1 階線形偏微分方程式

偏微分方程式の理論的な話は省いて、1 階線形偏微分方程式を使った入門的な部分の話をします。
常微分方程式と曲線についての簡単な話は知っているとしています。

最初に偏微分の表記をまとめておきます。2 変数を持つ関数 $u(x_1, x_2)$ での偏微分は

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$$

のように表記されます。偏微分したものは偏導関数と呼ばれます。同じ意味で

$$u_{x_1}\ ,\ u_{x_2}\ ,\ u_{x_1x_1}\ ,\ u_{x_2x_2}\ ,\ u_{x_1x_2}$$

$$\partial_{x_1}u\ ,\ \partial_{x_2}u\ ,\ \partial_{x_1}^2 u\ ,\ \partial_x^2 u\ ,\ \partial_{x_1}\partial x_2 u$$

$$D_{x_1}u\ ,\ D_{x_2}u\ ,\ D_{x_1}^2 u\ ,\ D_{x_2}^2 u\ ,\ D_{x_1}D_{x_2}u$$

とも表記されます。変数が増えても同様です。
α_i を負でない整数とし ($\alpha_i \geq 0$)、$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ として

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

とする表記もあり、これは偏微分方程式の話をするときによく使われます。例えば、$u(x_1, x_2)$ で $\alpha = (2, 1)$ とすれば

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

となります。そして、$|\alpha| = k$ とした D^k は、k 階の偏微分の全ての組み合わせたものとされます (D^k は D^α ($|\alpha| = k$) での全ての組み合わせ)、例えば、$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して、$k = 1$ では

$$Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$$

となり、n 次元でのナブラ ∇ と同じ意味になります。
偏微分方程式は偏微分を含んでいる方程式です。なので、複数の変数を持つ関数が使われます。例えば、$u(x, y)$ による

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

といったもので、これは 1 階偏微分方程式です。含まれている偏微分の最も高い階数 n に合わせて n 階偏微分方程式と呼ばれます。m 階偏微分方程式は、$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して形式的に

$$F(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^a \partial x_j^b \cdots \partial x_k^c}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, u, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

と書けます。

常微分方程式と偏微分方程式で大きく異なっているのは、n 階偏微分方程式での一般解は n 個の任意関数を含む点です。実際にそうなることを、単純な例

$$\frac{d}{dx}v(x) = 0\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 0$$

から示します。常微分方程式では積分することで

$$v(x) = c$$

となり、1 個の任意定数 c を含んだ一般解になります。一方で偏微分方程式では、x だけでなくもう一つの変数 y にも依存している関数 $u(x,y)$ を求める必要があります。そして、今の場合では定数 c でなく y に依存する任意の関数 $c(y)$ とすれば、偏微分方程式を満たしていることがすぐに分かります。よって

$$u(x,y) = c(y)$$

が一般解です。このように常微分方程式では任意定数だったものが、偏微分方程式では任意関数となります。

少し複雑にして

$$\frac{d}{dx}v(x) + v(x) = 0\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + u(x,y) = 0$$

としても同様に一般解を求められます。常微分方程式での一般解は

$$v(x) = ce^{-x}$$

となっていて、c が任意定数です。偏微分方程式ではこれの c を任意関数 $c(y)$ として

$$u(x,y) = c(y)e^{-x}$$

とすれば、一般解になります。

これらを一般化することで、n 階偏微分方程式の一般解は n 個の任意関数を含むものとなります。また、解にも分類があります。n 階偏微分方程式の解が n 回微分可能であるとき、古典解 (classical solution) と呼ばれ、古典解でないものは広義解 (generalized solution) と呼ばれます。

ここでは線形偏微分方程式のみを扱うので、線形の定義を与えておきます。線形は単純に言えば、未知関数 u とその偏微分が 1 次までしか含まれていない場合です。1 次以外は

$$u^2\ ,\ u\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ (\frac{\partial u}{\partial x})^2\ ,\ (\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})^3$$

といった項で、線形でなければ非線形となります。また、同次と非同次の定義は常微分方程式の場合と同じです。

線形と非線形以外に、準線形 (quasilinear)、半線形 (semilinear) という区別もあります。準線形は n 階偏微分方程式での未知関数の n 階の偏導関数だけをみると線形になっている場合です。n 階の偏導関数の項の係数には、未知関数とその $n-1$ 階までの偏導関数を含んでいていいです。

