線形演算子

線形演算子の基本的な定理を示します。ここでのベクトル空間は有限次元とします。行列が少し出てきますが、行列については「行列」を見てください。
小文字のローマ文字はベクトル、ギリシャ文字はスカラー、大文字のローマ文字は線形演算子か行列としています。また、ゼロベクトルとはっきりさせたいときは太字の $\mathbf{0}$ で書いています。
ここでのスカラーは実数か複素数を指し、K は実数か複素数を表すとします。R は実数を表します。
ベクトル空間は $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ のように表記しています。

[A1] $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子の像は $\mathcal{W}$ の部分空間、カーネルは $\mathcal{V}$ の部分空間。

[A2] 線形演算子の合成は線形演算子。

[A3] 線形演算子が全単射のとき、その逆写像は線形演算子。

[A4] T を線形演算子としたとき、$\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ は単射、$\mathrm{Im}T = \mathcal{W}$ は全射の必要十分条件。

[A5] $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子 T が単射のとき、$\mathcal{V}$ の線形独立な $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ から $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ とした集合は線形独立となり、$\dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{W}$。

[A6] $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子が全射のとき、$\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \in \mathcal{W}$ が線形独立なら、線形独立となる $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in \mathcal{V}$ が存在し、$\dim \mathcal{V} \geq \dim \mathcal{W}$。

[A7] n 次元ベクトル空間 $\mathcal{V}$ は n 次元数ベクトル空間 K^n と同型。

[A8] $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ が同型なら $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$、$\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ なら $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ は同型。

[A9] 階数・退化次数の定理

[A10] $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ が同じ次元のとき線形演算子が単射なら全単射。

[A11] $\mathcal{V}$ から $(\mathcal{V}^*)^*$ への同型写像 T は $(T(v))(f) = f(v)$ $(v \in \mathcal{V},\ f \in \mathcal{V}^*)$ と与えられる。

[A12] リースの表現定理

[A13] 実数の n 次元数ベクトル空間 R^n から R^m への線形演算子 T は、M を $m \times n$ 行列として $T(v) = Mv$ $(v \in \mathrm{R}^n)$ と与えられる。

ベクトルの集合を $\{v_i\}_{i=1}^m = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ と表記しますが、範囲を書かなくても混乱しなそうな場合では $\{v_i\}$ と表記しています。また、ベクトル空間 $\mathcal{V}$ の次元を $\dim \mathcal{V}$ としています (n 次元なら $\dim \mathcal{V} = n$)。
単語の定義を羅列しておきます。

- 線形演算子
  ベクトル空間 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ があり、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子 T は、α をスカラーとして

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)\ ,\ T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad (v, v_1, v_2 \in \mathcal{V})$$

  と定義されます。$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ では線形変換、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ では線形演算子として区別することも多いですが、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}, \mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ の両方で線形演算子と呼んでいきます。ちなみに、線形性は 2 つをまとめて

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

と書いてしまうことも多いです。
線形性からすぐに分かる性質として、

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\ ,\ T(-\boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v}) \tag{1}$$

となっています（左辺の $\mathbf{0}$ は $\mathcal{V}$ のゼロベクトル、右辺の $\mathbf{0}$ は $\mathcal{W}$ のゼロベクトル）。これらは、$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = T(\mathbf{0})+T(\mathbf{0}) = 2T(\mathbf{0})$、$T(v)+T(-v) = T(v+(-v)) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となるからです。おそらく困ることはないと思うので、ゼロベクトルは $\mathbf{0}$ とだけ表記し、どのベクトル空間であるかは明記しません。
T のカーネルは $\mathrm{Ker}T$ ($T(v) = \mathbf{0}$ となる v の集合)、T の像は $\mathrm{Im}T$ と表記し、像は

$$\mathrm{Im}T = \{T(v) \in \mathcal{W} |\ v \in \mathcal{V}\}$$

の意味で使っています。値域を像の意味で使っているなら、$\mathrm{Ran}T$ と表記されます。

- 線形演算子のベクトル空間

線形演算子によるベクトル空間を定義します。線形演算子 T, S の和 $T+S$ とスカラー倍 λT を

$$(T+S)(v) = T(v)+S(v)\ ,\ (\lambda T)(v) = \lambda T(v) \tag{2}$$

と定義します。これらの左辺は写像の表記で、$L = T+S$ という写像が v に作用、$L' = \alpha T$ という写像が v に作用するという意味です。このように定義したときの和とスカラー倍は線形演算子です。実際に、$v_1, v_2 \in \mathcal{V}$、α_1, α_2 をスカラーとして

