ルジャンドル方程式

ルジャンドル方程式の級数解を求めます。ルジャンドル多項式は求めているだけで性質の話はしていないです。最後にルジャンドル陪方程式に少し触れています。

ルジャンドル (Legendre) 方程式、もしくはルジャンドル微分方程式と呼ばれる 2 階微分方程式は

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\alpha(\alpha+1)y(x)=0 \tag{1}$$

という形で与えられています。α は定数です。これは

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx})=-2x\frac{dy}{dx}+(1-x^2)\frac{dy}{dx}$$

から

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx})+\alpha(\alpha+1)y=0$$

と書かれることも多いです。$\alpha=0$ のときは簡単に求められて、$|x|<1$ なら

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx})&=0\\
(1-x^2)\frac{dy}{dx}&=C_1\\
\int dy&=C_1\int dx\frac{1}{1-x^2}\\
y(x)&=\frac{1}{2}C_1\int dx(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})\\
&=\frac{1}{2}C_1(-\log|1-x|+\log|1+x|)+C_2\\
&=\frac{1}{2}C_1\log\frac{1+x}{1-x}+C_2
\end{aligned}$$

C_1, C_2 は定数です。$x=1$ で発散するのはルジャンドル方程式が

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}y=0 \tag{2}$$

となっていることから予想できる結果です。

$\alpha\neq 0$ ではまともに解けないので級数解を求めます。特異点を先に見ておきます。(2) を

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

としたとき

$$(1-x)p(x)=(1-x)\frac{-2x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-2x}{1+x}$$
$$(1-x)^2q(x)=(1-x)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}=\frac{1-x}{1+x}\alpha(\alpha+1)$$

これらは $x=1$ で解析的なので、$x=1$ は確定特異点です。$x=-1$ でも同様なので、$x=\pm1$ は確定特異点と分かります。もう 1 つ確定特異点があることが $w=1/x$ とすると分かります。これは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dw}{dx}\frac{dy}{dw}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw}=-w^2\frac{dy}{dw}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{dw}{dx}\frac{d}{dw}(w^2\frac{dy}{dw})=w^2(2w\frac{dy}{dw}+w^2\frac{d^2y}{dw^2})$$

なので

$$\begin{aligned}0&=(1-w^{-2})w^3(w\frac{d^2y}{dw^2}+2\frac{dy}{dw})+2w^{-1}w^2\frac{dy}{dw}+\alpha(\alpha+1)y\\&=(w^3-w)(w\frac{d^2y}{dw^2}+2\frac{dy}{dw})+2w\frac{dy}{dw}+\alpha(\alpha+1)y\\&=w^2(w^2-1)\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw}+\alpha(\alpha+1)y\\&=\frac{d^2y}{dw^2}+\frac{2w}{w^2-1}\frac{dy}{dw}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{w^2(w^2-1)}y\end{aligned}$$

このとき、$q(w)$ が $w=0$ で発散するので $w=0$ は特異点ですが

$$wp(w)=\frac{2w^2}{w^2-1}\ ,\ w^2q(w)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{w^2-1}$$

から、確定特異点です。$w=0$ は $|x|\to\infty$ なので、無限大が確定特異点となっています。

解を級数解として求めます。$x=0$ は通常点なので、$x=0$ でのべき級数として y を

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

と与えます。c_n は定数です。ルジャンドル方程式 (1) の微分の項は

$$2x\frac{dy}{dx} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^n$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^n$$

となるので、ルジャンドル方程式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

第 1 項は $n = 0, 1$ で 0 なので

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

と変形して

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1) - 2c_n n + \alpha(\alpha+1)c_n)x^n = 0$$

$x^n \neq 0$ として、c_n の漸化式が

$$\begin{aligned} c_{n+2}(n+2)(n+1) + (-n(n-1) - 2n + \alpha(\alpha+1))c_n = 0 \\ c_{n+2} &= -\frac{-n(n+1)+\alpha(\alpha+1)}{(n+1)(n+2)}c_n \\ &= -\frac{\alpha^2 - n^2 + \alpha - n}{(n+1)(n+2)}c_n \\ &= -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)}c_n \qquad (3) \end{aligned}$$

と求まります。

n が偶数のときは

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}c_0 \\ c_4 &= -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4\times 3}c_2 = \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}c_0 \\ c_6 &= -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{6\times 5}c_4 = -\frac{(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!}c_0 \end{aligned}$$

