

線形演算子と行列

線形演算子の表現行列を求めます。ここでは実数のみを扱い、ベクトル空間は有限次元とします。

ベクトルは太字、スカラーはギリシャ文字か小文字のローマ文字、線形演算子は T 、 T 以外の大文字のローマ文字は行列です。

ここでは実数の数ベクトル空間のベクトルを文章中では $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ と表記しますが、 $1 \times m$ 行列、 $m \times 1$ 行列のどちらの意味でも使ってしまう (いちいち転置の記号を書くのが面倒だから)。

$n \times m$ 行列は m 次元実数空間 \mathbb{R}^m から n 次元実数空間 \mathbb{R}^n への線形演算子なのはすぐにわかります。行列の積の線形性は、 M を $n \times m$ 行列、 c をスカラーとすれば

$$M(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = M\boldsymbol{x}_1 + M\boldsymbol{x}_2, \quad M(c\boldsymbol{x}) = cM\boldsymbol{x}$$

となります。

線形演算子は基底によって行列にできることを見ていきます。 m 次元ベクトル空間 \mathcal{V}^m と n 次元ベクトル空間 \mathcal{W}^n を用意し、 \mathcal{V}^m から \mathcal{W}^n への線形演算子を T とします。 $\mathcal{V}^m, \mathcal{W}^n$ の基底は $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^m, \{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^n$ とします。行列にするので次元をはっきりさせるために \mathcal{V}^m のように書いています。

$\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}^m$ を基底によって

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + v_m\boldsymbol{e}_m$$

とすれば、 $T(\boldsymbol{v})$ は線形性によって

$$T(\boldsymbol{v}) = T(v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + v_m\boldsymbol{e}_m) = v_1T(\boldsymbol{e}_1) + v_2T(\boldsymbol{e}_2) + \dots + v_mT(\boldsymbol{e}_m) = \sum_{j=1}^m v_jT(\boldsymbol{e}_j)$$

$T(\boldsymbol{e}_j)$ は \mathcal{W}^n のベクトルなので、 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ で展開されて

$$T(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{g}_i \tag{1}$$

左辺で指定された j が右辺でも使われ、それに対して i で和を取るので展開の係数は a_{ij} として添え字を 2 つ付けています。例えば

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \sum_{i=1}^n a_{i1}\boldsymbol{g}_i = a_{11}\boldsymbol{g}_1 + a_{21}\boldsymbol{g}_2 + \dots + a_{n1}\boldsymbol{g}_n$$

のようになっています。

線形演算子の基底への作用の式に現れる a_{ij} を成分とする $n \times m$ 行列は線形演算子 T の表現行列と呼ばれます。より正確に言うなら、基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^m, \{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^n$ での線形演算子 T の表現行列です。

このように言える理由は少し変形するとはっきりします。 $T(\boldsymbol{v})$ は

$$T(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^m v_jT(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^m v_j \sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{g}_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}v_j\boldsymbol{g}_i$$

$T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \in \mathcal{W}$ として

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} v_j \mathbf{g}_i \\ \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{g}_i &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} v_j \right) \mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (2)$$

から

$$w_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} v_j \quad (3)$$

これは \mathcal{V}^m のベクトルの成分が a_{ij} によって \mathcal{W}^n のベクトルの成分に変換されています。このように、 \mathcal{V}^m から \mathcal{W}^n への線形演算子に対応するように、 v_j から w_i への行列として a_{ij} が出てきます。なので、 a_{ij} を成分とする $n \times m$ 行列 A は、基底を $\{e_i\}_{i=1}^m, \{g_i\}_{i=1}^n$ として線形演算子 T と対応します。

例えば、 $m = n = 2$ とすると (3) は

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2$$

$$w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2$$

なので

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

このように行列の積で書けます。

$\mathcal{W}^m = \mathcal{V}^m$ として \mathcal{V}^m から \mathcal{V}^m への線形演算子とし、 \mathcal{V}^m を内積空間としたときには、線形演算子と行列の対応が分かりやすくなり、物理で出てくるのは大抵がこの場合です。 $\{e_i\}_{i=1}^m$ を基底として、 $T(e_j)$ は \mathcal{V}^m にいるので

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$$

基底を正規直交基底として内積 \langle, \rangle を取ると

$$\langle e_k, T(e_j) \rangle = \langle e_k, \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i \rangle = \sum_{i=1}^m a_{ij} \langle e_k, e_i \rangle = \sum_{i=1}^m a_{ij} \delta_{ik} = a_{kj}$$

