ルジャンドル多項式

直交多項式であるルジャンドル多項式をロドリゲスの公式から導出します。他の方法は「ルジャンドル方程式」と「直交多項式」で行っています。
複素積分が出てきますが、知っているとして話を進めています。

微分から多項式を作ることを考えます。エルミート多項式では e^{-x^2} の微分で常に $-2x$ が出てくることから多項式になっています。なので、同じように微分すると常に $2x$ が出てくる $(x^2-1)^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を使うと、n と微分の回数が等しければ

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)=2x$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=2\frac{d}{dx}(2x(x^2-1))=4x^2-4+2(2x)^2=12x^2-4$$
$$\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3=3\frac{d}{dx}(2(x^2-1)^2+2(2x)^2(x^2-1))=24x(x^2-1)+48x(x^2-1)+3\times2(2x)^3=120x^3-72x$$

として、多項式が出てきます。そして、$(x^2-1)^n$ を n 回微分したときに出てくる $2^nn!$ で割って (x^n の係数ではない)

$$P_{(n)}(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

としたものがルジャンドル多項式 (Legendre polynomials) です。これはルジャンドル多項式のロドリゲスの公式です。
和の形にします。二項定理から

$$(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}(-1)^k$$

となるのを使えば

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n&=\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kn!}{k!(n-k)!}(2n-2k)x^{2n-2k-1}\\&=\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kn!}{k!(n-k)!}(2n-2k)(2n-2k-1)x^{2n-2k-2}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kn!}{k!(n-k)!}(2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(2n-2k-m+1)x^{2n-2k-m}\end{aligned}$$

$m=n$ のとき

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kn!}{k!(n-k)!}(2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(n-2k+1)x^{n-2k}$$

$(x^2-1)^n$ を n 回微分したとき、最低次は x^0 なので $n-2k\geq 0$ です。このため、n が偶数なら k は $n/2$ まで、奇数なら $(n-1)/2$ までです。そして、階乗を使えば

$$(2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(n-2k+1)=\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}$$

なので

$$P_{(n)}(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{1}{2^n}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{1}$$

$[n/2]$ は n が偶数なら $n/2$、奇数なら $(n-1)/2$ の意味です。和の形としてルジャンドル多項式を定義するときにはこれが使われます。いくつか求めると

$$\begin{aligned}
&P_{(0)}=1\\
&P_{(1)}=x\\
&P_{(2)}=\frac{1}{2}(\frac{4!}{2!2!}x^2-1)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\\
&P_{(3)}=\frac{1}{8}(\frac{6!}{3!3!}x^3-\frac{4!}{2!}x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\\
&P_{(4)}=\frac{1}{16}(\frac{8!}{4!4!}x^4-\frac{6!}{3!2!}x^2+\frac{4!}{2!2!})=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)
\end{aligned}$$

また、エルミート多項式と同じように偶数か奇数の多項式になっているので、x の符号に対して

$$P_{(n)}(-x)=(-1)^nP_{(n)}(x)$$

となっています。

$P_{(n)}$ の直交性を作ります。直交関係の積分を

$$\int_{-1}^{1}dxP_{(m)}(x)P_{(n)}(x)$$

と与えます。積分範囲を -1 から 1 にすることで、x^2-1 の項が 0 になるため余計な項が消えます。片方をロドリゲスの公式で書くと

$$\int_{-1}^{1}dxP_{(m)}(x)P_{(n)}(x)=\frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1}dx\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}P_{(n)}(x) \tag{2}$$

例えば、$m=2,n=1$ としてみると

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx \frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} P_{(1)}(x) =& \int_{-1}^{1} dx \frac{d}{dx}\frac{d(x^2-1)^2}{dx} P_{(1)}(x) \\
=& \left[4x(x^2-1)P_{(1)}\right]_{-1}^{1} + (-1)\int_{-1}^{1} dx \frac{d(x^2-1)^2}{dx}\frac{dP_{(1)}}{dx} \\
=& -\left[(x^2-1)^2\frac{dP_{(1)}}{dx}\right]_{-1}^{1} - (-1)\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^2\frac{d^2P_{(1)}}{dx^2} \\
=& (-1)^2\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^2\frac{d^2P_{(1)}}{dx^2} \\
=& 0
\end{aligned}
$$

