区間

区間の言葉の定義が必要になることがあるので簡単にまとめます。
実数全体の集合は R と表記しています。
部分集合には「⊂」を使っています。

言葉の定義を与えます。

- 実数の集合での有界
  実数の集合 (実数全体の集合 R の部分集合) を X とします。
  任意の $x \in X$ に対して等しいか大きい実数 s $(x \leq s)$ が存在するなら、X は上に有界、s は上界と言われます。X に s よりも小さな上界がいないなら、s は上限と言われます。
  任意の $x \in S$ に対して等しいか小さい実数 s $(s \leq x)$ が存在するなら、X は下に有界、s は下界と言われます。X に s よりも大きな下界がいないなら、s は下限と言われます。

- 最大元、最小元
  有限の実数の集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ において、任意の $x_k \in X$ に対して $x_i \geq x_k$ となる x_i(X に含まれる最も大きな x_i) は最大元 (maximum) と言われ、そのような x_i は

$$x_i = \max X \ , \ x_i = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ , \ x_i = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$$

  と表記されます。$x_i \leq x_k$ では最小元 (minimum) と言われ、そのことは

$$x_i = \min X \ , \ x_i = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ , \ x_i = \min_{i \leq j \leq n} x_j$$

  と表記されます。 例えば $X = \{3, 8, 9\}$ なら、$9 = \max X$、$3 = \min X$ となるだけです。

- 区間
  区間 (interval) の定義をまとめると、a, b を実数として
  - 開区間 (open interval)：$(a, b) = \{x|\ a < x < b\}$
  - 閉区間 (closed interval)：$[a, b] = \{x|\ a \leq x \leq b\}$
  - 半開区間 (half open interval)：$[a, b) = \{x|\ a \leq x < b\}$
  - 半閉区間 (half closed interval)：$(a, b] = \{x|\ a < x \leq b\}$

  有界の定義からこれらの区間は有界です。a, b を端点 (endpoint) と言い、端点による $b - a$ を区間の長さと言います。区間での有界は長さ $b - a$ が有限になることと同じです。また、区間において端点を除いた点のことを内点 (interior point) と言います。
  別の表記として開区間を], [とする記号もあり、開区間では $]a, b[$、半開区間では $[a, b[$、半閉区間では $]a, b]$ と表記されます。
  非有界の区間もあり、それらはわりと勘違いを起こしやすい表記が使われていて
  - 無限開区間 (infinite open interval)：$(a, \infty) = \{x|\ a < x\}$, $(-\infty, a) = \{x|\ x < a\}$
  - 無限閉区間 (infinite closed interval)：$[a, \infty) = \{x|\ a \leq x\}$, $(-\infty, a] = \{x|\ x \leq a\}$
  - 無限区間 (infinite interval)：$(-\infty, \infty) =$ 実数全体

ここでは実数のみを扱うので無限大は含まれていないですが、無限大の記号が使われます。この無限大は集合の元としての意味はなく、ただの表記上の記号として扱われます。これに対して、無限大も含めて実数を定義しているときではただの表記上の記号ではなくなるので注意が必要です。

- nested

  区間 I_n $(n=1,2,\ldots)$ があるとし、これらが $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ となっているとき、区間 I_n による数列を nested と言います。簡単に言えば区間 I_1 の中に I_2 があり、I_2 の中に I_3 があり、と続いているものです。

基本的な定理を示します。

[A1] 実数の集合 S が少なくとも 2 個の点を含んでおり、$x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in S)$ であるなら $[x_1, x_2] \subset S$ となるとき、S は区間。

実数の集合 S が

(i) 少なくとも 2 個の点を含む
(ii)$x_1 < x_2$ なら $[x_1, x_2] \subset S$

を満たしているとします。有界、非有界で場合わけして示します。

(I) S が有界な場合

有界なので上限 $b = \sup S$ と下限 $a = \inf S$ がいます。上限、下限の定義から、任意の $x \in S$ に対して、$a \leq x \leq b$ です。なので、S は $[a, b]$ の部分集合です。

