ラゲール陪多項式

直交多項式であるラゲール陪多項式をロドリゲスの公式から導出します。ラゲール陪方程式からも求めています。ガンマ関数が出てきますが、表記として使っている程度です。

微分からラゲール多項式を作ります。$f(x)g(x)$ を微分すると

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

例えば、f を x^3 とすると

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^3 g) = 3x^2 g + x^3\frac{dg}{dx} \\
&\frac{d^2}{dx^2}(x^3 g) = 6xg + 6x^2\frac{dg}{dx} + x^3\frac{d^2 g}{dx^2} \\
&\frac{d^3}{dx^3}(x^3 g) = 6g + 18x\frac{dg}{dx} + 9x^2\frac{d^2 g}{dx^2} + x^3\frac{d^3 g}{dx^3}
\end{aligned}$$

3 回微分することで x^0 から x^3 までを含んだ形になり、後は g の部分がなくなれば 3 次多項式にできます。というわけで、微分しても x が新しく出てこないように g を指数関数にすれば

$$e^x\frac{d^3}{dx^3}(x^3 e^{-x}) = e^x(6e^{-x} - 18xe^{-x} + 9x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$$

とでき、3 次多項式になります。なので、x^n として n 回微分にすれば n 次多項式が作れます。そして、x^n を n 回微分したときに出てくる $n!$ で割って

$$L_n = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

としたのがラゲール多項式 (Laguerre polynomial) で、これはラゲール多項式のロドリゲスの公式です。そして、同じように考えると、実数 α によって $x^{n+\alpha}$ としても x^α が最後に残るだけなので

$$L_n^\alpha = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}) \tag{1}$$

としても n 次多項式になり (L_n^α の α は α 乗でなく区別の添え字)、$\alpha > -1$ のときラゲール陪多項式 (associated Laguerre polynomial, generalized Laguerre polynomial) と呼ばれます。(1) はラゲール陪多項式でのロドリゲスの公式です。いくつか求めると

$$\begin{aligned}
&L_0^\alpha = x^{-\alpha}e^x x^\alpha e^{-x} = 1 \\
&L_1^\alpha = x^{-\alpha}e^x\frac{d}{dx}(x^{1+\alpha}e^{-x}) = x^{-\alpha}e^x((1+\alpha)x^\alpha e^{-x} - x^{1+\alpha}e^{-x}) = 1 + \alpha - x \\
&L_2^\alpha = \frac{x^{-\alpha}e^x}{2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^{2+\alpha}e^{-x}) = \frac{1}{2!}((2+\alpha)(1+\alpha) - 2(2+\alpha)x + x^2)
\end{aligned}$$

ラゲール陪多項式で $\alpha=0$ としたのがラゲール多項式です。ただし、ラゲール陪多項式をラゲール多項式と呼んでいることもあります。
　ラゲール陪多項式を和の形で与えます。まず、ライプニッツ則

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x))=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^kf}{dx^k}\frac{d^{n-k}g}{dx^{n-k}}$$

から

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}) =& \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^{n-k}x^{n+\alpha}}{dx^{n-k}}\frac{d^ke^{-x}}{dx^k}\\ =& \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(\alpha+k+1)x^{\alpha+k}e^{-x}\end{aligned}$$

ガンマ関数 Γ は実数 z に対して

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

となっていることから

$$(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(\alpha+k+1)=\frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots\times 1}{(\alpha+k)(\alpha+k-1)\cdots\times 1}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}$$

と書けるので

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})=x^\alpha e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^k$$

よって

$$L_n^\alpha(x)=\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}x^\alpha e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^k$$

これによってラゲール陪多項式の和の形が定義されています。$\alpha=0$ ではガンマ関数から実数がなくなるために階乗で書けて

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)}x^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(k!)^2(n-k)!}x^k$$