として、部分積分による余計な項が消えてくれます。そして、$P_{(1)}$ は x の 1 次までの多項式なので 2 回微分すれば 0 になります。このように、n 次多項式に m 回微分が出てくるために $m>n$ で 0 になり、(2) ではどちらが m か n かは任意なので $m\neq n$ で 0 です。

$m=n$ では、$P_{(n)}$ を n 回微分したら定数になることから

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} P_{(n)}(x) =& (-1)^n\int_{-1}^{1} dx (x^2-1)^n\frac{d^nP_{(n)}}{dx^n} \\
=& A_n\int_{-1}^{1} dx(x^2-1)^n \qquad (A_n=(-1)^n\frac{d^nP_{(n)}}{dx^n}) \\
=& -A_n\int_{-\pi}^{0} d\theta\sin\theta(\cos^2\theta-1)^n \qquad (x=\cos\theta\ ,\ dx=-\sin\theta d\theta) \\
=& -(-1)^nA_n\int_{-\pi}^{0} d\theta\sin^{2n+1}\theta \\
=& \frac{d^nP_{(n)}}{dx^n}\int_{0}^{\pi} d\theta\sin^{2n+1}\theta
\end{aligned}
$$

この積分は $(k!!=k(k-2)(k-4)\cdots)$

$$
\int d\theta\sin^{2n+1}\theta = -\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cos\theta(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sin^{2n}\theta+\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sin^{2n-2}\theta+\cdots+\frac{1}{2}\sin^2\theta+1)
$$

なので

$$
\int_{0}^{\pi} d\theta\sin^{2n+1}\theta = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}
$$

$p_{(n)}$ の x^n の項は (1) から

$$
P_{(n)} = \frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n+\cdots
$$

となっているので

$$\frac{d^n}{dx^n}P_{(n)}(x)=\frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{d^n}{dx^n}x^n=\frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{n!}$$

よって

$$\int_{-1}^{1}dx\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}P_{(n)}(x)=\frac{2}{2^n n!}\frac{(2n)!}{(2n+1)!!}(2n)!!$$

これは、二重階乗が

$$(2n)!!=2n(2n-2)(2n-4)\cdots=2n\times 2(n-1)\times 2(n-2)\cdots=2^n n!$$
$$\frac{(2n)!}{(2n+1)!!}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 1}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 1}=\frac{(2n)!!}{2n+1}=\frac{2^n n!}{2n+1}$$

となるのを使えば

$$\frac{2}{2^n n!}\frac{(2n)!}{(2n+1)!!}(2n)!!=\frac{2}{2^n n!}\frac{2^{2n}(n!)^2}{2n+1}=2\frac{2^n n!}{2n+1}$$

となり

$$\int_{-1}^{1}dx\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}P_{(n)}(x)=2\frac{2^n n!}{2n+1}$$

というわけで

$$\int_{-1}^{1}dxP_{(n)}(x)P_{(n)}(x)=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}dx\frac{d(x^2-1)^n}{dx^n}P_{(n)}(x)=\frac{2}{2^n n!}\frac{2^n n!}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}$$

まとめれば、クロネッカーデルタ δ_{mn} を使って

$$\int_{-1}^{1}dxP_{(m)}(x)P_{(n)}(x)=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

この内積によってルジャンドル多項式の直交性が与えられています。今の場合のウェイト関数は 1 です。

ルジャンドル多項式を積分の形で与えます。複素積分のグルサの定理は

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}=\frac{n!}{2\pi i}\int_C dz\frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}$$

C は複素平面での $z=x$ を囲む閉曲線です。閉曲線と言ったときは反時計回りとします。これを使えば

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{n!}{2\pi i}\int_C dz\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}$$

なので、ルジャンドル多項式の積分形として

$$P_{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int_C dz \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} \tag{3}$$

これはシュレーフリ積分 (Schläfli integral) と呼ばれます。ルジャンドル多項式の積分形は他の形でも与えられていますが、それは最後に示します。

ルジャンドル多項式の母関数を求めます。母関数 G は

$$G(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n P_{(n)}$$

と定義します。G を (3) との対応から求めます。z の経路を x が中心の円として

$$z = x + ae^{i\theta} \quad (0 < a < |x| \ , \ 0 \leq \theta < 2\pi)$$

a の制限は原点を円の中に含めないためです。そうすると、この経路上で

$$|\frac{r(z^2-1)}{z-x}| = |r\frac{(x+ae^{i\theta})^2-1}{ae^{i\theta}}|$$

これは r が十分小さければ 1 より小さくなります。そうすると、収束する幾何級数として

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n(z^2-1)^n}{(z-x)^n} = (1-\frac{r(z^2-1)}{z-x})^{-1}$$