$$\begin{aligned}
L(\alpha_1 v_1 + \beta v_2) = (T+S)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + S_1(\alpha v_1 + \alpha_2 v_2) \\
&= T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + S(\alpha v_1) + S(\alpha_2 v_2) \\
&= T(\alpha_1 v_1) + S(\alpha v_1) + T(\alpha_2 v_2) + S(\alpha_2 v_2) \\
&= (T+S)(\alpha_1 v_1) + (T+S)(\alpha_2 v_2) \\
&= \alpha_1 (T+S)(v_1) + \alpha_2 (T+S)(v_2) \\
&= \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)
\end{aligned}$$

なので、線形演算子同士の和は線形演算子です。スカラー倍も

$$\begin{aligned}
L'(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (\lambda T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \lambda T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \lambda \alpha_1 T(v_1) + \lambda \alpha_2 T(v_2) \\
&= \alpha_1 (\lambda T)(v_1) + \alpha_2 (\lambda T)(v_2) \\
&= \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)
\end{aligned}$$

となるので、線形演算子です。
ゼロベクトルを定義します。$\mathcal{V}$ のベクトルを $\mathcal{W}$ のゼロベクトルにする写像を O とします。これは $O(v) = \mathbf{0}$ で、任意の $\mathcal{V}$ のベクトルを $\mathbf{0}$ にするので、$v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ としてベクトル空間の定義から

$$O(\alpha_1 v_1) + O(\alpha_2 v_2) = \mathbf{0} \quad (\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2 \in \mathcal{V})$$

$$O(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \mathbf{0} \quad (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathcal{V})$$

これらは等しいので

$$O(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = O(\alpha_1 v_1) + O(\alpha_2 v_2)$$

スカラー倍に対しては

$$\alpha O(v) = \mathbf{0}\ ,\ O(\alpha v) = \mathbf{0}$$

なので

$$O(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = O(\alpha_1 v_1) + O(\alpha_2 v_2) = \alpha_1 O(v_1) + \alpha_2 O(v_2)$$

よって、O は線形演算子です。
　そうすると、$\mathbf{0}$ の定義から

$$(T + O)(v) = T(v) + O(v) = T(v) + \mathbf{0} = T(v)$$

線形演算子だけで見れば

$$T + O = T$$

なので、O はゼロベクトルの定義になっています。
　というわけで、和とスカラー倍 (2)、ゼロベクトル O によって、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への全ての線形演算子の集合はベクトル空間となります。

- 同型写像
  　ベクトル空間 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ があり、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子が全単射であるなら、$\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ は同型と言われ、全単射の線形演算子は同型写像と呼ばれます。

- 階数、退化次数
  　階数 (rank) は ImT の次元、退化次数 (nullity) は Ker$T$ の次元と定義されています。
  　ImT の次元は dim(ImT) や rank$T$、Ker$T$ の次元は dim(Ker$T$) や nullity$T$ と表記されます。この表記を使うと、後で出てくる階数・退化次数の定理は

$$\dim(\mathrm{Im}T) + \dim(\mathrm{Ker}T) = \dim \mathcal{V}\ ,\ \mathrm{rank}T + \mathrm{nullity}T = \dim \mathcal{V}$$

と書くことができます。

線形演算子の基本的な定理を示します。

[A1] $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子の像は $\mathcal{W}$ の部分空間、カーネルは $\mathcal{V}$ の部分空間。

$w, w_1, w_2 \in \mathrm{Im}T$ とします。像の定義から

$$T(v) = w \ , \ T(v_1) = w_1 \ , \ T(v_2) = w_2$$

として、$\mathcal{V}$ のベクトル v, v_1, v_2 が与えられます。α をスカラーとして、線形演算子の定義から

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$$
$$\alpha w = \alpha T(v) = T(\alpha v)$$

$T(v_1 + v_2), T(\alpha v) \in \mathrm{Im}T$ なので、和 $w_1 + w_2$、スカラー倍 αw は $\mathrm{Im}T$ にいます。よって、$\mathrm{Im}T$ は $\mathcal{W}$ の部分空間です。

線形演算子 T のカーネルは $T(v) = 0$ となる $v \in \mathcal{V}$ の集合 $\mathrm{Ker}T = \{v \in V|\ T(v) = 0\}$ です。$u, u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}T$ に対して

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0$$
$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = 0$$