と続いているので

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{(\alpha-2n+2)(\alpha-2n+4)\cdots(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!} c_0$$

これによる解は

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha-2n+2)(\alpha-2n+4)\cdots(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!} x^{2n} \\
&= c_0(1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} x^2 + \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} x^4 - \cdots) \\
&= c_0 p_\alpha(x)
\end{aligned}$$

奇数では

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} c_1 \\
c_5 &= -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5\times 4} c_3 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!} c_1 \\
c_7 &= -\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{7\times 6} c_5 = -\frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7!} c_1
\end{aligned}$$

と続くので

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha-2n+1)(\alpha-2n-1)\cdots(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2n)}{(2n+1)!} c_1$$

よって、奇数での解は

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha-2n+1)(\alpha-2n-1)\cdots(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= c_1(x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} x^3 + \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!} x^5 - \cdots) \\
&= c_1 q_\alpha(x)
\end{aligned}$$

ratio test は、漸化式に対して $n \to \infty$ として

$$\begin{aligned}
|\frac{c_{2n+2}x^{2n+2}}{c_{2n}x^{2n}}| &= |\frac{(\alpha-2n)(\alpha+2n+1)}{(2n+2)(2n+1)}||x|^2 \ \Rightarrow\ |x|^2 \\
|\frac{c_{2n+3}x^{2n+3}}{c_{2n+1}x^{2n+1}}| &= |\frac{(\alpha-2n-1)(\alpha+2n+2)}{(2n+3)(2n+2)}||x|^2 \ \Rightarrow\ |x|^2
\end{aligned}$$

となるので、$|x|<1$ でどちらの級数も収束します。そして、y_1, y_2 は線形独立な解で (例えば偶数の x^2 は奇数の x^3 の定数倍で与えられない)、c_0, c_1 は任意定数なので、$|x|<1$ でのルジャンドル方程式の一般解は

$$y(x) = c_0 p_\alpha(x) + c_1 q_\alpha(x)$$

と求まります。

ルジャンドル方程式の重要な解は級数でなく多項式の場合です。というわけで、漸化式 (3) に戻ります。(3) を見ればわかるように、α が負でない整数 l のとき漸化式は $n=\alpha=l$ のときに止まります。このため、級数は有限の項までとなり、多項式となります。その多項式をルジャンドル多項式 (Legendre polynomial) と呼んでいます。つまり、ルジャンドル多項式 $P_{(n)}(x)$ は、ルジャンドル方程式が

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0 \qquad (l=0,1,2,\ldots) \tag{4}$$

となっているときの解です。l が偶数であれば y_1 は c_0 から c_l まで続き、y_2 は無限大まで続く級数のままです。l が奇数では y_1 は無限大まで続く級数のまま、y_2 は c_1 から c_l まで続きます。

(4) の解からルジャンドル多項式を求めます。l を偶数として、$\alpha=l$ のときでは x^l の項までなので、級数 p_α を l 次多項式 $p_{(l)}$ とした (4) の解は

$$\begin{aligned}
p_{(l)}(x) &= 1 - \frac{l(l+1)}{2}x^2 + \frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!}x^4 - \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{l/2}(-1)^n \frac{(l-2n+2)(l-2n+4)\cdots(l-2)l(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}
\end{aligned}$$

これは、二重階乗 $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$ を使うと

$$\begin{aligned}
l(l-2)(l-4)\cdots(l-2n+2) &= \frac{l!!}{(l-2n)!!} \\
(l+2n-1)(l+2n-3)\cdots(l+1) &= \frac{(l+2n-1)!!}{(l-1)!!}
\end{aligned}$$

と書けるので

$$\begin{aligned}
p_{(l)}(x) &= \sum_{n=0}^{l/2}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{l!!}{(l-2n)!!}\frac{(l+2n-1)!!}{(l-1)!!}x^{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{l/2}(-1)^{(l-2k)/2}\frac{1}{(l-2k)!}\frac{l!!}{(l-l+2k)!!}\frac{(l+l-2k-1)!!}{(l-1)!!}x^{l-2k} \qquad (2n=l-2k) \\
&= \frac{l!!}{(l-1)!!}(-1)^{l/2}\sum_{k=0}^{l/2}(-1)^{-k}\frac{1}{(2k)!!}\frac{(2l-2k-1)!!}{(l-2k)!}x^{l-2k}
\end{aligned}$$