これを今の経路で積分すると

$$\begin{aligned}\int_C dz\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{2^n}\frac{r^n(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} &= \int_C dz\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z-x}\frac{r'^n(z^2-1)^n}{(z-x)^n} \qquad (r'=\frac{r}{2})\\ &= \int_C dz\frac{1}{z-x}\frac{z-x}{z-x-r'z^2+r'}\\ &= -\int_C dz\frac{1}{r'z^2-z+x-r'}\end{aligned}$$

分母は

$$r'z^2-z+x-r' = r'(z-\frac{1+\sqrt{1-4r'(x-r')}}{2r'})(z-\frac{1-\sqrt{1-4r'(x-r')}}{2r'}) = r'(z-z_1)(z-z_2)$$

r' が小さいとき

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{1-4r'(x-r')}}{2r'} \simeq \frac{1+\sqrt{1-4r'x}}{2r'} \simeq \frac{2-2r'x}{2r'}$$

$$z_2 = \frac{1-\sqrt{1-4r'(x-r')}}{2r'} \simeq \frac{1-1+2r'x}{2r'} = x$$

今の経路内にいるのは z_2 のほうなので、この極を拾うことで留数定理から

$$\begin{aligned}\int_C dz\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} = -\int_C dz\frac{1}{r'z^2-z+x-r'} &= -\int_C dz\frac{1}{r'}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\\ &= -2\pi i\frac{1}{r'}\frac{1}{z_2-z_1}\\ &= 2\pi i\frac{1}{\sqrt{1-4r'(x-r')}}\\ &= 2\pi i\frac{1}{\sqrt{r^2-2xr+1}}\end{aligned}$$

これを $g_n=1$ として母関数の定義に入れると、$|r|<1$ で

$$G(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty}r^nP_{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C(\frac{r}{2})^n\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz=\frac{1}{\sqrt{r^2-2xr+1}}$$

母関数の定義から、$r=0$ でのべき級数に展開できないといけないので、$|x|\leq 1$ に対して $|r|<1$ の条件が付きます。

G を展開するとルジャンドル多項式が出てくることを確かめます。$\Delta=2xr-r^2$ が微小として

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\Delta}} &= 1+(-\frac{1}{2})(-\Delta)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\Delta)^2+\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\Delta)^3+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}\Delta+\frac{3\times 1}{4\times 2}\Delta^2+\frac{5\times 3\times 1}{6\times 4\times 2}\Delta^3+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\Delta^n+\cdots\end{aligned}$$

Δ^n は

$$r^n(2x-r)^n=r^n\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(2x)^{n-k}(-r)^k$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\Delta}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(2x)^{n-k}r^{n+k}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l/2}(-1)^k\frac{(2(l-k)-1)!!}{(2l-2k)!!}\frac{(l-k)!}{k!(l-2k)!}(2x)^{l-2k}r^l \qquad (l=n+k)\end{aligned}$$

x^{l-2k} において、l が偶数 $2m$ なら $x^{2m},x^{2m-2},\ldots x^2,x^0$、奇数 $2m+1$ なら $x^{2m+1},x^{2m-1},\ldots,x^3,x^1$ と続いていきます。このため、和の範囲は、l が偶数なら $l/2$、奇数なら $(l-1)/2$ です。これを $[l/2]$ で表記して

$$\sum_{l=0}^{\infty}r^l\sum_{k=0}^{[l/2]}2^{l-2k}(-1)^k\frac{(2l-2k-1)!!}{(2l-2k)!!}\frac{(l-k)!}{k!(l-2k)!}x^{l-2k}$$

二重階乗は

$$(2l-2k)!! = (2(l-k))!! = 2^{l-k}(l-k)!$$

$$(2l-2k-1)!! = (2(l-k)-1)!! = \frac{(2(l-k))!}{(2(l-k))!!} = \frac{(2l-2k)!}{2^{l-k}(l-k)!}$$