から、$u_1 + u_2, \alpha u \in \mathrm{Ker}T$ なので、$\mathcal{V}$ の部分空間です。

[A2] 線形演算子の合成は線形演算子。

ベクトル空間 $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{U}$ があり、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子を T、$\mathcal{W}$ から $\mathcal{U}$ への線形演算子を S とします。2 つの線形演算子の合成 $S \circ T$ は $\mathcal{V}$ から $\mathcal{U}$ への写像です。そして、合成は $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ と定義されているので、$v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ は α, β をスカラーとして

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\alpha v_1 + \beta v_2) &= S(T(\alpha v_1 + \beta v_2)) \\ &= S(\alpha T(v_1) + \beta T(v_2)) \\ &= \alpha S(T(v_1)) + \beta S(T(v_2)) \\ &= \alpha (S \circ T)(v_1) + \beta (S \circ T)(v_2)\end{aligned}$$

よって、$S \circ T$ は線形写像です。

[A3] 線形演算子が全単射のとき、その逆写像は線形演算子。

$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子 T の逆写像を T^{-1} とします (全単射なので逆写像は存在する)。$v_1, v_2 \in \mathcal{V},\ w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ として、T, T^{-1} によって

$$T(v_1) = w_1 \ , \ T(v_2) = w_2 \ , \ T^{-1}(w_1) = v_1 \ , \ T^{-1}(w_2) = v_2$$

となっているとすれば、T の線形性から

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$$

そうすると、逆写像の定義から

$$T^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$$

スカラー倍では、$v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}$、$\alpha$ をスカラーとして

$$\alpha w = \alpha T(v) = T(\alpha v)$$

なので

$$T^{-1}(\alpha w) = \alpha v = \alpha T^{-1}(w)$$

よって、T^{-1} は線形演算子です。

[A4] T を線形演算子としたとき、$\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ は単射、$\mathrm{Im}T = \mathcal{W}$ は全射の必要十分条件。

単射の定義は、写像 F が $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ に対して $F(v_1) = F(v_2)$ なら $v_1 = v_2$ となることです。これが $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ と対応することを示します。

線形演算子 T が $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ ($T(v) = \mathbf{0}$ となる v は $\mathcal{V}$ のゼロベクトル) となっているとします。$v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ に対して $T(v_1) = T(v_2)$ であるなら、線形性とゼロベクトルの定義から

$$T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2) = \mathbf{0}$$

これから $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}T$ となり、$\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ から $v_1 = v_2$ となります。$T(v_1) = T(v_2)$ で $v_1 = v_2$ なので、T は単射です。

逆として、T を単射とします。$u \in \mathrm{Ker}T$ とすれば $T(u) = \mathbf{0}$ で、(1) から $T(u) = T(\mathbf{0})$。単射なので $u = \mathbf{0}$ となり $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ です。よって、$\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ は線形演算子が単射であるための必要十分条件です。

全射の場合はほとんど自明です。全射の定義は、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への写像 F において $w \in \mathcal{W}$ に対して $w = F(v)$ となる $v \in \mathcal{V}$ が少なくとも 1 つ存在することです。

そうすると、$\mathrm{Im}T = \mathcal{W}$ であるなら、$T(v)$ は必ず $\mathcal{W}$ の元になるので $w = T(v)$ となり、全射です。逆として、T が全射であるなら、$w = T(v)$ は $\mathrm{Im}T$ の元そのものなので、$\mathrm{Im}T = \mathcal{W}$ になります。

[A5] $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子 T が単射のとき、$\mathcal{V}$ の線形独立な $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ から $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ とした集合は線形独立となり、$\dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{W}$。

線形独立か知りたいので、α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をスカラーとして

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0$$

とします。線形性から

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$$

単射なので $\mathrm{Ker}T = \{0\}$ から

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n = 0$$

$\{v_i\}$ は線形独立なので $\alpha_i = 0$ と分かり、$\{T(v_i)\}$ は線形独立です。

$\mathcal{V}$ は n 次元とし、$\{v_i\}$ が基底になっているとします。このとき、$\{T(v_i)\}$ は線形独立ですが、適当な $w \in \mathcal{W}$ を加えた $\{T(v_i), w\}$ でも線形独立である可能性があります。このため、$T(v_i)$ は $\mathcal{W}$ の基底の数以下です。よって、基底の数が次元になるでの、$\dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{W}$ です。例えば、単射の線形演算子 T が基底から基底への変換であったとしても、$\mathcal{W}$ の基底の組 $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ の全てに対応するとは限らないということです (これは単射の定義そのもの)。