これがラゲール多項式の和の形を与えます。これからラゲール多項式をいくつか求めると

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = x^0 + (-1)x = -x + 1$$

$$L_2 = \frac{2!}{2!}x^0 + (-1)\frac{2!}{(2-1)!}x + \frac{2!}{(2!)^2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2)$$

$$L_3 = \frac{3!}{3!}x^0 - \frac{3!}{(3-1)!}x + \frac{3!}{(2!)^2(3-2)!}x^2 - \frac{3!}{(3!)^2}x^3 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$$

ラゲール陪多項式の直交関係を与えます。部分積分でうまいこと $n \neq m$ のとき 0 にしたいので、ロドリゲスの公式での余計な $x^{-\alpha}e^x$ を消すようにウェイト関数を与えて

$$\int dx L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x}$$

とします。そうすると

$$\begin{aligned}\int dx L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} &= \frac{1}{m!}\int dx L_n^\alpha(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}(x^{m+\alpha}e^{-x}) \\ &= \frac{1}{m!}[L_n^\alpha(x) x^{m+\alpha}e^{-x}] - \frac{1}{m!}\int dx \frac{dL_n^\alpha}{dx}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^{m+\alpha}e^{-x})\end{aligned}$$

第 1 項は消えるようにしたいので、積分範囲を 0 から ∞ に取ることにして、部分積分をくり返せば

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} &= \frac{(-1)}{m!}\int dx \frac{dL_n^\alpha}{dx}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^{m+\alpha}e^{-x}) \\ &= \frac{(-1)^m}{m!}\int dx \frac{d^m L_n^\alpha}{dx^m}(x^{m+\alpha}e^{-x})\end{aligned}$$

L_n^α は x^n までの多項式なので $m > n$ なら微分は 0 になります。この手順では L_n^α, L_m^α のどちらを微分するかは任意なので、$n \neq m$ のとき 0 になります。$n = m$ のときは x^n の項の係数が

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^k \ \Rightarrow\ (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}x^n = \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

なので、L_n^α を n 回微分したとき

$$\frac{d^n L_n^\alpha}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{n!}n! = (-1)^n$$

となることから

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty dx \frac{d^n L_n^\alpha}{dx^n} x^{n+\alpha}e^{-x} \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty dx\ x^{n+\alpha}e^{-x} \\ &= \frac{1}{n!}\Gamma(n+\alpha+1)\end{aligned}$$

まとめると、ラゲール陪多項式の直交関係は

$$\int_0^\infty dx L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} = \frac{(n+\alpha)!}{n!}\delta_{nm}$$

と与えられ、これによってラゲール陪多項式は直交多項式となっています。また、ラゲール多項式の直交関係は

$$\int_0^\infty dx\ L_n(x) L_m(x) e^{-x} = \delta_{nm}$$

となります。

ラゲール陪多項式は積分形もありますが、ベッセル関数が必要になって面倒なので省きます。結果だけ示せば、$J_\nu(x)$ を第一種ベッセル関数として

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha/2}e^x}{n!}\int_0^\infty dt\ t^{n+\alpha/2}e^{-r}J_\alpha(2\sqrt{xt})$$

と与えられます。

母関数を求めます。母関数 G を

$$G_\alpha(x,r) = \sum_{n=0}^\infty g_n L_n^\alpha(x) r^n$$

とします。まず、ラゲール多項式での母関数から求めます。ラゲール多項式の和の形を見ると

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$$

となっているので、母関数には指数関数が含まれていると仮定し

$$G(x,r) = h(r)e^{-f(r)x}$$

展開すれば

$$G(x,r) = h(r)e^{-f(r)x} = h(r)\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}f^k(r)x^k$$

$h(r)f^k(r)$ は r のべき級数で展開できるとして

$$h(r)f^k(r) = \sum_{m=0}^\infty a_m r^{m+k}$$

と置いてみます。そうすると、級数の積から

$$G(x,r)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}a_m x^k r^{m+k}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}a_{n-k}x^k r^n=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)r^n \quad (n=m+k) \tag{2}$$

なので

$$a_{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ \Rightarrow\ a_m=\frac{1}{m!}\frac{(k+m)!}{k!}$$