なので

$$\frac{(2l-2k-1)!!}{(2l-2k)!!}\frac{(l-k)!}{k!(l-2k)!} = \frac{(2l-2k)!}{2^{l-k}(l-k)!}\frac{1}{2^{l-k}(l-k)!}\frac{(l-k)!}{k!(l-2k)!} = \frac{1}{2^{2l-2k}}\frac{1}{k!}\frac{(2l-2k)!}{(l-k)!(l-2k)!}$$

よって、$|r|<1, |x|\leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{r^2-2xr+1}} &= \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k \frac{2^{l-2k}}{2^{2l-2k}}\frac{1}{k!}\frac{(2l-2k)!}{(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} r^l \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k \frac{1}{k!}\frac{(2l-2k)!}{(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_{(l)}(x)
\end{aligned}$$

となり、ルジャンドル多項式が出てきます。

ルジャンドル多項式の漸化式と微分方程式を求めます。母関数を r で偏微分すると

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial r} = -\frac{r-x}{(r^2-2xr+1)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_{(n)}r^{n-1}$$

これは

$$(r^2-2xr+1)\sum_{n=0}^{\infty} nP_{(n)}r^{n-1} = -\frac{r-x}{(r^2-2xr+1)^{1/2}} = -(r-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_{(n)}r^n$$

なので

$$(r^2-2xr+1)\sum_{n=0}^{\infty} nP_{(n)}r^{n-1} + (r-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_{(n)}r^n = 0$$

第 1 項は

$$\begin{aligned}
(r^2-2xr+1)\sum_{n=0}^{\infty} nP_{(n)}r^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_{(n)}r^{n+1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_{(n)}r^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_{(n)}r^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{(n-1)}r^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nP_{(n)}r^n + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)P_{(n+1)}r^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{(n-1)}r^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nP_{(n)}r^n + P_{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)P_{(n+1)}r^n
\end{aligned}$$

最後に r^0 の項を分離しています。第 2 項も r^0 の項を分離して

$$(r-x)\sum_{n=0}^{\infty}P_{(n)}r^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_{(n)}r^{n+1}-x\sum_{n=0}^{\infty}P_{(n)}r^n=\sum_{n=1}^{\infty}P_{(n-1)}r^n-xP_{(0)}-x\sum_{n=1}^{\infty}P_{(n)}r^n$$

そうすると

$$\begin{aligned}&(r^2-2xr+1)\sum_{n=0}^{\infty}nP_{(n)}r^{n-1}+(r-x)\sum_{n=0}^{\infty}P_{(n)}r^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{(n-1)}r^n-2x\sum_{n=1}^{\infty}nP_{(n)}r^n+P_{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)P_{(n+1)}r^n\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}P_{(n-1)}r^n-xP_{(0)}-x\sum_{n=1}^{\infty}P_{(n)}r^n\\&=-xP_{(0)}+P_{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)P_{(n-1)}-2xnP_{(n)}+(n+1)P_{(n+1)}+P_{(n-1)}-xP_{(n)})r^n\\&=(-xP_{(0)}+P_{(1)})r^0+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)P_{(n+1)}-(2n+1)xP_{(n)}+nP_{(n-1)})r^n\end{aligned}$$

これが 0 になるので、第 1 項からは $P_{(1)}=xP_{(0)}$、第 2 項からは

$$(n+1)P_{(n+1)}-(2n+1)xP_{(n)}+nP_{(n-1)}=0 \tag{4}$$

として、$n=1,2,\ldots$ の漸化式が求まります。

今度は微分方程式を求めます。面倒なだけの式変形を行っていきます。x での偏微分は

$$\frac{\partial G(x,r)}{\partial x}=\frac{r}{(r^2-2xr+1)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dP_{(n)}(x)}{dx}r^n$$

これから

$$(r^2-2xr+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^n-r\sum_{n=0}^{\infty}P_{(n)}r^n=0$$