二重階乗は

$$
\begin{aligned}
(2k)!! &= 2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2 = 2k\times 2(k-1)\times 2(k-2)\cdots 2 = 2^k k! \\
(2(l-k)-1)!! &= \frac{(2(l-k))!}{(2(l-k))!!} = \frac{(2l-2k)!}{2^{l-k}(l-k)!}
\end{aligned}
$$

とできるので

$$
p_{(l)}(x) = \frac{l!!}{(l-1)!!}(-1)^{l/2}\frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{l/2}(-1)^{-k}\frac{1}{k!}\frac{(2l-2k)!}{(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}
$$

ルジャンドル多項式 $P_{(l)}(x)$ は和の外にいる 2^{-l} 以外を消したものとして定義され

$$
P_{(l)}(x) = \frac{(l-1)!!}{l!!}(-1)^{-l/2}p_{(l)}(x) = \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{l/2}(-1)^{-k}\frac{1}{k!}\frac{(2l-2k)!}{(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}
$$

となっています。

l が奇数の場合でも同じ手順です。奇数のときは級数 q_l が l 次多項式 $q_{(l)}$ になるので

$$
\begin{aligned}
q_{(l)}(x) &= x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 + \frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!}x^5 - \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{(l-1)/2}(-1)^n\frac{(l-2n+1)(l-2n-1)\cdots(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{(l-1)/2}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{(l-1)!!}{(l-2n-1)!!}\frac{(l+2n)!!}{l!!}x^{2n+1} \\
&= (-1)^{(l-1)/2}\sum_{k=0}^{(l-1)/2}(-1)^{-k}\frac{1}{(l-2k)!}\frac{(l-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2l-2k-1)!!}{l!!}x^{l-2k} \qquad (2n+1 = l-2k) \\
&= \frac{(l-1)!!}{l!!}(-1)^{(l-1)/2}\sum_{k=0}^{(l-1)/2}(-1)^{-k}\frac{1}{(2k)!!}\frac{(2l-2k-1)!!}{(l-2k)!}x^{l-2k}
\end{aligned}
$$

後は同じ変形なので

$$
P_{(l)} = (-1)^{(l-1)/2}\frac{l!!}{(l-1)!!}q_{(l)}(x)
$$

よって、偶数、奇数の場合をまとめて表記すると

$$
P_{(l)}(x) = \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^{-k}\frac{1}{k!}\frac{(2l-2k)!}{(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} \tag{5}
$$

$[l/2]$ は l が偶数なら $l/2$、奇数なら $(l-1)/2$ とすることを表します。ルジャンドル多項式を和の形で定義するときはこの形が使われます。

同様の結果は、今は x^l までの多項式になっていることから、級数解を $x^l, x^{l-2}, \ldots$ として減少するようにしても求められます。まず、漸化式を

$$
\begin{aligned}
c_{n+2} &= -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)}c_n \\
c_n &= -\frac{(\alpha-n+2)(\alpha+n-1)}{n(n-1)}c_{n-2}
\end{aligned}
$$

と変形します。このときは

$$
\begin{aligned}
c_{n-2} &= -\frac{(\alpha-n+4)(\alpha+n-3)}{(n-2)(n-3)}c_{n-4} \\
c_{n-4} &= -\frac{(\alpha-n+6)(\alpha+n-5)}{(n-4)(n-5)}c_{n-6}
\end{aligned}
$$

となっているので

$$
\begin{aligned}
c_n &= -\frac{(\alpha-n+2)(\alpha+n-1)}{n(n-1)}c_{n-2} \\
&= (-1)^2\frac{(\alpha-n+2)(\alpha+n-1)}{n(n-1)}\frac{(\alpha-n+4)(\alpha+n-3)}{(n-2)(n-3)}c_{n-4} \\
&= (-1)^2\frac{(\alpha-n+2)(\alpha-n+4)(\alpha+n-1)(\alpha+n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}c_{n-4} \\
&= (-1)^3\frac{(\alpha-n+2)(\alpha-n+4)(\alpha+n-1)(\alpha+n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{(\alpha-n+6)(\alpha+n-5)}{(n-4)(n-5)}c_{n-6} \\
&= (-1)^3\frac{(\alpha-n+2)(\alpha-n+4)(\alpha-n+6)(\alpha+n-1)(\alpha+n-3)(\alpha+n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}c_{n-6}
\end{aligned}
$$