この展開係数は、$1/(1-r)^k$ の $|r|<1$ での展開

$$\frac{1}{(1-r)^k}=1+kr+\frac{1}{2!}k(k+1)r^2+\frac{1}{3!}k(k+1)(k+2)r^3+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{(k+m-1)!}{(k-1)!}r^m$$

から

$$\frac{1}{(1-r)^{k+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{(k+m)!}{k!}r^m \tag{3}$$

と同じになっているのが分かります。よって

$$h(r)f^k(r)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m r^{m+k}=\frac{r^k}{(1-r)^{k+1}}=\frac{1}{(1-r)}(\frac{r}{(1-r)})^k$$

となるので、ラゲール多項式の母関数は

$$G(x,r)=\frac{1}{1-r}\exp[-\frac{xr}{1-r}]$$

となります。

　これをラゲール陪多項式の母関数に変更します。まず、ラゲール陪多項式の α を負でない整数とします。(2) と同じようにすると

$$G_\alpha(x,r)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}a_m x^k r^{m+k}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}a_{n-k}x^k r^n=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^\alpha(x)r^n$$

ラゲール多項式とラゲール陪多項式の和の形は

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{n!}{k!}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\ ,\ L_n^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{(n+\alpha)!}{(k+\alpha)!}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$$

これらの比較と (3) から、$1/(1-r)^{k+1}$ を

$$\frac{1}{(1-r)^{k+\alpha+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{(k+m+\alpha)!}{(k+\alpha)!}r^m \ \Rightarrow\ \frac{1}{m!}\frac{(k+m+\alpha)!}{(k+\alpha)!}=\frac{1}{(n-k)!}\frac{(n+\alpha)!}{(k+\alpha)!}\quad (n=m+k)$$

と変更すればラゲール陪多項式の形にできるのが分かるので、α が負でない整数のときラゲール陪多項式の母関数は

$$G_\alpha(x,r)=\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}\exp[-\frac{xr}{1-r}]\quad (|r|<1) \tag{4}$$

となります。

次に、$\alpha>-1$ の実数でもこれがラゲール陪多項式の母関数になっていることを示します。z_0 で正則（解析的）でない関数 $f(z)$ は z_0 周りのローラン展開として

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-z_0)^n\ ,\ b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

と書けることを利用します。C は z_0 を囲む反時計回りの閉曲線です。これを使って (4) を

$$\frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x)r^n\ ,\ b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C dr\frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha+1}}\frac{1}{r^{n+1}}\quad (|r|<1) \tag{5}$$

と展開します。母関数は $r,r^2,r^3,\ldots$ のべき級数なので、r^{-n} となる主要部は省いています。C は $r=0$ を囲む $|r|<1$ の円とします。b_n は

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{1}{2\pi i}\int_C dr\frac{1}{(1-r)^2}\frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha-1}}\frac{1}{r^{n+1}}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}du\frac{1}{x}\frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}}e^{-u+x}\frac{u^{n+1}}{(u-x)^{n+1}}\qquad (u=\frac{x}{1-r}\ ,\ r=-\frac{x-u}{u}\ ,\ du=\frac{xdr}{(1-r)^2}\ ,\ -u+x=-\frac{xr}{1-r})\\
&=\frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\int_{C'}du\frac{u^{n+\alpha}e^{-u}}{(u-x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

u は $r=1$ を除いて連続で、$r=0$ のとき $u=x$ なので、C' は $u=x$ を囲む閉曲線です。積分はグルサの定理 (もしくは $n+1$ 位での留数定理)

$$\frac{d^nF}{dz^n}\Big|_{z=a}=\frac{n!}{2\pi i}\int_C dz\frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

から

$$b_n(x)=\frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\int_{C'}du\frac{u^{n+\alpha}e^{-u}}{(u-x)^{n+1}}=\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{du^n}(u^{n+\alpha}e^{-u})|_{u=x}=\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})=L_n^\alpha(x)$$

