}{\partial v}+\boldsymbol{e}'_wW\frac{\partial}{\partial w}
\end{aligned}$$

成分で書くなら

$$\nabla=(U\frac{\partial}{\partial u},V\frac{\partial}{\partial v},W\frac{\partial}{\partial w})$$

となります。
　次にラプラシアン $\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\triangle$ を求めます。そのために、まずは $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めます。これは $\boldsymbol{A}$ を変換後の座標系で

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}'_uA_u+\boldsymbol{e}'_vA_v+\boldsymbol{e}'_wA_w$$

と書くことにすれば

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot(\boldsymbol{e}'_uA_u+\boldsymbol{e}'_vA_v+\boldsymbol{e}'_wA_w)$$

∇ が基底にも作用していて厄介なので、上手いこと式変形してやります。基底はベクトル積によって

$$\boldsymbol{e}'_u\times\boldsymbol{e}'_v=\boldsymbol{e}'_w\ ,\ \boldsymbol{e}'_v\times\boldsymbol{e}'_w=\boldsymbol{e}'_u\ ,\ \boldsymbol{e}'_w\times\boldsymbol{e}'_u=\boldsymbol{e}'_v$$

と書けることと、(6) を使うことで

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \nabla\cdot\big((\boldsymbol{e}'_v\times\boldsymbol{e}'_w)A_u+(\boldsymbol{e}'_w\times\boldsymbol{e}'_u)A_v+(\boldsymbol{e}'_u\times\boldsymbol{e}'_v)A_w\big)\\
&= \nabla\cdot\big(\frac{1}{VW}(\nabla v\times\nabla w)A_u+\frac{1}{UW}(\nabla w\times\nabla u)A_v+\frac{1}{UV}(\nabla u\times\nabla v)A_w\big)\\
&= \nabla(\frac{1}{VW}A_u)\cdot(\nabla v\times\nabla w)+\frac{1}{VW}A_u\nabla\cdot(\nabla v\times\nabla w)\\
&\quad+\nabla(\frac{1}{UW}A_v)\cdot(\nabla w\times\nabla u)+\frac{1}{UW}A_v\nabla\cdot(\nabla w\times\nabla u)\\
&\quad+\nabla(\frac{1}{UV}A_w)\cdot(\nabla u\times\nabla v)+\frac{1}{UV}A_w\nabla\cdot(\nabla u\times\nabla v)
\end{aligned}$$

これにベクトルの関係

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=\boldsymbol{G}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})-\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G})\ ,\ \nabla\times\nabla\boldsymbol{F}=0$$

を使えば

$$\nabla\cdot(\nabla u\times\nabla v)=\nabla v\cdot(\nabla\times\nabla u)-\nabla u\cdot(\nabla\times\nabla v)=0$$

となるので

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla(\frac{1}{VW}A_u)\cdot(\nabla v\times\nabla w)+\nabla(\frac{1}{UW}A_v)\cdot(\nabla w\times\nabla u)+\nabla(\frac{1}{UV}A_w)\cdot(\nabla u\times\nabla v)$$

これで基底に ∇ が作用しなくなっているので、$\boldsymbol{e}'_u,\boldsymbol{e}'_v,\boldsymbol{e}'_w$ へ戻すと $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ は

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= VW(\boldsymbol{e}'_v\times\boldsymbol{e}'_w)\cdot\nabla(\frac{1}{VW}A_u)+UW(\boldsymbol{e}'_w\times\boldsymbol{e}'_u)\cdot\nabla(\frac{1}{UW}A_v)+UV(\boldsymbol{e}'_u\times\boldsymbol{e}'_v)\cdot\nabla(\frac{1}{UV}A_w)\\
&= VW\boldsymbol{e}'_u\cdot\big(\boldsymbol{e}'_uU\frac{\partial}{\partial u}+\boldsymbol{e}'_vV\frac{\partial}{\partial v}+\boldsymbol{e}'_wW\frac{\partial}{\partial w}\big)\big(\frac{1}{VW}A_u\big)\\
&\quad+UW\boldsymbol{e}'_v\cdot\big(\boldsymbol{e}'_uU\frac{\partial}{\partial u}+\boldsymbol{e}'_vV\frac{\partial}{\partial v}+\boldsymbol{e}'_wW\frac{\partial}{\partial w}\big)\big(\frac{1}{UW}A_v\big)\\
&\quad+UV\boldsymbol{e}'_w\cdot\big(\boldsymbol{e}'_uU\frac{\partial}{\partial u}+\boldsymbol{e}'_vV\frac{\partial}{\partial v}+\boldsymbol{e}'_wW\frac{\partial}{\partial w}\big)\big(\frac{1}{UV}A_w\big)\\
&= UVW\frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{VW}A_u)+UVW\frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{UW}A_v)+UVW\frac{\partial}{\partial w}(\frac{1}{UV}A_w)
\end{aligned}$$