と続いていくことから

$$
c_n = (-1)^k\frac{(\alpha-n+2)(\alpha-n+4)\cdots(\alpha-n+2k)(\alpha+n-1)(\alpha+n-3)\cdots(\alpha+n-2k+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k+1)}c_{n-2k}
$$

今は漸化式が $n=\alpha=l$ で止まり、解が

$$
y(x) = c_l x^l + c_{l-2}x^{l-2} + \cdots
$$

となるようにしたいので

$$
\begin{aligned}
c_l &= (-1)^k(2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2)\frac{(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2k+1)}{l(l-1)(l-2)\cdots(l-2k+1)}c_{l-2k} \\
&= (-1)^k(2k)!!\frac{(2l-1)!!}{(2l-2k-1)!!}\frac{(l-2k)!}{l!}
\end{aligned}
$$

これは

$$
\begin{aligned}
l(l-1)(l-2)\cdots(l-2k+1) &= \frac{l!}{(l-2k)!} \\
(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2k+1) &= \frac{(2l-1)!!}{(2l-2k-1)!!}
\end{aligned}
$$

を使っています。k の範囲は、l が偶数なら 0 から $l/2$ まで、奇数なら 0 から $(l-1)/2$ までです。よって、l 次多項式としての解は

$$
y(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} c_{l-2k}x^{l-2k} = \frac{l!}{(2l-1)!!}c_l\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{1}{(2k)!!}\frac{(2l-2k-1)!!}{(l-2k)!}x^{l-2k}
$$

c_l を

$$
c_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}
$$

と選ぶことで

$$
\begin{aligned}
y(x) = P_{(l)}(x) = & \frac{l!}{(2l-1)!!}\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{1}{(2k)!!}\frac{(2l-2k-1)!!}{(l-2k)!}x^{l-2k} \\
&= l!\frac{2^l l!}{(2l)!}\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{1}{(2k)!!}\frac{(2l-2k-1)!!}{(l-2k)!}x^{l-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{1}{(2k)!!}\frac{(2l-2k-1)!!}{(l-2k)!}x^{l-2k}
\end{aligned}
$$

となり、(5) と同じになります。
　というわけで、(4) の一般解はルシャンドル多項式 $P_{(l)}$ と級数の解 Q_l から

$$
y(x) = A_1P_{(l)}(x) + A_2Q_l(x)
$$

A_1, A_2 は定数です。ルジャンドル多項式に制限はないですが、級数 Q_l がいるので $|x| < 1$ での一般解です。$Q_l(x)$ は l が偶数なら q_l、奇数なら p_l から

$$
偶数：Q_l(x) = (-1)^{l/2}\frac{l!!}{(l-1)!!}q_l(x)
$$

$$
奇数：Q_l(x) = (-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)!!}{l!!}p_l(x)
$$

と定義されます。係数をこのように選ぶ理由は $P_{(l)}$ が従う漸化式と同じにするためですが、その話は省きます。

Q_l を $|x|<1$ での解として与えていますが、x^n の級数が $|x|<1$ で収束するなら x^{-n} の級数では $|x|>1$ で収束するのではないかと予想できます。なので、x^{-n} での級数解がないか見ていきます。

解の形を

$$
y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}
$$

これを (4) に入れるので

$$
2x\frac{dy}{dx} = -2x\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{-n-1} = -2\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{-n}
$$

$$
(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n+1)x^{-n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n+1)x^{-n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n+1)x^{-n}
$$

から

$$
\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n+1)x^{-n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n+1)x^{-n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{-n} + l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n} = 0
$$

第 1 項は

$$
\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}(n-2)(n-1)x^{-n}
$$

第 2 項以降は x^0 と x^{-1} の項を分離すると

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n+1)x^{-n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{-n} + l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n} \\
&\quad= -2c_1x^{-1} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n+1)x^{-n} + 2c_1x^{-1} + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_n n x^{-n} \\
&\qquad + l(l+1)c_0 + l(l+1)c_1x^{-1} + l(l+1)\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{-n} \\
&\quad= l(l+1)c_0 + l(l+1)c_1x^{-1} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n+1)x^{-n} + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_n n x^{-n} + l(l+1)\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{-n}
\end{aligned}
$$

よって

$$l(l+1)c_0 + l(l+1)c_1 x^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(c_{n-2}(n-2)(n-1) - c_n n(n+1) + 2c_n n + l(l+1)c_n)x^{-n} = 0$$