第 1 項は

$$\begin{aligned}(r^2-2xr+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^{n+2}-2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^{n+2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{dP_{(n-1)}}{dx}r^{n+1}-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dP_{(n+1)}}{dx}r^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n-1)}}{dx}r^{n+1}-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^{n+1}+\frac{dP_{(1)}}{dx}r+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n+1)}}{dx}r^{n+1}\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
&(r^2-2xr+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^n - r\sum_{n=0}^{\infty}P_{(n)}r^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n-1)}}{dx}r^{n+1} - 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^{n+1} + \frac{dP_{(1)}}{dx}r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n+1)}}{dx}r^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}P_{(n)}r^{n+1} \\
&= \frac{dP_{(1)}}{dx}r - P_{(0)}r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n-1)}}{dx}r^{n+1} - 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n)}}{dx}r^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{dP_{(n+1)}}{dx}r^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}P_{(n)}r^{n+1} \\
&= (\frac{dP_{(1)}}{dx} - P_{(0)})r + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{dP_{(n+1)}}{dx} - 2x\frac{dP_{(n)}}{dx} + \frac{dP_{(n-1)}}{dx} - P_{(n)})r^{n+1} \qquad (5a)
\end{aligned}
$$

これが 0 になるので、第 1 項からは $dP_{(1)}/dx = P_{(0)}$、第 2 項から $n = 1, 2, \ldots$ の微分を含む漸化式として

$$
\frac{dP_{(n+1)}}{dx} - 2x\frac{dP_{(n)}}{dx} + \frac{dP_{(n-1)}}{dx} - P_{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (5b)
$$

$dP_{(n)}/dx$ の項を消すために、漸化式 (4) を x で微分して、2 倍して

$$
2(n+1)\frac{dP_{(n+1)}}{dx} - 2(2n+1)x\frac{dP_{(n)}}{dx} - 2(2n+1)P_{(n)} + 2n\frac{dP_{(n-1)}}{dx} = 0 \qquad (5c)
$$

として、(5b) に $2n+1$ をかけたものから引けば

$$
\begin{aligned}
0 &= (2n+1-2n-2)\frac{dP_{(n+1)}}{dx} + 2(2n+1)P_{(n)} + (2n+1)\frac{dP_{(n-1)}}{dx} - 2n\frac{dP_{(n-1)}}{dx} - (2n+1)P_{(n)} \\
&= -\frac{dP_{(n+1)}}{dx} + \frac{dP_{(n-1)}}{dx} + (2n+1)P_{(n)} \qquad (5d)
\end{aligned}
$$

さらに、$P_{(n+1)}$ と $P_{(n-1)}$ を消します。

$dP_{(n-1)}/dx$ のいない式を作るために (5b) から (5d) を引くと

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\frac{dP_{(n+1)}}{dx} - 2x\frac{dP_{(n)}}{dx} - P_{(n)} - (2n+1)P_{(n)} \\
&= \frac{dP_{(n+1)}}{dx} - x\frac{dP_{(n)}}{dx} - (n+1)P_{(n)} \qquad (5e)
\end{aligned}
$$

これは $n = 0$ のとき

$$
\frac{dP_{(1)}}{dx} - P_{(0)} = 0
$$

として、(5a) での r の項の関係が出てきます。なので、(5e) は $n = 0, 1, 2, \ldots$ で成立しています。

$dP_{(n+1)}/dx$ のいない式は (5b) と (5d) を足すことで

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\frac{dP_{(n-1)}}{dx} - 2x\frac{dP_{(n)}}{dx} - P_{(n)} + (2n+1)P_{(n)} \\
&= \frac{dP_{(n-1)}}{dx} - x\frac{dP_{(n)}}{dx} + nP_{(n)} \qquad (5f)
\end{aligned}
$$

そうすると、(5e) の n を 1 減らして

$$0 = \frac{dP_{(n)}}{dx} - x\frac{dP_{(n-1)}}{dx} - nP_{(n-1)}$$

とすれば、(5f) に x をかけたものを足せば $dP_{(n-1)}/dx$ の消えた式が作れて

$$\begin{aligned}0 &= \frac{dP_{(n)}}{dx} - x\frac{dP_{(n-1)}}{dx} - nP_{(n-1)} + x\frac{dP_{(n-1)}}{dx} - x^2\frac{dP_{(n)}}{dx} + nxP_{(n)}\\ &= (1-x^2)\frac{dP_{(n)}}{dx} - nP_{(n-1)} + nxP_{(n)}\end{aligned}$$

$P_{(n-1)}$ の項を消すために、これを x で微分して、(5f) に n をかけたものを足すと

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dP_{(n)}}{dx}) - n\frac{dP_{(n-1)}}{dx} + nx\frac{dP_{(n)}}{dx} + nP_{(n)} + n\frac{dP_{(n-1)}}{dx} - nx\frac{dP_{(n)}}{dx} + n^2P_{(n)}\\ &= \frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dP_{(n)}}{dx}) + n(n+1)P_{(n)}\end{aligned}$$