今の話から分かるように、$v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}$ としたとき $T(v) = w \in \mathcal{W}$ ですが、$T(v)$ は $\mathcal{W}$ そのものではなく $\mathcal{W}$ の部分空間を作ります (単射としているため $\mathcal{W}$ の全ての元と対応しない)。なので、$\{T(v_i)\}$ はその部分空間の基底にはなりますが (この部分空間は $\mathcal{V}$ と同じ次元を持つ)、必ず $\mathcal{W}$ の基底になるとは言えません。

また、$\dim \mathcal{V} > \dim \mathcal{W}$ では基底の数が $\mathcal{V}$ の方が多いために、線形独立な $T(e_i)$ は $\mathcal{W}$ の基底の数を超えてしまうので、T は単射ではないことになります (単射なら $\dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{W}$ の対偶)。

[A6] $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子が全射のとき、$\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \in \mathcal{W}$ が線形独立なら、線形独立となる $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in \mathcal{V}$ が存在し、$\dim \mathcal{V} \geq \dim \mathcal{W}$。

線形演算子 T が全射なら $\mathcal{V}$ のベクトルは $\mathcal{W}$ のどれかのベクトルに必ず行くので、$w = T(v) \in \mathcal{W}$ となる $v \in \mathcal{V}$ が少なくとも 1 つ存在します。なので、$\mathcal{W}$ での線形独立な $w_i = T(v_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を与える v_i はいます。このときの $\{v_i\}$ が線形独立か知りたいので、α_i をスカラーとして

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

T を作用させて、線形性を使えば

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0$$

$\{T(v_i)\} = \{w_i\}$ が線形独立なら、$\alpha_i = 0$ です。よって、$\{v_i\}$ は線形独立です。そして、$\{w_i\}$ が $\mathcal{W}$ の基底になっているとき、$\{v_i\}$ に適当な $v \in \mathcal{V}$ を加えた $\{v_i, v\}$ が線形独立になっている可能性があるので、$\dim \mathcal{V} \geq \dim \mathcal{W}$ です。

また、$\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{W}$ では可能な線形独立なベクトルの個数が $\mathcal{V}$ の方が少ないために、T は全射ではないです (全射なら $\dim \mathcal{V} \geq \dim \mathcal{W}$ の対偶)。

[A7] n 次元ベクトル空間 $\mathcal{V}$ は n 次元数ベクトル空間 K^n と同型。

$\{e_i\}$ を $\mathcal{V}$ の基底、T を $\mathcal{V}$ から K^n への写像とします。$\mathcal{V}$ のベクトル v を基底で展開すれば、α_i をスカラーとして

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

v に T を作用させると v をベクトル成分を取り出すとして

$$T(v)=\alpha_1T(e_1)+\alpha_2T(e_2)+\cdots+\alpha_nT(e_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

と定義します ($T(e_i)$ は標準基底)。これが同型写像になるかを確かめます。

まず、線形演算子になっていることを示します。$u\in\mathcal{V}$ を β_i をスカラーとして

$$u=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n$$

として、数ベクトル空間の和の規則から

$$T(v+u)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_n+\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=T(v)+T(u)$$

スカラー倍は λ をスカラーとして

$$T(\lambda v)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\ldots,\lambda\alpha_n)=\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\lambda T(v)$$

よって、T は線形演算子です。

$\mathcal{V}$ のベクトルのベクトル成分が K^n のベクトルになるので、適当なベクトル v から K^n のベクトルを $w=T(v)$ として与えられます (基底で展開したときの係数はスカラーだから)。なので、全射です。

$\mathrm{Ker}T=\{\mathbf{0}\}$ になるか見ます。K^n のゼロベクトルを $\mathbf{0}_R$ として、$T(v)=\mathbf{0}_R$ のとき

$$T(v)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(0,0,\ldots,0)$$

そうすると、v は

$$v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n=\mathbf{0}$$

$\mathbf{0}$ は $\mathcal{V}$ のゼロベクトルです。$T(v)=\mathbf{0}_R$ になるのはゼロベクトルなので $\mathrm{Ker}T=\{\mathbf{0}\}$ となり、単射です。よって、全単射となるので、$\mathcal{V}$ と K^n は同型です。

今の話は単純に言ってしまえば、$\mathcal{V}$ と K^n の基底が線形演算子で対応し、基底に対するベクトル成分は一意的に決まるからです。

[A8] $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ が同型なら $\dim\mathcal{V}=\dim\mathcal{W}$、$\dim\mathcal{V}=\dim\mathcal{W}$ なら $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ は同型。