半線形は、n 階偏微分方程式での n 階の偏導関数の項の係数に未知関数がいない場合です。言い換えれば、準線形で n 階の偏導関数の項の係数に未知関数がいない場合です。例えば、バーガース方程式（Burgers equation）と呼ばれる 2 階偏微分方程式 ($u(x,t), a$ は定数)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

では半線形です。半線形なのは $\partial^2 u/\partial x^2$ の係数 a が定数だからです。一方で、$a = 0$ とした

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

この場合では準線形です。準線形なのは、$u\partial u/\partial x$ のためです。
　ここから 1 階線形偏微分方程式を扱います。2 変数の $u(x,y)$ での 1 階線形偏微分方程式は一般的に

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \tag{1}$$

と書けます。a,b,c,f は与えれれている関数です。$f(x,y)=0$ で同次になります。1 階線形偏微分方程式 (1) を解くための方法を見ていきます。
　まず、変数を $\alpha=\alpha(x,y),\beta=\beta(x,y)$ と変換します（表記を区別するなら、$\xi_1=\alpha(x,y),\xi_2=\beta(x,y)$ のようにすればいい）。この変換によって、$u(x,y)=w(\alpha,\beta)$ とすれば

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y}$$

ただし、ヤコビアンは

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y}\\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}\neq 0 \tag{2}$$

となっている必要があります。
　(1) に入れて

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=a(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x})+b(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y})+cw=f$$

a,b,c,f はそのまま使っていますが、α,β を変数に持つようにしています。これを

$$\begin{aligned}&a\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+a\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+b\frac{\partial w}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y}+cw\\&\quad=a\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+b\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+a\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\beta}+b\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial\beta}+cw\\&\quad=\big(a\frac{\partial\alpha}{\partial x}+b\frac{\partial\alpha}{\partial y}\big)\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\big(a\frac{\partial\beta}{\partial x}+b\frac{\partial\beta}{\partial y}\big)\frac{\partial w}{\partial\beta}+cw\end{aligned}$$

と変形します。ここで、第二項が

$$a\frac{\partial\beta}{\partial x}+b\frac{\partial\beta}{\partial y}=0 \tag{3}$$

となるように β を選ぶことが出来ると仮定します。そうすると

$$(a\frac{\partial\alpha}{\partial x}+b\frac{\partial\alpha}{\partial y})\frac{\partial w}{\partial\alpha}+cw=f \tag{4}$$

これの第一項のカッコ部分は α,β に依存する関数なので

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha}+c'(\alpha,\beta)w=f'(\alpha,\beta) \tag{5}$$

と書けます。これは片方の変数による 1 階偏微分方程式の形になっているので、上で触れたような常微分方程式からの応用で一般解を求められます。

というわけで、(3) を満たす $\beta(x,y)$ を見つければ形式的には解けることになります。なので、そのような $\beta(x,y)$ を見つけます。まず、(3) は変形すると

$$a\frac{\partial \beta}{\partial x}+b\frac{\partial \beta}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(\frac{\partial \beta}{\partial y})^{-1}=-\frac{b}{a}$$

ただし、$\partial\beta/\partial y\neq 0$ です。ここで気が付くのが、これの左辺は β の全微分が 0 になると要求したものと同じになっていることです。$\beta(x,y)$ の全微分 $d\beta$ が 0 になるなら

$$d\beta=\frac{\partial \beta}{\partial x}dx+\frac{\partial \beta}{\partial y}dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial \beta}{\partial x}(\frac{\partial \beta}{\partial y})^{-1}$$

と書けて左辺と同じです。なので、(3) は、β の全微分が 0 で $\partial\beta/\partial y\neq 0$ であるとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

という 1 階の常微分方程式になります (a,b の変数を x,y に戻しています)。これは特性方程式 (characteristic equation) と呼ばれます。特性方程式に従うような x,y であれば $\beta(x,y)$ は (3) を満たすことになります。