となり、ルジャンドル方程式になります。

まとめると

- ロドリゲスの公式

$$P_{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

- 積分形

  シュレーフリ積分

$$P_{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int_C dz\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}$$

  ラプラス積分

$$P_{(n)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n$$

  Mehler-Dirichlet の公式

$$P_{(n)}(\cos\phi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\psi\frac{\cos(n+1/2)\psi}{\sqrt{2\cos\psi - 2\cos\theta}} \qquad (0<\phi<\pi)$$

- 和の形

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{1}{2^n}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

- 直交関係

$$\int_{-1}^{1} dx P_{(m)}(x) P_{(n)}(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

- $P_{(n)}(x) = (-1)^n P_{(n)}(-x)$

- 母関数

$$G(x,r) = \frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}$$

- 漸化式 $(n = 1, 2, \ldots)$

$$(n+1)P_{(n+1)} - (2n+1)xP_{(n)} + nP_{(n-1)} = 0$$

- 微分方程式 (ルジャンドル方程式)

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dP_{(n)}}{dx}) + n(n+1)P_{(n)} = 0$$

ラプラス積分と Mehler-Dirichlet の公式は最後に求めています。
　一般化したロドリゲスの公式を使った場合も見ておきます。一般化したロドリゲスの公式での n 次多項式 $C_{(n)}$ は

$$C_{(n)}(x) = \frac{1}{K_n}\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}(w(x)s^n(x))$$

直交関係の積分範囲は $s(a)w(a) = s(b)w(b) = 0$ となる a, b で与えられます。$s(x)$ を

$$s(x) = \gamma(x-\alpha)(\beta-x) \quad (\beta > \alpha)$$

とします。α, β, γ は定数です。$C_{(1)}$ は 1 次多項式なので

$$C_{(1)} = -\frac{1}{K_1}x$$

として

$$\begin{aligned}
-x &= \frac{1}{w}\frac{d}{dx}(ws)\\
\frac{1}{w}\frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{s}(\frac{ds}{dx}+x)\\
&= -\frac{1}{\gamma(x-\alpha)(\beta-x)}(\gamma(\beta-x)-\gamma(x-\alpha)+x)\\
&= -\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{\beta-x}-\frac{x}{\gamma(x-\alpha)(\beta-x)}\\
&= -\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{\beta-x}-\frac{x}{\gamma}\frac{1}{\beta-\alpha}(\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{\beta-x})\\
&= -\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{\gamma(\beta-\alpha)}\frac{x}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{\gamma(\beta-\alpha)}\frac{x}{x-\beta}\\
\log|w| &= -\log|x-\alpha|-\frac{1}{\gamma(\beta-\alpha)}(x+\alpha\log|x-\alpha|)-\log|x-\beta|+\frac{1}{\gamma(\beta-\alpha)}(x+\beta\log|x-\beta|)+C\\
&= -\log|x-\alpha|-\frac{\alpha}{\gamma(\beta-\alpha)}\log|x-\alpha|-\log|x-\beta|+\frac{\beta}{\gamma(\beta-\alpha)}\log|x-\beta|+C\\
|w| &= \exp\big[(-1-\frac{\alpha}{\gamma(\beta-\alpha)})\log|x-\alpha|+(-1+\frac{\beta}{\gamma(\beta-\alpha)})\log|x-\beta|+C\big]\\
w &= C'|x-\alpha|^\mu|\beta-x|^\nu
\end{aligned}$$

C, C' は定数で、μ, ν は

$$\mu=-1-\frac{\alpha}{\gamma(\beta-\alpha)}\ ,\ \nu=-1+\frac{\beta}{\gamma(\beta-\alpha)}$$

としています。これから

$$s(x)w(x)=C'\gamma(x-\alpha)(\beta-x)|x-\alpha|^\mu|\beta-x|^\nu=C''|x-\alpha|^{\mu+1}|\beta-x|^{\nu+1}$$

となるので、$\mu, \nu>-1$ なら $x=\alpha, \beta$ で 0 になることから、直交関係での積分範囲は α から β です。式を簡単にするために、x を

$$\begin{aligned}
&(x-\alpha)(\beta-x)=-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\\
&(2x-(\alpha+\beta))^2-(\alpha-\beta)^2=4x^2-2(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)
\end{aligned}$$