$\mathcal{V},\mathcal{W}$ が同型であるとします。同型であるなら同型写像が存在し、同型写像なら全単射です。単射では [A5] から $\dim\mathcal{V}\leq\dim\mathcal{W}$、全射では [A6] から $\dim\mathcal{V}\geq\dim\mathcal{W}$ です。なので、単射で全射である全単射では $\dim\mathcal{V}=\dim\mathcal{W}$ です。

逆として、$\dim\mathcal{V}=\dim\mathcal{W}$ なら $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ は同型になることを示します。$\dim\mathcal{V}=\dim\mathcal{W}=n$ としたとき、全単射の線形演算子 T が存在することが分かればいいです。$\mathcal{V}$ の基底を $\{e_i\}$、$\mathcal{W}$ の基底を $\{g_i\}$ とします。線形演算子 T を $T(e_i)=g_i$ とすれば、$v\in\mathcal{V}$ による $T(v)$ は α_i をスカラーとして線形性から

$$T(v)=T(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n)=\alpha_1g_1+\alpha_2g_2+\cdots+\alpha_ng_n$$

$w \in \mathcal{W}$ は基底 $\{g_i\}$ で展開されるので

$$T(v) = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n = w$$

よって、T は全射です。

$u \in \mathcal{V}$ として $T(v) = T(u)$ とすれば、u の展開係数を β_i として

$$T(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = T(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n)$$

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \cdots + \beta_n g_n$$

これから $\alpha_i = \beta_i$ となるので、$T(v) = T(u)$ のとき $v = u$ となり、単射です。よって、$\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ のとき全単射の線形演算子が存在するので、$\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ は同型です。

また、[A7] から n 次元ベクトル空間 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ は K^n と同型で、同型写像 S, T による合成 $S \circ T$ も同型写像なので (線形演算子による合成写像は線形演算子、全単射による合成写像は全単射)、$\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ は同型と言うこともできます ($\mathcal{V}$ から K^n への同型写像と K^n から $\mathcal{W}$ への同型写像の合成写像は $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への同型写像)。

[A9] 階数・退化次数の定理 (rank-nullity theorem)
$\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子 T があるとき、$\mathrm{Im}T$ と $\mathrm{Ker}T$ の次元を足したものは $\mathcal{V}$ の次元。

$\mathrm{Im}T$ と $\mathrm{Ker}T$ の基底を合わせたものが $\mathcal{V}$ の基底になっていることを示せいいです。

まず $\mathrm{Ker}T$ の基底を $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^{l}$ とします。$\mathrm{Ker}T$ は $\mathcal{V}$ の部分空間なので、$\mathrm{Ker}T$ の基底の線形結合では $\mathcal{V}$ を作れません。しかし、線形独立なベクトルの組に線形結合で作れないベクトルを加えたものも線形独立になります（「ベクトル空間」の線形従属、線形独立の項参照)。なので、$e_{l+1}, \ldots, e_n$ と加えていくことで $\mathcal{V}$ の基底

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_l, e_{l+1}, \ldots, e_n\}$$

を作れます。

次に、$\mathrm{Im}T$ の基底を求めます。$v \in \mathcal{V}$ に対して $w = T(v) \in \mathcal{W}$ として、$\{e_i\}_{i=1}^{l}$ は $\mathrm{Ker}T$ の基底なので

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T(v_1 e_1 + \cdots + \cdots v_n e_n) \\ &= v_1 T(e_1) + \cdots + v_l T(e_l) + v_{l+1} T(e_{l+1}) + \cdots + v_n T(e_n) \\ &= v_{l+1} T(e_{l+1}) + \cdots + v_n T(e_n) \end{aligned}$$

となり、$T(e_j)$ $(j = l+1, \ldots, n)$ の線形結合で書けます。i は 1 から l、j は $l+1$ から n とします。$T(e_j)$ が線形独立なのか知るために、スカラー λ_j を使って

$$\lambda_{l+1} T(e_{l+1}) + \cdots + \lambda_n T(e_n) = 0$$

線形性から

$$T(\lambda_{l+1} e_{l+1} + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$$

このため、$\lambda_{l+1}e_{l+1}+\cdots+\lambda_n e_n \in \mathrm{Ker}T$ です。一方で、$\{e_i\}$ は $\mathrm{Ker}T$ の基底なので、このベクトルを基底 $\{e_i\}$ で展開して

$$\lambda_{l+1}e_{l+1}+\cdots+\lambda_n e_n = \lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_l e_l$$

そうすると

$$\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_l e_l-\lambda_{l+1}e_{l+1}-\cdots-\lambda_n e_n = 0$$