特性方程式は 1 階微分方程式なので、積分から定数 C が 1 つ出てきて

$$g(x,y)=C$$

と書けます。$g(x,y)$ は積分の結果出てくる x,y に依存する関数です。そして、全微分 $d\beta$ が 0 になるためには $\beta(x,y)=$ 定数であればいいです ($\partial\beta/\partial y\neq 0$)。つまり、特性方程式を利用して $\beta(x,y)=g(x,y)$ とすることで (3) を満たせます。このように β を選ぶことで、(1) は (5) から解けることになります。残ってる α はヤコビアンが 0 にならないように任意に選べばいいです。

今の手順を具体的に行って一般解を求めてみます。単純にするために、係数を定数にし、同次にした、

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0 \tag{6}$$

を使います。$u(x,y)=w(\alpha,\beta)$ として (4) に変形させて

$$(a\frac{\partial \alpha}{\partial x}+b\frac{\partial \alpha}{\partial y})\frac{\partial w}{\partial \alpha}+cw=0$$

特性方程式は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}$$

特性方程式は単純に積分することで

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x + C \\ bx - ay &= C' \end{aligned} \tag{7}$$

C, C' は定数です。よって、$\beta(x,y) = bx - ay$ とすれば、(3) を満たします。ヤコビアンが 0 にならないように、$\alpha = x$ と選んで

$$(a\frac{\partial x}{\partial x} + b\frac{\partial x}{\partial y})\frac{\partial w}{\partial \alpha} + cw = a\frac{\partial w}{\partial \alpha} + cw$$

偏微分でなく常微分方程式とすれば

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\alpha} &= -\frac{c}{a}w \\ \frac{dw}{w} &= -\frac{c}{a}\alpha \\ w &= Ae^{-c\alpha/a} \end{aligned}$$

A は任意定数です。なので、A を β の関数とすることで

$$w(\alpha, \beta) = A(\beta)e^{-c\alpha/a}$$

$u(x,y)$ に戻して

$$u(x,y) = A(bx - ay)e^{-cx/a}$$

これが一般解となります。

一般解に初期条件を与えることで任意関数を決めることが出来ます。例えば $u(x,y)$ を、$y = 0$ で関数 $F(x)$ になると与えれば、初期条件は

$$u(x, y = 0) = F(x)$$

となります。

特性方程式の意味について見ていきます。そのために 2 次元での曲線を用意します。曲線のパラメータは s とし、曲線の位置は $(x(s), y(s))$ で与えられるとします。曲線上での関数 $u(x,y)$ の変化は s により、x, y は $x(s), y(s)$ なので

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} \tag{8}$$

となります。dx/ds は曲線上での微分なので、曲線の位置指定のために x だけでなく y にも依存していると考えられるので (曲線の位置 (x,y) での微分)、$a(x,y)$ とします。同様に、dy/ds を $b(x,y)$ とします。そうすると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \quad (\frac{dx}{ds} = a(x,y)\ ,\ \frac{dy}{ds} = b(x,y))$$

となり、特性方程式が出てきます。つまり、$a(x,y), b(x,y)$ を偏微分方程式 (1) の係数とすれば、曲線は係数 $a(x,y), b(x,y)$ による特性方程式から与えられることになります。係数 $a(x,y), b(x,y)$ による曲線は特性曲線 (chracteristic curve, chracteristic) と呼ばれます。特性曲線は 1 階常微分方程式の解として出てくるので、任意定数によって区別される曲線の集まりです。また、(1) での特徴として特性曲線は u とは無関係に決まるというのがあり、特性曲線を求めるのに u は使いません。

例えば、(6) では (7) によって与えられる曲線が特性曲線です。他にも分かりやすい例として

$$-y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

では、特性方程式から

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}\\ \frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + C\\ x^2 + y^2 &= C'\end{aligned}$$

C, C' は定数です。なので、$x^2 + y^2 = C'$ が特性曲線になり、これは原点を中心にする円です。そして、C' によって区別される特性曲線が無数にいます。

特性曲線と u の関係を見ます。特性曲線上において u は (1) と (8) から

$$\frac{du}{ds} + c(x(s), y(s))u = f(x(s), y(s))$$

という微分方程式に従います。これは 1 階の常微分方程式なので、初期条件を与えれば解は一意的に決まります。特性曲線は無数にあるので、特性方程式を初期条件 $x(s=0) = x_0,\ y(s=0) = y_0$ によって解いて特性曲線を決めたとします。特性曲線をこの初期条件に従うものに決めたので、この特性曲線上での u を $v(s) = u(x(s;x_0), y(s;y_0))$ と書くことにします。$x(s;x_0)$ は初期条件 x_0 による特性曲線上の x という意味です (y も同様)。なので、u の式は v によって

$$\begin{aligned}&\frac{dv}{ds} = f(x(s;x_0), y(s;y_0)) - c(x(s;x_0), y(s;y_0))v(s)\\ &v(0) = u(x(s=0;x_0), y(s=0;y_0))\end{aligned}$$