よって、b_n による展開 (5) は

$$\frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) r^n$$

となるので、(4) は $\alpha > -1$ でも母関数です。

ラゲール陪多項式の漸化式と微分方程式を求めます。母関数を r で微分してみると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial r} &= (\frac{\partial}{\partial r}\frac{-xr}{1-r})\frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha+1}} + e^{-xr/(1-r)}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} \\
&= e^{-xr/(1-r)}((\frac{-x}{1-r} + \frac{-xr}{(1-r)^2})\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{(1-r)^{\alpha+2}}) \\
&= \frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha+1}}(\frac{-x}{1-r} + \frac{-xr}{(1-r)^2} + \frac{\alpha+1}{1-r}) \\
&= \frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha+1}}\frac{(\alpha+1)(1-r)-x}{(1-r)^2} \\
&= \frac{(\alpha+1)(1-r)-x}{(1-r)^2}G
\end{aligned}$$

なので

$$(1-r)^2\frac{\partial G}{\partial r} - ((\alpha+1)(1-r)-x)G = 0$$

これは

$$\begin{aligned}
0 &= (1-r)^2\sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha r^{n-1} - ((\alpha+1)(1-r)-x)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha r^n \\
&= (1-2r+r^2)\sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha r^{n-1} - (\alpha+1-x-(\alpha+1)r)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha r^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha r^{n-1} - 2r\sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha r^{n-1} + r^2\sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha r^{n-1} - (\alpha+1-x)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha r^n + (\alpha+1)r\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha r^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha r^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha r^n - (\alpha+1-x)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha r^n + \sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha r^{n+1} + (\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha r^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^\alpha r^n + \sum_{n=0}^{\infty}(x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha r^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1+\alpha+1)L_{n-1}^\alpha r^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^\alpha r^n + \sum_{n=0}^{\infty}(x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha r^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha r^n
\end{aligned}$$

第 1 項と第 2 項から $n = 0$ のときを分離させれば

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^{\alpha}r^n+\sum_{n=0}^{\infty}(x-\alpha-2n-1)L_n^{\alpha}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}r^n$$
$$=L_1^{\alpha}+(x-\alpha-1)L_0^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)L_{n+1}^{\alpha}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}(x-\alpha-2n-1)L_n^{\alpha}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}r^n$$

となるので、$r\neq 0$ として、漸化式が

$$(x-\alpha-1)L_0^{\alpha}+L_1^{\alpha}=0$$
$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}+(x-\alpha-2n-1)L_n^{\alpha}+(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}=0\quad (n=1,2,\ldots)\tag{6}$$

と求まります。

今度は x で偏微分すると

$$\frac{\partial G}{\partial x}=(\frac{\partial}{\partial x}\frac{-xr}{1-r})\frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha+1}}=-r\frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{\alpha+2}}=\frac{r}{1-r}G$$

なので

$$(1-r)\frac{\partial G}{\partial x}+rG=0$$

これは

$$\begin{aligned}(1-r)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}r^n+r\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}r^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}r^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}r^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}r^{n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}L_{n-1}^{\alpha}r^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}L_{n-1}^{\alpha}r^n\quad (L_0^{\alpha}=1)\end{aligned}$$

なので

$$\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}-\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}+L_{n-1}^{\alpha}=0\quad (n=1,2,\ldots)\tag{7}$$

これの L_{n-1}^{α} の微分の項を消します。まず、L_{n-1}^{α} を消すために、(7) に $n+\alpha$ をかけて (6) を引けば

$$(n+\alpha)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}-(n+\alpha)\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}-(n+1)L_{n+1}^{\alpha}-(x-\alpha-2n-1)L_n^{\alpha}=0\tag{8}$$

(6) を x で微分すると

$$(n+1)\frac{dL_{n+1}^{\alpha}}{dx}+L_n^{\alpha}+(x-\alpha-2n-1)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+(n+\alpha)\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}=0$$

$$(n+\alpha)\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}-=(n+1)\frac{dL_{n+1}^{\alpha}}{dx}+L_n^{\alpha}+(x-\alpha-2n-1)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}$$