(i) から 2 点以上を S は含んでいるので、y が開区間 (a, b) に含まれているとすれば、y は下限でないので $y_1 < y$、上限でないので $y < y_2$ となる $y_1, y_2 \in S$ がいます。そうすると、$y_1 < y_2$ なので (ii) から $[y_1, y_2] \subset S$ です。そして、$y_1 < y < y_2$ なので $y \in S$ となり、$y \in (a, b)$ です。よって、(a, b) は S の部分集合 ($(a, b) \subset S$) です。

このように、$S \subset [a, b]$, $(a, b) \subset S$ です。簡単に言えば、S は (a, b) を含み、$[a, b]$ に含まれる集合です (細かく言えば、そのものの場合もある)。そして、上限、下限が S に含まれているかどうかは S 次第です。もし a, b が S に含まれているなら、S は $[a, b]$ を含み、$[a, b]$ に含まれる集合となるので、$S = [a, b]$ です。a, b を含まないなら、S は (a, b) を含み、(a, b) に含まれる集合となるので、$S = (a, b)$ です。同様に、a, b のどちらかを含んでいないなら、$(a, b]$, $[a, b)$ となります。よって、S は有界な区間です。

(II) S が上に有界で下に有界でない場合

上に有界なので上限 b は存在します。このため S は $(-\infty, b]$ の部分集合です。$x < b$ とします。x は上限ではないので、$x < x_2$ となる $x_2 \in S$ がいます。一方で、S は下に有界でないので $x_1 < x$ となる $x_1 \in S$ がいます。このため、S において $x_1 < x_2$ なので (ii) から $[x_1, x_2]$ は S の部分集合となり、$x_1 < x < x_2$ から $x \in S$ です。そうすると、$x < b$ は S にいて、S は下限がないことから、$(-\infty, b)$ は S の部分集合です。

S は $(-\infty, b]$ の部分集合、$(-\infty, b)$ は S の部分集合なので、b を S が含んでいるなら $S = (-\infty, b]$、b を含んでいないなら $S = (-\infty, b)$ となります。よって、S は上に有界で下に有界でない区間です。

(III) S が上に有界でなく下に有界な場合

下に有界なので下限 a が存在し、S は $[a, \infty)$ の部分集合です。$x > a$ とすれば、a は S の下限なので、$x < x_1$ となる $x_1 \in S$ がいて、上に有界でないので $x < x_2$ となる $x_2 \in S$ がいます。よって、(II) と同じように $x \in S$ となり、(a, ∞) は S の部分集合です。

S は $[a, \infty)$ の部分集合、(a, ∞) は S の部分集合なので、a を S が含んでいるなら $S = [a, \infty)$、a を含んでいないなら $S = (a, \infty)$ となります。よって、S は上に有界でなく下に有界な区間です。

(IV) 上と下に有界でない場合

このときは $(-\infty, \infty)$ のことで、全ての実数の集合です。S は実数の集合なので、S は $(-\infty, \infty)$ の部分集合です。

上と下に有界でないので、任意の実数 x に対して $x_1 < x < x_2$ となる $x_1, x_2 \in S$ がいます。$x_1 < x_2$ なので (ii) から $[x_1, x_2]$ は S の部分集合となり、$x_1 < x < x_2$ から $x \in S$ です。任意の実数 x が S に含まれており、S は上と下に有界でないので、$(-\infty, \infty)$ は S の部分集合です。

よって、S は $(-\infty, \infty)$ の部分集合で、$(-\infty, \infty)$ は S の部分集合なので、S は上と下に有界でない区間です。

[A2] 区間縮小法

有界な閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が nested であるとして、このとき数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty}\{b_n - a_n\} = 0 \tag{1}$$

となっているなら、各閉区間 I_n に含まれるただ 1 つの実数 α が存在する ($I_1, I_2, \ldots$ の全てがただ 1 つの α を共通して含んでいる)。

$I_n = [a_n, b_n]$ が nested であることは、$a_n \leq a_{n+1},\ b_{n+1} \leq b_n$ となっていることです。