これから $c_0 = c_1 = 0$ となり

$$\begin{aligned} c_{n-2}(n-2)(n-1) - (n(n+1) - 2n - l(l+1))c_n = 0 \\ c_n &= \frac{(n-2)(n-1)}{n(n-1) - l(l+1)}c_{n-2} \\ &= \frac{(n-2)(n-1)}{(n+l)(n-l-1)}c_{n-2} \end{aligned}$$

これは

$$c_2 = 0\ ,\ c_3 = 0\ ,\ c_4 = 0, \ldots$$

と続いていきます。しかし、$n = l+1$ のとき

$$(2l+1)(l+1-l-1)c_{l+1} = (l-1)lc_{l-1}$$

となり、左辺の括弧部分が 0 になるので、c_{l+1} は任意です。このため、$c_0 = c_1 = \cdots = c_l = 0$ ですが、$c_{l+1} \neq 0$ から新しく続いていきます。ただし、$c_{l+2} = 0$ なので、$c_{l+2} = c_{l+4} = \cdots = 0$ です。c_{l+1} からは

$$\begin{aligned} c_{l+3} &= \frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+3)}c_{l+1} \\ c_{l+5} &= \frac{(l+3)(l+4)}{4(2l+5)}c_{l+3} = \frac{1}{4\times 2}\frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{(2l+3)(2l+5)}c_{l+1} \\ c_{l+7} &= \frac{(l+5)(l+6)}{6(2l+7)}c_{l+5} = \frac{1}{6\times 4\times 2}\frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)(l+5)(l+6)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)}c_{l+1} \end{aligned}$$

と続くので

$$c_{l+2k+1} = \frac{1}{(2k)!!}\frac{(l+2k)(l+2k-1)\cdots(l+1)}{(2l+2k+1)(2l+2k-1)\cdots(2l+3)}c_{l+1}$$

階乗にすると

$$(2k)!! = 2^k k!$$

$$(l+2k)(l+2k-1)\cdots(l+1) = \frac{(l+2k)!}{l!}$$

$$(2l+2k+1)(2l+2k-1)\cdots(2l+3) = \frac{(2l+2k+1)!!}{(2l+1)!!}$$

なので

$$c_{l+2k+1} = \frac{1}{2^k k!}\frac{(2l+1)!!}{(2l+2k+1)!!}\frac{(l+2k)!}{l!}c_{l+1}$$

これの二重階乗を

$$(2l+1)!! = \frac{(2l+1)!}{(2l)!!}$$

$$(2l+2k+1)!! = (2(l+k)+1)!! = \frac{(2l+2k+1)!}{(2(l+k))!!}$$

とすれば

$$\begin{aligned} c_{l+2k+1} &= \frac{1}{2^k k!}\frac{(2(l+k))!!}{(2l+2k+1)!}\frac{(2l+1)!}{(2l)!!}\frac{(l+2k)!}{l!}c_{l+1} \\ &= \frac{1}{2^k k!}\frac{2^{l+k}(l+k)!}{(2l+2k+1)!}\frac{(2l+1)!}{2^l l!}\frac{(l+2k)!}{l!}c_{l+1} \\ &= \frac{(2l+1)!}{(l!)^2}\frac{1}{k!}\frac{(l+k)!(l+2k)!}{(2l+2k+1)!}c_{l+1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n} &= c_{l+1}x^{-(l+1)} + c_{l+3}x^{-(l+3)} + \cdots + c_{l+2k+1}x^{-(l+2k+1)} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{l+2k+1}x^{-(l+2k+1)} \\ &= c_{l+1}\frac{(2l+1)!}{(l!)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{(l+k)!(l+2k)!}{(2l+2k+1)!}x^{-(l+2k+1)} \end{aligned} \tag{6}$$

級数の収束性を見るために

$$a_k = \frac{1}{k!}\frac{(l+k)!(l+2k)!}{(2l+2k+1)!}\ ,\ a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\frac{(l+k+1)!(l+2k+2)!}{(2l+2k+2+1)!}$$

として

$$
\begin{aligned}
|\frac{a_{k+1}x^{-(l+2k+3)}}{a_k x^{-(l+2k+1)}}| &= \frac{1}{(k+1)!}\frac{(l+k+1)!(l+2k+2)!}{(2l+2k+3)!}k!\frac{(2l+2k+1)!}{(l+k)!(l+2k)!}x^{-2} \\
&= \frac{1}{k+1}\frac{(l+k+1)(l+2k+2)(l+2k+1)}{(2l+2k+3)(2l+2k+2)}x^{-2} \\
&= \frac{1}{k+1}\frac{(l+2k+2)(l+2k+1)}{2(2l+2k+3)}x^{-2} \\
&\Rightarrow x^{-2}
\end{aligned}
$$