と求まります。

ラプラシアン $\nabla^2 f$ (f はスカラー) にするには、$\boldsymbol{A}$ を ∇f に置き換えればいいので

$$\nabla^2 f=\nabla\cdot\nabla f=\nabla\cdot(\boldsymbol{e}'_uU\frac{\partial f}{\partial u}+\boldsymbol{e}'_vV\frac{\partial f}{\partial v}+\boldsymbol{e}'_wW\frac{\partial f}{\partial w})$$

から

$$A_u \ \Rightarrow\ U\frac{\partial f}{\partial u}\ ,\ A_v \ \Rightarrow\ V\frac{\partial f}{\partial v}\ ,\ A_w \ \Rightarrow\ W\frac{\partial f}{\partial w}$$

とすることで、ラプラシアンは

$$\nabla^2 f = UVW\big(\frac{\partial}{\partial u}(\frac{U}{VW}\frac{\partial f}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{V}{UW}\frac{\partial f}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial w}(\frac{W}{UV}\frac{\partial f}{\partial w})\big)$$

となります。

極座標 (r, θ, φ) への変換は

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ ,\ z = r\cos\theta$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{U^2} &= (\frac{\partial x}{\partial r})^2 + (\frac{\partial y}{\partial r})^2 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2 = \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta = 1\\
\frac{1}{V^2} &= (\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \theta})^2 = r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta = r^2\\
\frac{1}{W^2} &= (\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \varphi})^2 = r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = r^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

U, V, W は正に取ることで

$$U = 1\ ,\ V = \frac{1}{r}\ ,\ W = \frac{1}{r\sin\theta}$$

これらによって極座標でのナブラは

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

ラプラシアンは

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\big(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})\big)\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}$$

と求まります。

回転は基底ベクトルの関係を使うことで

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}) \times (\boldsymbol{e}_r A_r + \boldsymbol{e}_\theta A_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi) \\
&= \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \times (\boldsymbol{e}_r A_r + \boldsymbol{e}_\theta A_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi) + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \times (\boldsymbol{e}_r A_r + \boldsymbol{e}_\theta A_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi) \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \times (\boldsymbol{e}_r A_r + \boldsymbol{e}_\theta A_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi) \\
&= \boldsymbol{e}_r \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} A_r + \boldsymbol{e}_r \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} A_\theta + \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \boldsymbol{e}_r \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} A_\varphi + \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\theta \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta}\frac{1}{r} A_r + \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\theta \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta}\frac{1}{r} A_\theta + \boldsymbol{e}_\theta \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta}\frac{1}{r} A_\varphi + \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\varphi \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi}\frac{1}{r\sin\theta} A_r + \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_\varphi \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi}\frac{1}{r\sin\theta} A_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\varphi \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi}\frac{1}{r\sin\theta} A_\varphi \\
&= \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} A_r + \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r} A_\theta + \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \\
&\quad + \sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} A_r + \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \cos\theta \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} A_\theta \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_\varphi \times (-\boldsymbol{e}_r \sin\theta \boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta) \frac{1}{r\sin\theta} A_\varphi \\
&= \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \\
&\quad - \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r} A_\theta + \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta \frac{1}{r\sin\theta} A_\varphi + \boldsymbol{e}_r \cos\theta \frac{1}{r\sin\theta} A_\varphi \\
&= \boldsymbol{e}_r \big(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta} A_\varphi \big) + \boldsymbol{e}_\theta \big(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} A_\varphi \big) + \boldsymbol{e}_\varphi \big(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_\theta \big)
\end{aligned}
$$

と求まります。