$\{e_k\}_{k=1}^n$ は線形独立なので λ_1 から λ_n は 0 となり、λ_{l+1} から λ_n は 0 なので $\{T(e_j)\}$ は線形独立です。というわけで、w を線形結合で書ける線形独立なベクトルなので $\{T(e_j)\}$ は $\mathrm{Im}T$ の基底です。よって、e_j は $T(e_j)$ の個数と一致するので、$\mathcal{V}$ の次元は $\mathrm{Ker}T$ と $\mathrm{Im}T$ の次元の和になります。

先に $\mathrm{Ker}T$ と $\mathrm{Im}T$ の基底を与えても同じように示せます。区別をはっきりさせるために、$\mathrm{Ker}T$ の基底を $\{k_i\}_{i=1}^l$、$\mathrm{Im}T$ の基底を $\{f_j\}_{j=1}^m$ とします。α_j をスカラーとして、$T(v)$ は f_j によって

$$\begin{aligned} T(v) &= \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j \\ 0 &= T(v)-\sum_{j=1}^m \alpha_j f_j \\ &= T(v)-\sum_{j=1}^m \alpha_j T(v_j) \\ &= T(v-\alpha_1 v_1-\cdots-\alpha_m v_m) \end{aligned}$$

$v_j \in \mathcal{V}$ を $T(v_j)=f_j$ としています（v_j が $\mathcal{V}$ の基底か分からないから）。T が作用して 0 になるので

$$v-\alpha_1 v_1-\cdots-\alpha_m v_m \in \mathrm{Ker}T$$

$\mathrm{Ker}T$ の基底で書けば

$$\begin{aligned} v-\alpha_1 v_1-\cdots-\alpha_m v_m &= \sum_{i=1}^l \beta_i k_i \\ v &= \sum_{i=1}^l \beta_i k_i+\sum_{j=1}^m \alpha_j v_j \end{aligned} \tag{3}$$

$\{k_1,\dots,k_l,v_1,\dots,v_m\}$ が線形独立であれば、これは $\mathcal{V}$ の基底になります。というわけで、ρ_i,λ_i をスカラーとして

$$\sum_{i=1}^l \rho_i k_i+\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j = 0 \tag{4}$$

とすれば

$$0 = T(\sum_{i=1}^{l}\rho_i k_i + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j v_j) = T(\sum_{i=1}^{l}\rho_i k_i) + T(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j v_j) = T(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j v_j)$$

から

$$\rho_1 T(v_1) + \cdots + \rho_m T(v_m) = \rho_1 f_1 + \cdots + \rho_m f_m = 0$$

f_j は線形独立なので、$\lambda_j = 0$ です。そうすると、(3) は

$$\sum_{i=1}^{l}\rho_i k_i = 0$$

となり、k_i は線形独立なので $\rho_i = 0$ です。よって、$\{k_1, k_2, \ldots, k_l, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ は線形独立です。線形独立で、線形結合 (3) によって $v \in \mathcal{V}$ を作るので $\mathcal{V}$ の基底となります。というわけで、$m + l$ は $\mathcal{V}$ の次元となります。

[A10] $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ が同じ次元のとき線形演算子が単射なら全単射。

T を $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への線形演算子とし、単射なので $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ とします。$\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}\}$ の次元は 0 なので、階数・退化次数の定理 [A9] から $\mathrm{Im}T$ の次元が $\mathcal{V}$ の次元になります。$\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ の次元が同じなので、$\mathcal{W}$ の部分空間である $\mathrm{Im}T$ が $\mathcal{W}$ の次元と同じになります。このため、$\mathrm{Im}T = \mathcal{W}$ となる必要があることから T は全射と分かり、T は全単射です。よって、ベクトル空間の次元が同じとき、線形演算子が単射なら全単射です。

[A11] $\mathcal{V}^*$ を $\mathcal{V}$ の双対空間とする。$\mathcal{V}$ から $(\mathcal{V}^*)^*$ への同型写像 T は $(T(v))(f) = f(v)$ $(v \in \mathcal{V},\ f \in \mathcal{V}^*)$ と与えられる。

$\mathcal{V}$ と $\mathcal{V}^*$ は同じ次元を持ち、$\mathcal{V}^*$ と $(\mathcal{V}^*)^*$ は同じ次元を持つので、$\mathcal{V}$ と $(\mathcal{V}^*)^*$ は同じ次元を持ちます。このため、[A8] から $\mathcal{V}$ と $(\mathcal{V}^*)^*$ は同型で、同型写像が存在します。