となります。よって、$v(0)$ を与えれば u は一意的に決まります。そして、その解は特性曲線に沿っているために、特性曲線上での値となります。

特性曲線から解く場合も見ておきます。偏微分方程式は

$$-y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0 \tag{9}$$

とします。特性方程式は曲線のパラメータを s として、x, y の微分で書けば

$$\frac{dx}{ds} = -y\ ,\ \frac{dy}{ds} = x$$

この曲線上での (9) は $u(s)$ として

$$\frac{du}{ds} = u$$

特性方程式は一回微分すると x, y が入れ替わることから

$$x = C\cos s\ ,\ y = C\sin s$$

と解けます。定数 C は曲線に対する条件によって決まります。u は単純に積分して

$$u = Ae^s$$

となります。しかし、A は C によって決まる曲線上でのものなので（A は C によって異なる）、C に依存します。なので、A を関数 $A(C)$ とします。

C は

$$x^2 + y^2 = C^2(\cos^2 s + \sin^2 s) = C^2$$

から、$C = (x^2 + y^2)^{1/2}$ となっています。よって、$A((x^2 + y^2)^{1/2})$ となり

$$u = A((x^2 + y^2)^{1/2})e^s$$

s は x, y を使えば

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin s}{\cos s}$$
$$\arctan\frac{y}{x} = s$$

となるので、一般解 $u(x, y)$ は

$$u(x, y) = A((x^2 + y^2)^{1/2})e^{\arctan\frac{y}{x}}$$

となります。

最後に 1 次元移流方程式（transport equation）を解きます。これは $u(x, t)$ による

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

という 1 階線形偏微分方程式です。2 変数ですが t は時間とするので 1 次元での式です。移流方程式の意味は波動方程式との関係を見ればわかります。1 次元での波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

これは、形を変えずに一定速度 a で伝わっていく波の運動を記述します。波動方程式を変形すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x})u = 0$$

なので、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

となり、u がこれら 2 つの移流方程式を満たせば、波動方程式も満たすことになります。このため、移流方程式は、形を変えずに一定速度 a で伝わる波を表します。もう少し広く言えば、一定速度 a で伝わっている物理量 u を記述するものです。

曲線のパラメータを s とすると、特性方程式は

$$\frac{dx}{ds} = a \ , \ \frac{dt}{ds} = 1$$

$u(s)$ は (10) から

$$\frac{du}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

u は s で微分したら 0 になるので、u は曲線上で定数です。特性方程式は単純に積分して

$$x = as + C_1 \ , \ t = s + C_2$$

C_1, C_2 は定数です。t を a 倍して x から引けば

$$x - at = C$$

となり (C は定数)、これが特性曲線となります。特性曲線は C によって区別されているので、一般解は任意関数 g によって $u(x,t) = g(x - at)$ となります。異なる特性曲線（$C = x - at$）に移動することで u は変化します。

特性曲線上の x は $x = at + C$ に従って動いており、これは $t = 0$ で $x = C$ で、そこから速度 a で動いている点の式です。なので、u は一定のまま、一定速度 a で移動していることになります。これは波動方程式による波の運動と同じです。

初期条件を与えて任意関数 g を決めます。$x = x_0, t = t_0$ を通る特性曲線を選んで、u の初期条件を $u(x, t = 0) = F(x)$ とすれば、x_0, t_0 を通る特性曲線 (xt 平面で $t = x/a - (x_0/a - t_0)$ の直線) は $t = 0$ で $x = x_0 - at_0$ なので

$$u(x_0, t_0) = F(x_0 - at_0)$$

として、u が決まります。u は特性曲線上で定数なので、$t = 0$ での $F(x) = F(x_0 - at_0)$ となります ($u(x_0, t_0) = u(x_0 - at_0, 0)$)。