これを (8) に入れて

$$\begin{aligned}&(n+\alpha)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+(n+1)\frac{dL_{n+1}^{\alpha}}{dx}+(x-\alpha-2n-1)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+L_n^{\alpha}-(n+1)L_{n+1}^{\alpha}-(x-\alpha-2n-1)L_n^{\alpha}\\&=(n+1)\frac{dL_{n+1}^{\alpha}}{dx}+(x-n-1)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}-(n+1)L_{n+1}^{\alpha}-(x-\alpha-2n-2)L_n^{\alpha}\end{aligned}$$

n を $n-1$ と置き換えて、(7) を入れると

$$\begin{aligned}n\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+(x-n)\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}-nL_n^{\alpha}-(x-\alpha-2n)L_{n-1}^{\alpha}&=n\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+(x-n)(\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+L_{n-1}^{\alpha})-nL_n^{\alpha}-(x-\alpha-2n)L_{n-1}^{\alpha}\\&=x\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}-nL_n^{\alpha}+(\alpha+n)L_{n-1}^{\alpha}\end{aligned}$$

なので、L_n^{α} の微分を含めた漸化式が

$$x\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}=nL_n^{\alpha}-(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}\quad (n=1,2,\ldots) \tag{9}$$

と求まります。

今度は微分方程式を求めます。(9) を (7) に入れると

$$(n+\alpha)\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}=(n+\alpha)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}=(n+\alpha)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}-x\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+nL_n^{\alpha}$$

(9) を x で微分して、これを入れれば

$$\begin{aligned}\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+x\frac{d^2L_n^{\alpha}}{dx^2}&=n\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}-(n+\alpha)\frac{dL_{n-1}^{\alpha}}{dx}\\&=n\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}-(n+\alpha)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+x\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}-nL_n^{\alpha}\end{aligned}$$

$$x\frac{d^2L_n^{\alpha}}{dx^2}+(\alpha+1-x)\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}+nL_n^{\alpha}=0\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

よって、ラゲール陪多項式は 2 階微分方程式

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+(\alpha+1-x)\frac{du}{dx}+nu=0 \tag{10}$$

に対する解となっています。この形の微分方程式をラゲール陪方程式 (associated Laguerre equation) と言い、$\alpha=0$ での

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+ny=0 \tag{11}$$

ではラゲール方程式と呼ばれ、ラゲール多項式が解です。

(10) と (11) から、α が負でない整数のときのラゲール多項式とラゲール陪多項式の関係が分かります。m 回の x 微分を $f^{(m)}$ と書きます。ラゲール多項式によるラゲール方程式は

$$xL_n^{(2)}+(1-x)L_n^{(1)}+nL_n=0$$

これを

$$xL_{n+m}^{(2)}+(1-x)L_{n+m}^{(1)}+(n+m)L_{n+m}=0$$

として、m 回微分すると、ライプニッツ則から

$$\frac{d^m}{dx^m}(xy^{(2)})=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{d^kx}{dx^k}\frac{d^{m-k}y^{(2)}}{dx^{m-k}}=\frac{m!}{m!}x\frac{d^my^{(2)}}{dx^m}+\frac{m!}{(m-1)!}\frac{dx}{dx}\frac{d^{m-1}y^{(2)}}{dx^{m-1}}=xy^{(m+2)}+my^{(m+1)}$$

$$\frac{d^m}{dx^m}(xy^{(1)})=xy^{(m+1)}+my^{(m)}$$

となるので、L_{n+m} を y として

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}(xy^{(2)}+(1-x)y^{(1)}+(n+m)y)&=xy^{(m+2)}+my^{(m+1)}+y^{(m+1)}-xy^{(m+1)}-my^{(m)}+(n+m)y^{(m)}\\&=xy^{(m+2)}+(m+1-x)y^{(m+1)}+ny^{(m)}\\&=x\frac{d^2}{dx^2}y^{(m)}+(m+1-x)\frac{d}{dx}y^{(m)}+ny^{(m)}\end{aligned}$$