表記の意味をはっきりさせながら、T が線形演算子であることを示します。$f(v)$ は $\mathcal{V}$ のベクトルに $\mathcal{V}$ での線形汎関数 f が作用しているので、K(実数か複素数) になります。見た目を分かりやすくするために $T_v = T(v)$ と書くと、T_v は f に作用して K にします。そして、$f_1, f_2 \in \mathcal{V}^*$ とすれば

$$T_v(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(v) = \alpha_1 f_1(v) + \alpha_2 f_2(v) = \alpha_1 T_v(f_1) + \alpha_2 T_v(f_2)$$

となるので、$\mathcal{V}^*$ での線形汎関数になっており、T_v は $\mathcal{V}^*$ から K への線形演算子です。そして、これは $T_v = T(v)$ が $(\mathcal{V}^*)^*$ のベクトルであることも意味します。このため、T は $\mathcal{V}$ から $(\mathcal{V}^*)^*$ への写像になっています。そして、$v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ として

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

となっているので、$\mathcal{V}$ から $(\mathcal{V}^*)^*$ への線形演算子です。

$\mathcal{V}$ と $(\mathcal{V}^*)^*$ は同じ次元を持つので、単射であることが分かれば [A10] から全単射になります。今の $\mathrm{Ker}T$ は $T(v) = \mathbf{0}$ となる v の集合です。これは $(T(v))(f) = 0$ のことなので、$f(v) = 0$ を要求します。つまり、v

に任意の線形汎関数 f が作用したとき 0 にならないといけないので、このときの v はゼロベクトルです。というわけで、$\mathrm{Ker}T=\{\mathbf{0}\}$ から T は単射です。よって、$(T(v))(f)=f(v)$ とした T は同型写像です。

この同型写像の特徴は、$\mathcal{V}$ の基底の選び方とは無関係になっている点です。この意味において、今の同型写像 T は自然 (natural) と言われます。

[A12] リースの表現定理 (Riesz representation theorem)
$\mathcal{V}$ を有限次元の内積空間とし、その内積を $<,>$ とする。このとき、$\mathcal{V}$ から双対空間への同型写像 T は $(T(v))(x)=<x,v>\ \ (v,x\in\mathcal{V})$ と与えられる。

ベクトル空間 $\mathcal{V}$ に内積を定義し、内積空間とします。内積を $<v_1,v_2>$ で表記し、内積の定義は $v,v_1,v_2\in\mathcal{V}$、α,β をスカラーとして

- $<v,v>\geq 0$
- $<v,v>=0$ なら $v=\mathbf{0}$、$v=\mathbf{0}$ なら $<v,v>=0$
- $<v,\alpha v_1+\beta v_2>=\alpha<v,v_1>+\beta<v,v_2>$
- $<v_1,v_2>=\overline{<v_2,v_1>}$

と与えられているとします（内積の右側で線形性を与えていることに注意)。「-」は複素共役です。

$\mathcal{V}$ と双対空間 $\mathcal{V}^*$ は同じ次元を持つので同型で、同型写像が存在します。

$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}^*$ への写像を T とし、$T(v)=f_v\ (v\in\mathcal{V})$ とします。$f_v\in\mathcal{V}^*$ は線形汎関数です。線形汎関数は $\mathcal{V}$ のベクトルに作用して実数か複素数にするので、それが内積になっているとします。なので、式にすれば

$$(T(v))(x)=f_v(x)=<x,v>\qquad(v,x\in\mathcal{V})$$

として、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}^*$ への写像 T を定義します。

T が線形演算子であることを示します。内積の定義から、$v_1,v_2\in\mathcal{V}$、α,β をスカラーとして

$$f_{\alpha v_1+\beta v_2}(x)=<x,\alpha v_1+\beta v_2>=\alpha<x,v_1>+\beta<x,v_2>=\alpha f_{v_1}(x)+\beta f_{v_2}(x)$$

となるので

$$T(\alpha v_1+\beta v_2)=f_{\alpha v_1+\beta v_2}=\alpha f_{v_1}+\beta f_{v_2}=\alpha T(v_1)+\beta T(v_2)$$