最後に $k\to\infty$ にしています。よって、$|x|>1$ で収束します。というわけで、(6) は $|x|>1$ での解となり、c_{l+1} を

$$
c_{l+1} = \frac{2^l(l!)^2}{(2l+1)!}
$$

と選んで

$$
Q_l(x) = 2^l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{(l+k)!(l+2k)!}{(2l+2k+1)!}x^{-(l+2k+1)}
$$

としたものを第二種ルジャンドル関数 (Legendre function of the second kind) と呼びます。この呼び方に対応して、ルジャンドル多項式は第一種ルジャンドル関数 (Legendre function of the first kind) とも呼ばれます。

多項式と級数であるためにルジャンドル多項式と第二種ルジャンドル関数は線形独立で、ルジャンドル多項式は $|x|>1$ でも問題を起こしません。このため、$|x|>1$ の (4) の一般解は、A_1,A_2 を定数として

$$
y(x) = A_1P_{(l)}(x) + A_2Q_l(x)
$$

また、Q_l は、$P_{(l)}$ が求まっているとした階数低減法によって

$$
\begin{aligned}
Q_l(x) &= P_{(l)}(x)(B_1\int dx\frac{1}{P_{(l)}^2(x)}\exp[\int dx\frac{2x}{1-x^2}] + B_2) \\
&= P_{(l)}(x)(B_1\int dx\frac{1}{P_{(l)}^2(x)}\exp[-\log|1-x^2|] + B_2) \\
&= P_{(l)}(x)(B_1\int dx\frac{1}{P_{(l)}^2(x)}\frac{1}{x^2-1} + B_2) \quad (|x|>1)
\end{aligned}
$$

と与えられます。B_1,B_2 は定数です。$|x|<1$ では

$$
Q_l(x) = P_{(l)}(x)(B_1\int dx\frac{1}{P_{(l)}^2(x)}\frac{1}{1-x^2} + B_2) \quad (|x|<1)
$$

例えば、$l=0$ のときは $P_{(0)}=1$ なので、$|x|<1$ のとき積分は

$$\int dx \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int dx(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}) = \frac{1}{2}\log|\frac{1+x}{1-x}|$$

となるので、最初に求めた $\alpha=0$ の場合と一致します。

ルジャンドル方程式と関係する微分方程式としてルジャンドル陪方程式 (associated Legendre equation, generalized Legendre equation) と呼ばれるものがあります。ルジャンドル陪方程式は

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + (l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2})u = 0$$

という形です。ルジャンドル方程式と同じように $x=\pm1,\infty$ は確定特異点です。$l=0,1,2,\ldots$ で、m は $-l\leq m\leq l$ となる整数の場合を扱います。

ルジャンドル陪方程式はルジャンドル方程式を m 回微分すると出てくることを示します。n 回の微分を $f^{(n)}$ と表記します。ルジャンドル方程式 (4) の第 1 項を m 回微分すると

$$\frac{d^m}{dx^m}((1-x^2)y^{(2)}) = \frac{d^m}{dx^m}y^{(2)} - \frac{d^m}{dx^m}(x^2y^{(2)}) = y^{(m+2)} - \frac{d^m}{dx^m}(x^2y^{(2)})$$

第 2 項はライプニッツ則

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^kf}{dx^k}\frac{d^{n-k}g}{dx^{n-k}}$$

を使うことで

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^2y^{(2)}) = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(\frac{d^k}{dx^k}x^2)(\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}y^{(2)}) = x^2y^{(m+2)} + 2mxy^{(m+1)} + m(m-1)y^{(m)}$$

ルジャンドル方程式の第 2 項も同様に

$$2\frac{d^m}{dx^m}(xy^{(1)}) = 2\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(\frac{d^k}{dx^k}x)(\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}y^{(1)}) = 2xy^{(m+1)} + 2my^{(m)}$$