これはラゲール陪方程式なので、その解は L_n^m です。よって、ラゲール陪多項式とラゲール多項式は

$$L_n^m=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}L_{n+m}$$

となっています。$(-1)^m$ は定義に合わせるために加えています。

まとめると

- ロドリゲスの公式

$$L_n^\alpha(x)=\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})$$

- 和の形

$$L_n^\alpha(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^k$$

- 積分形 (J_α は第一種ベッセル関数)

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha/2}e^x}{n!}\int_0^\infty dt\ t^{n+\alpha/2}e^{-r}J_\alpha(2\sqrt{xt})$$

- 直交関係

$$\int_0^\infty dx L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{nm}$$

- 母関数

$$G_\alpha(x,r) = \frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}\exp[-\frac{xr}{1-r}]$$

- 漸化式 ($n = 1, 2, \ldots$)

$$\begin{aligned}
&(n+1)L_{n+1}^\alpha = (\alpha+2n+1-x)L_n^\alpha - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha \\
&x\frac{dL_n^\alpha}{dx} = nL_n^\alpha - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha
\end{aligned}$$

- 微分方程式 (ラゲール陪方程式)

$$\frac{d^2L_n^\alpha}{dx^2} + (\alpha+1-x)\frac{dL_n^\alpha}{dx} + nL_n^\alpha = 0$$

- ラゲール陪多項式とラゲール多項式の関係 (m は負でない整数)

$$L_n^m = (-1)^m\frac{d^m}{dx^m}L_{n+m}$$

$\alpha = 0$ にすればラゲール多項式の関係になります。

ラゲール陪方程式の級数解としてラゲール陪多項式が出てくることを見ます。ラゲール陪多項式は $x = 0$ が確定特異点なので、フロベニウス級数を使って

$$y(x) = x^s\sum_{k=0}^\infty c_k x^k$$

として、これから

$$\begin{aligned}
&(\alpha+1-x)\frac{dy}{dx} = (\alpha+1-x)\sum_{k=0}^\infty(s+k)c_k x^{s+k-1} = (\alpha+1)\sum_{k=0}^\infty(s+k)c_k x^{s+k-1} - \sum_{k=0}^\infty(s+k)c_k x^{s+k} \\
&x\frac{d^2y}{dx^2} = x\sum_{k=0}^\infty(s+k)(s+k-1)c_k x^{s+k-2} = \sum_{k=0}^\infty(s+k)(s+k-1)c_k x^{s+k-1}
\end{aligned}$$

となるので、ラゲール陪方程式は

$$\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)(s+k-1)c_kx^{s+k-1}+(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)c_kx^{s+k-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)c_kx^{s+k}+n\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{s+k}=0$$

x^{s-1} の項を分離すると、第 1 項と第 2 項から

$$\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)(s+k-1)c_kx^{s+k-1}=s(s-1)c_0x^{s-1}+\sum_{k=1}^{\infty}(s+k)(s+k-1)c_kx^{s+k-1}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)c_kx^{s+k-1}=(\alpha+1)sc_0x^{s-1}+(\alpha+1)\sum_{k=1}^{\infty}(s+k)c_kx^{s+k-1}$$

となるので

$$\begin{aligned}0&=(s(s-1)+(\alpha+1)s)c_0x^{s-1}\\&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}(s+k)(s+k-1)c_kx^{s+k-1}+(\alpha+1)\sum_{k=1}^{\infty}(s+k)c_kx^{s+k-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)c_kx^{s+k}+n\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{s+k}\end{aligned}$$

これから、c_0 の項による決定方程式は

$$s(s-1)+(\alpha+1)s=0$$

なので、$s=0,-\alpha$ です。ラゲール陪多項式は $\alpha=0$ でラゲール多項式になるので、$s=0$ の解を求めます。そうすると、漸化式は

$$\begin{aligned}0&=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-1}+(\alpha+1)\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}-\sum_{k=0}^{\infty}kc_kx^k+n\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kc_{k+1}x^k+(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}kc_kx^k+n\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(((k+1)k+(\alpha+1)(k+1))c_{k+1}-(k-n)c_k)x^k\end{aligned}$$