から

$$\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=y$$

と置き換えれば

$$(x-\alpha)(\beta-x)=-\frac{1}{4}((2x-(\alpha+\beta))^2-(\beta-\alpha)^2)=-\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2(y^2-1)$$

規格化の K_n で消せるので係数を省けば、$s(y)=1-y^2$ となります。この置き換えで、w は

$$1-\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-2(x-\beta)$$

$$1+\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=\beta-\alpha+2x-\alpha-\beta=2(x-\alpha)$$

から、$w=|1+y|^{\mu}|1-y|^{\nu}$ となります。そして、直交関係の積分範囲は $x=\alpha,\beta$ で 0 になるときなので、y では -1 から 1 となります。このようにして与えられられる多項式をヤコビ (Jacobi) 多項式と言い、$w=1$ のとき $ws^n=(1-y^2)^n$ からルジャンドル多項式になります。

最後に、ルジャンドル多項式の別の積分形を求めます。(3) において、経路を $z=x$ を中心にする半径 a の円とします。このときは、実軸からの角度を θ として

$$z=x+ae^{i\theta}\ ,\ dz=iae^{i\theta}d\theta$$

から

$$P_{(n)}(x)=\frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta ae^{i\theta}\frac{(x^2+2ae^{i\theta}x+a^2e^{2i\theta}-1)^n}{(ae^{i\theta})^{n+1}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\frac{(x^2-1+2axe^{i\theta}+a^2e^{2i\theta})^n}{(2ae^{i\theta})^n}$$

a を $\sqrt{x^2-1}$ とします。$x^2>1$ なら

$$P_{(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta(\frac{ae^{i\theta}(2x+ae^{i\theta}+ae^{-i\theta}}{2ae^{i\theta}})^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta(x+a\cos\theta)^n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}d\theta(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n$$

$x^2<1$ では $a=\sqrt{1-x^2}$ なので

$$\begin{aligned}P_{(n)}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\frac{(-(1-x^2)+2axe^{i\theta}+a^2e^{2i\theta})^n}{(2ae^{i\theta})^n}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\frac{(-a^2+2axe^{i\theta}+a^2e^{2i\theta})^n}{(2ae^{i\theta})^n}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta(\frac{ae^{i\theta}(2x+ae^{i\theta}-ae^{-i\theta}}{2ae^{i\theta}})^n\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta(x-i\sqrt{1-x^2}\sin\theta)^n\end{aligned}$$

三角関数の積分は

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\sin^m\theta=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\cos^m\theta\quad(m=1,2,\dots)$$

なので

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x-i\sqrt{1-x^2}\sin\theta)^n d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}(x-i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta=2\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta$$

ルート部分は i を取り出していますが、実際は

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{-(x^2-1)}=\pm i\sqrt{x^2-1}$$

なので、符号を決めるには偏角を指定する必要があります。しかし、$\theta=\pi-\theta'$ とすれば

$$\int_0^{\pi}(x-i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta=-\int_{\pi}^{0}d\theta'(x-i\sqrt{1-x^2}\cos(\pi-\theta'))^n=\int_0^{\pi}d\theta'(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta')^n$$

として、式の形を変えずに符号を反転させられます。このため、符号は気にする必要がなく

$$P_{(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-i\sqrt{1-x^2}\sin\theta)^n d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta$$

とでき、$x^2>1$ と同じ結果になります。同じになる理由は、奇数 $2m+1$ $(m=0,1,2,\ldots)$ では cos の性質から

$$\int_0^{\pi}d\theta\cos^{2m+1}\theta=0$$

となるので、ルートの項が現れないからとも言えます。というわけで、ルジャンドル多項式は

$$P_{(n)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta$$

と書けて、これはラプラス積分 (Laplace integral) と呼ばれます。x が $-1\leq x\leq +1$ なら

$$|x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta|=|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|=\sqrt{x^2+(1-x^2)\cos\theta}\leq 1$$

から

$$\int_0^{\pi}d\theta|x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta|^n\leq\int_0^{\pi}d\theta=\pi$$