となり、基底 e_i での表現行列 a_{ij} を取り出せます。 δ_{ik} はクロネッカーデルタです。このように、内積 $\langle e_k, T(e_j) \rangle$ の値を成分とする行列になるという分かりやすい形になっています。

線形演算子と行列を対応させるときに出てくる表記を導入しておきます。分かりやすくするために、まずは2次元にします。基底 e_1, e_2 を組にして (e_1, e_2) と書き、 T はそれぞれに作用するとして

$$T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)) = \left(\sum_{i=1}^2 a_{i1} \mathbf{g}_i, \sum_{i=1}^2 a_{i2} \mathbf{g}_i \right) = (a_{11} \mathbf{g}_1 + a_{21} \mathbf{g}_2, a_{12} \mathbf{g}_1 + a_{22} \mathbf{g}_2)$$

と表記したとき、これは行列の積の形なので

$$T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と書けます。これはそのまま任意の m, n に一般化できて、 a_{ij} を成分とする $n \times m$ 行列 A として、行列の積の規則によって

$$T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m) = (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_m)) = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \mathbf{g}_i, \sum_{i=1}^n a_{i2} \mathbf{g}_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{im} \mathbf{g}_i \right) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n) A \quad (4)$$

となります。これは (1) を行列の形にしたものなので、 A は今の基底での T の表現行列です。

また、この表記を使うと、ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ による線形結合は、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を定数として

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

と書けます。

(4) を $\mathcal{W}^m = \mathcal{V}^m$ の場合にします。 \mathcal{V}^m の基底を $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$ とします。このとき、 $T(\mathbf{v})$ は

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= \sum_{j=1}^m v_j T(\mathbf{e}_j) = v_1 T(\mathbf{e}_1) + v_2 T(\mathbf{e}_2) + \dots + v_m T(\mathbf{e}_m) \\ &= (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_m)) \mathbf{v} \end{aligned}$$

$T(\mathbf{e}_i)$ は \mathcal{V}^m のベクトルなので

$$T(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{e}_i$$

これを使えば、(4) と同じように

$$T(\mathbf{v}) = (T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_m)) \mathbf{v} = \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} \mathbf{e}_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{im} \mathbf{e}_i \right) \mathbf{v} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) A \mathbf{v} \quad (5)$$

として、 T の表現行列 A を与えられます。

特に、ベクトル空間 $\mathcal{V}^m = \mathcal{W}^m$ が m 次元ベクトル空間 \mathbb{R}^m であるなら、 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ の $m \times 1$ 行列であり、 $T(\mathbf{e}_i)$ も $m \times 1$ 行列です。このため、 $(T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_m))$ を $m \times m$ 行列 M と見なして ($m \times 1$ 行列が横に m 個並んで $m \times m$ 行列になっていると見る)、

$$(T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_m)) = M$$

と与えられます。さらに、標準基底のとき ($\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ のように \mathbf{e}_i は i 成分だけが 1 で残りが 0)、 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ (\mathbf{e}_i は $m \times 1$ 行列) は単位行列になるので、(5) は

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}, \quad A = M = (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_m))$$

となり、線形演算子 T はその表現行列である $m \times m$ 行列 A にそのまま対応します (「線形演算子」参照)。

物理で出てくるのはこの段階です。例えば、2次元デカルト座標での2次元回転は標準基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を左回りに θ 回転させて

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0) \Rightarrow (\cos \theta, \sin \theta), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1) \Rightarrow (-\sin \theta, \cos \theta)$$

とすることなので (「極座標」参照)、回転の線形演算子 T の作用は

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

これらから、2次元回転を起こす線形演算子の表現行列としての2次元回転行列が

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と求まります。

最後に、表現行列は基底に依存しているので、 \mathcal{V}^m の基底を別の基底に変えるとどうなるかを見ます。 \mathcal{V}^m の別の基底を $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^m$ として、 $m \times m$ 行列 B によって

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m)B$$

と変換されるとします。 B は \mathcal{V}^m 上の線形独立な集合の変換 (線形演算子) なので、逆行列 B^{-1} が存在する正則行列です。そうすると、(5) から

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m) &= T((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m)B^{-1}) \\ &= (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_m))B^{-1} \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m)AB^{-1} \\ &= (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m)BAB^{-1} \end{aligned}$$

となるので、基底 $\{e_i\}$ での表現行列 A は基底 $\{e'_i\}$ では BAB^{-1} になります。このように、基底の変換を与える正則行列 B によって、表現行列は変換されます。 BAB^{-1} は相似変換 (similarity transformation) と呼ばれ、 A と BAB^{-1} は相似 (similar) と言われます。