となるので、m 回微分したルジャンドル方程式は

$$\begin{aligned}&y^{(m+2)} - x^2y^{(m+2)} - 2mxy^{(m+1)} - m(m-1)y^{(m)} - 2xy^{(m+1)} - 2my^{(m)} + l(l+1)y^{(m)}\\&= (1-x^2)y^{(m+2)} - 2x(m+1)y^{(m+1)} + (l^2+l-m^2-m)y^{(m)}\end{aligned}$$

$v = y^{(m)}$ とすれば

$$(1-x^2)v^{(2)} - 2x(m+1)v^{(1)} + \lambda v = 0 \quad (\lambda = l(l+1) - m^2 - m)$$

さらに、$u = (1-x^2)^{m/2}v$ とすれば

$$v^{(1)} = mx(1-x^2)^{-m/2-1}u + (1-x^2)^{-m/2}u^{(1)} = (1-x^2)^{-m/2}(\frac{mx}{1-x^2}u + u^{(1)})$$

$v^{(2)}$ は

$$\begin{aligned}
v^{(2)} &= mx(1-x^2)^{-m/2-1}(\frac{mx}{1-x^2}u + u^{(1)}) + (1-x^2)^{-m/2}(\frac{m}{1-x^2}u + \frac{2mx^2}{(1-x^2)^2}u + \frac{mx}{1-x^2}u^{(1)} + u^{(2)}) \\
&= (1-x^2)^{-m/2}(\frac{m^2x^2}{(1-x^2)^2}u + \frac{mx}{1-x^2}u^{(1)} + \frac{m}{1-x^2}u + \frac{2mx^2}{(1-x^2)^2}u + \frac{mx}{1-x^2}u^{(1)} + u^{(2)}) \\
&= (1-x^2)^{-m/2}(\frac{m(m+2)x^2}{(1-x^2)^2}u + \frac{m}{1-x^2}u + \frac{2mx}{1-x^2}u^{(1)} + u^{(2)})
\end{aligned}$$

これらから

$$\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)v^{(2)} - 2x(m+1)v^{(1)} + \lambda v \\
&= (1-x^2)(1-x^2)^{-m/2}(\frac{m(m+2)x^2}{(1-x^2)^2}u + \frac{m}{1-x^2}u + \frac{2mx}{1-x^2}u^{(1)} + u^{(2)}) \\
&\quad - 2x(m+1)(1-x^2)^{-m/2}(\frac{mx}{1-x^2}u + u^{(1)}) \\
&\quad + \lambda(1-x^2)^{-m/2}u \\
&= \frac{m(m+2)x^2}{1-x^2}u + mu + 2mxu^{(1)} + (1-x^2)u^{(2)} - 2x(m+1)(\frac{mx}{1-x^2}u + u^{(1)}) + \lambda u \\
&= (1-x^2)u^{(2)} + (2mx - 2(m+1)x)u^{(1)} + (\frac{m(m+2)x^2}{1-x^2} + m - 2x(m+1)\frac{mx}{1-x^2} + \lambda)u \\
&= (1-x^2)u^{(2)} - 2xu^{(1)} + (\frac{m(m+2)x^2 - 2x^2m(m+1)}{1-x^2} + m + \lambda)u \\
&= (1-x^2)u^{(2)} - 2xu^{(1)} + (-m^2\frac{x^2}{1-x^2} + m + l(l+1) - m^2 - m)u \\
&= (1-x^2)u^{(2)} - 2xu^{(1)} + (m^2\frac{1-x^2}{1-x^2} - \frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) - m^2)u \\
&= (1-x^2)u^{(2)} - 2xu^{(1)} + (l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2})u
\end{aligned}$$

というわけで、ルジャンドル陪方程式になりました。

今の結果から、ルジャンドル陪方程式の解 u とルジャンドル方程式の解 y とは

$$u(x) = (1-x^2)^{m/2}v(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}y(x)$$

と関係しています。なので、ルジャンドル多項式に対応するルジャンドル陪方程式の解として

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_{(l)}(x)$$

これをルジャンドル陪関数 (associated Legendre function) と言います (P_l^m の m は m 乗ではなく、区別の添え字)。$P_{(l)}$ は l 次多項式なので $m \leq l$ です。また、ルジャンドル陪方程式には m^2 としているので、m は $-l \leq m \leq l$ の整数で、P_l^m, P_l^{-m} は同じ解です (定数倍だけ異なる)。また、ルジャンドル陪関数は

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_{(l)}(x)$$

と定義されることも多いです。$P_{(l)}$ を第二種ルジャンドル関数 Q_n にしても同様にルジャンドル陪方程式の解です。