なので

$$|P_{(n)}(x)|=\frac{1}{\pi}|\int_0^{\pi}d\theta(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n|\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta|x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta|^n\leq 1\quad(-1\leq x\leq +1)$$

という制限があるのが分かります。

ラプラス積分をさらに変形します。x を $-1<x<+1$ と設定して、$x=\cos\phi$ $(0<\phi<\pi)$ とすれば

$$P_{(n)}(\cos\phi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta(\cos\phi+i\sin\phi\cos\theta)^n$$

これを

$$t=\cos\phi+i\sin\phi\cos\theta\ ,\ dt=-i\sin\phi\sin\theta d\theta$$

として

$$P_{(n)}(\cos\phi)=\frac{1}{\pi}\int_{e^{i\phi}}^{e^{-i\phi}}dt\frac{t^n}{-i\sin\phi\sin\theta}$$

分母は

$$\sin^2\phi\sin^2\theta=\sin^2\phi(1-\cos^2\theta)=1-\cos^2\phi-\sin^2\phi\cos^2\theta$$

と変形でき、これは

$$t^2=\cos^2\phi-\sin^2\phi\cos^2\theta+2i\sin\phi\cos\phi\cos\theta$$

$$2t\cos\phi=2\cos^2\phi+2i\sin\phi\cos\phi\cos\theta$$

から

$$t^2-2t\cos\phi+1=-\cos^2\phi-\sin^2\phi\cos^2\theta+1$$

と作れるので

$$P_{(n)}(\cos\phi)=\frac{1}{-i\pi}\int_{e^{i\phi}}^{e^{-i\phi}}dt\frac{t^n}{\sqrt{t^2-2t\cos\phi+1}}=\frac{1}{i\pi}\int_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}}dt\frac{t^n}{\sqrt{t^2-2t\cos\phi+1}}$$

これは複素平面上で、半径が 1 の円上の角度が $-\phi$ の地点 A から $+\phi$ の地点 B への直線上の積分です。この直線と円上の A,B を結ぶ円弧による閉曲線を作ります。分母が 0 になる t は

$$t^2-2t\cos\phi+1=0\ \Rightarrow\ t=\cos\phi\pm\sqrt{\cos^2\phi-1}\quad (0<\phi<\pi)$$

となっており、$|\cos\phi|<1$ なので閉曲線内の領域における t では 0 にならないです (この領域で解析的)。このため、B から A へ直線で行き、A から B へ円弧に沿って進む閉曲線 C による積分は 0 になるので

$$\int_C dt\frac{t^n}{\sqrt{t^2-2t\cos\phi+1}}=\int_{e^{i\phi}}^{e^{-i\phi}}dt\frac{t^n}{\sqrt{t^2-2t\cos\phi+1}}+\int_{AB}dt\frac{t^n}{\sqrt{t^2-2t\cos\phi+1}}$$

$$-\int_{e^{i\phi}}^{e^{-i\phi}}dt\frac{t^n}{\sqrt{t^2-2t\cos\phi+1}}=\int_{AB}dt\frac{t^n}{\sqrt{t^2-2t\cos\phi+1}}$$

第 2 項の AB は A から B への円弧の経路を表します。$t = e^{i\psi}$ とすることで

$$
\begin{aligned}
P_{(n)}(\cos\phi) = \frac{1}{i\pi}\int_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} dt \frac{t^n}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\phi + 1}} &= \frac{1}{i\pi}\int_{AB} dt \frac{t^n}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\phi + 1}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\phi}^{\phi} d\psi e^{i\psi} \frac{e^{in\psi}}{\sqrt{e^{2i\psi} - 2e^{i\psi}\cos\phi + 1}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\phi}^{\phi} d\psi e^{i\psi} \frac{e^{in\psi}}{\psi^{i\psi/2}\sqrt{e^{i\psi} + e^{-i\psi} - 2\cos\phi}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\phi}^{\phi} d\psi \frac{e^{i(n+1/2)\psi}}{\sqrt{2\cos\psi - 2\cos\phi}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\phi}^{\phi} d\psi \frac{1}{\sqrt{2\cos\psi - 2\cos\phi}}(\cos((n+1/2)\psi) + i\sin((n+1/2)\psi)) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\phi} d\psi \frac{\cos((n+1/2)\psi)}{\sqrt{2\cos\psi - 2\cos\phi}}
\end{aligned}
$$

これを Mehler-Dirichlet の公式と言います。