から

$$c_{k+1}=\frac{k-n}{(k+1)(k+\alpha+1)}c_k$$

と求まります。このため、$k=n$ で級数は止まり、多項式になるのが分かります。漸化式から

$$\begin{aligned}c_1&=(-1)\frac{n}{\alpha+1}c_0\\c_2&=\frac{1-n}{2(\alpha+2)}c_1=(-1)^2\frac{n(n-1)}{2(\alpha+2)(\alpha+1)}c_0\\c_3&=\frac{2-n}{3(\alpha+3)}c_2=(-1)^3\frac{1}{3\times2}\frac{n(n-1)(n-2)}{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}c_0\end{aligned}$$

と続くので

$$c_k = (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(\alpha+k)(\alpha+k-1)\cdots(\alpha+1)} c_0$$

階乗とガンマ関数を使うと

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$(\alpha+k)(\alpha+k-1)\cdots(\alpha+1) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

と書けるので

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} c_0$$

よって

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} c_n x^n = c_0 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} x^k$$

c_0 を

$$c_0 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$$

とすることで、ラゲール陪多項式が

$$u(x) = L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} x^k$$

と出てきます。

最後に、一般化したロドリゲスの公式から導出します。n 次多項式は

$$C_{(n)}(x) = \frac{1}{K_n} \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n}(w(x)s^n(x)) \tag{12}$$

積分範囲は $s(a)w(a) = s(b)w(b) = 0$ となる a, b で与えられます。s を、$c_1, c_2 > 0$ を定数として

$$s = c_2(x - c_1)$$

とします。$C_{(1)}$ は 1 次多項式なので

$$C_{(1)} = -\frac{1}{K_1} x$$

として、(12) は

$$
\begin{aligned}
-x &= \frac{1}{w}\frac{d}{dx}(wc_2(x-c_1)) \\
&= \frac{c_2(x-c_1)}{w}\frac{dw}{dx}+c_2 \\
\frac{1}{w}\frac{dw}{dx} &= -\frac{c_2+x}{c_2(x-c_1)} \\
\log|w| &= -\frac{1}{c_2}\int dx(\frac{c_2}{x-c_1}+\frac{x}{x-c_1}) \\
&= -\frac{1}{c_2}(c_2\log|x-c_1|+x+c_1\log|x-c_1|)+A \\
&= -\frac{1}{c_2}((c_1+c_2)\log|x-c_1|+x)+A \\
|w| &= \exp[-\frac{c_1+c_2}{c_2}\log|x-c_1|-\frac{1}{c_2}x+A] \\
&= e^A|x-c_1|^{-(c_1+c_2)/c_2}e^{-x/c_2} \\
w &= A'|x-c_1|^{-(c_1+c_2)/c_2}e^{-x/c_2} \qquad (A'=\pm e^A)
\end{aligned}
$$

C は任意定数です。これによる sw は、係数の定数を省いて

$$
sw = |x-c_1|^{1-(c_2+c_2)/c_2}e^{-x/c_2}
$$

となるので、$\alpha=-(c_1+c_2)/c_2>-1$ なら $x=c_1$ で 0 になり、e^{-x/c_2} から $x=\infty$ で 0 になります。このため、直交関係の積分範囲は c_1 から ∞ です。

式を簡単にするために、$y=(x-c_1)/c_2$ とすると

$$
w(y) = A'|c_2|^\alpha|y|^\alpha e^{-(y+c_1/c_2)} = Dy^\alpha e^{-y}
$$

定数を D としてまとめています。これによって、定数を省いて書くと

$$
C_{(n)} = y^{-\alpha}e^y\frac{d^n}{dy^n}(y^{n+\alpha}e^{-y}) \qquad (\alpha>-1)
$$

となるので、ラゲール陪多項式になります。また、$x=c_1$ のとき $y=0$、$x=\infty$ のとき $y=\infty$ なので、直交関係での積分範囲は 0 から ∞ になります。