よって、T は線形演算子です。

$\mathcal{V}$ と $\mathcal{V}^*$ は同じ次元なので、単射であることが分かれば [A10] から全単射になります。$T(v)=\mathbf{0}$ としたときの $\mathbf{0}$ は $\mathcal{V}^*$ でのゼロベクトルなので、これは任意の $x\in\mathcal{V}$ に対して $f_v(x)=<x,v>=0$ を要求します。任意の x で内積が 0 にならなければいけないので、v はゼロベクトルです ($x=v$ とすれば $<v,v>=0$ なので内積の性質から $v=\mathbf{0}$)。よって、$\mathrm{Ker}T=\{\mathbf{0}\}$ から T は単射と分かり、[A10] から全単射なので、T は $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}^*$ への同型写像です。

このように、内積空間では基底を選ばない $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}^*$ への自然な同型写像が作れます。

[A13] 実数の n 次元数ベクトル空間 R^n から R^m への線形演算子 T は、M を $m\times n$ 行列として $T(v)=Mv\ (v\in\mathrm{R}^n)$ と与えられる。

まず、$T(v)=Mv$ とした T が線形演算子であることを示します。$v,v_1,v_2\in\mathrm{R}^n$、α をスカラーとして、行列の積の規則から

$$T(v_1+v_2)=M(v_1+v_2)=Mv_1+Mv_2=T(v_1)+T(v_2)$$
$$T(\alpha v)=M(\alpha v)=\alpha Mv=\alpha(Mv)=\alpha T(v)$$

よって、T は線形演算子です。

線形演算子 T に対応する行列 M が与えられることを示します。R^n の基底を $\{e_i\}$、α_i をスカラーとして

$$v=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n$$

基底を標準基底

$$e_1=(1,0,0,\dots,0),\ e_2=(0,1,0,0,\dots,0)\ ,\ \dots,\ e_n=(0,0,\dots,1)$$

として

$$v=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$

このときの $v=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ を $n\times 1$ 行列とします (ちゃんと表記するなら転置の記号を書くか、縦に並べる)。

積 Mv は、α_i はスカラーなので

$$Mv=M(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n)=\alpha_1 Me_1+\alpha_2 Me_2+\cdots+\alpha_n Me_n$$

$m\times n$ 行列 M と $n\times 1$ 行列 v の積は $m\times 1$ 行列になります。$m\times 1$ 行列 Me_i の成分 $(Me_i)_k$ は、$(e_i)_j$ を e_i の j 成分とし ($(e_i)_i=1,\ i\neq j$ なら $(e_i)_j=0$)、M の行列成分を λ_{ij} とすれば

$$(Me_i)_k=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{kj}(e_i)_j=\lambda_{k1}(e_i)_1+\lambda_{k2}(e_i)_2+\cdots+\lambda_{kn}(e_i)_n=\lambda_{ki}$$

$i=j$ のときだけが $(e_i)_j$ が 0 でないので、λ の添え字において $j=i$ になります。このとき、固定されているのは i なので、M の行列成分は列が固定されています。今は R^n のベクトルを $n\times 1$ 行列と見なしているのと同じように、λ_{ki} を M の i 列目によるベクトル c_i と見なします。これに合わせて、M を

$$M=(c_1\ c_2\ \cdots\ c_n)=(Me_1\ Me_2\ \cdots\ Me_n)\quad ((Me_1)_k=\lambda_{k1}\Rightarrow c_1,\ (Me_2)_k=\lambda_{k2}\Rightarrow c_2,\dots)$$

と表記します。c_i は単独では $m\times 1$ 行列です。

この結果と、行列の積による

$$Mv=(c_1\ c_2\ \dots\ c_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2+\cdots+\alpha_n c_n$$

から、T を

$$T(e_i) = c_i$$

とすれば、線形性から

$$T(v) = \alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_2) + \cdots + \alpha_n T(e_n) = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n = Mv$$

となるので、行列 M は $T(e_i) = c_i$ で与えられます。

c_i が線形独立なら Mv によるベクトル空間 (R^m の部分空間) の次元は n で、線形独立な c_i の数を行列 M の階数と呼びます。例えば、c_i が線形独立でなく、$c_2 = c_3$ なら

$$Mv = \alpha_1 c_1 + \alpha'_3 c_3 + \cdots + \alpha_n c_n$$

となり、階数は $n - 1$ です。

Mv によるベクトル空間は M の像なので、線形演算子 T の $\mathrm{Im}T$ の次元である階数は、対応する行列 M の階数です（M は T の表現行列と呼ばれる。「線形演算子と行列」参照)。$m \times n$ 行列では作用するベクトル空間の次元は n と決まっているので、$\mathrm{Ker}M$ の次元は $n -$ 階数 となり、行列 M の退化次数と呼ばれます。

また、階数を列によるベクトルで与えましたが、行でも同様に定義されます。