$\{a_n\}$ は広義単調増加で $a_n < b_n$ なので、上に有界です。$\{b_n\}$ は広義単調減少で $a_n < b_n$ なので、下に有界です。なので、$\{a_n\}$ は上限 α、$\{b_n\}$ は下限 β に収束し

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \alpha\ ,\ \lim_{n\to\infty}\{b_n\} = \beta \quad (a_n \leq \alpha\ ,\ \beta \leq b_n)$$

$\{a_n\} < \{b_n\}$ となっているので極限は $\alpha \leq \beta$ です。よって、(1) から

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}\{b_n\} - \lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{b_n - a_n\} = 0$$

となるので、$a_n \leq \alpha \leq b_n$ です。n は任意の正の整数なので、各 $I_n = [a_n, b_n]$ に含まれる α が存在します。そして、$a_n \leq s,\ s \leq b_n$ となる s が極限以外にあるとしても、$n \to \infty$ でこの不等式は $\alpha \leq s$、$s \leq \alpha$ なので、α は 1 つに決まります。

入門的な内容でもまれに唐突に出てくることがある開集合と閉集合について簡単に触れておきます。ここでの定義は実数のときであることに注意してください。

- 近傍

  a を実数、$\epsilon > 0$ としたとき、$\{x \in \mathrm{R}|\ |x-a| < \epsilon\}$ で与えられる集合 $V_\epsilon(a)$ は a の ϵ-近傍 (ϵ-neighborhood) と呼ばれます。開区間 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ は $\{x \in \mathrm{R}|\ |x-a| < \epsilon\}$ と同じなので、開区間で言っても同じです。

  ある集合 V が a の ϵ-近傍を含むとき、V は a の近傍 (neighborhood) と定義され、a は内点 (interior point) と呼ばれます。開区間で言えば、$(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset V$ となる ϵ がいるなら a は内点です。V の内点の集合は V の内部 (interior) と呼ばれます。

- 開集合

  ある実数の集合 S があり、任意の $a \in S$ に対して、a の近傍 V が $V \subset S$ となっているなら S は開集合と定義されます。

  近傍の定義から ϵ-近傍 $V_\epsilon(a)$ が V に含まれていて、$V \subset S$ なので、$V_\epsilon(a)$ は S に含まれます。このため、任意の $a \in S$ での ϵ-近傍が S に含まれているなら開集合となります。各点で ϵ-近傍がいることは各点が内点であることなので、S に含まれる全ての点が内点であるなら開集合とも言えます。

- 閉集合

  実数の集合 S の補集合 $S^c = \mathrm{R}\backslash S$ (R に含まれるが S でない集合) が開集合なら、S は閉集合 (closed set) と定義されます。

- $(x, y),\ (-\infty, y),\ (x, \infty),\ (-\infty, \infty)$ は開集合

  x, y を任意の実数として、$a \in (x, y)$ とします。a の ϵ-近傍が (x, y) にいれば開集合になるので、$(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset (x, y)$ となる ϵ がいれば開集合です。なので

$$a - \epsilon \geq x\ ,\ a + \epsilon \leq y$$

  となる ϵ がいるかどうかです。

  単純に $\epsilon = a - x\ (a > x)$ としてみると

$$a - \epsilon = a - (a - x) = x\ ,\ a + \epsilon = a + a - x$$

  このとき、(x, y) における a の地点は $y - a$ でもあるので、$y - a \geq a - x$ になっているとすれば

$$a + \epsilon = a + a - x \leq a + y - a = y$$

  となり条件に合います。しかし、a の値によっては $y - a$ の方が小さい可能性もあるので、それを ϵ としてみると

$$a - \epsilon = a - (y - a) > a - (a - x) = x$$
$$a + \epsilon = a + y - a = y$$

  となり、これも条件に合います。なので、$\epsilon_m = \min\{a - x,\ y - a\}$ とすれば、$(a - \epsilon_m, a + \epsilon_m) \subset (x, y)$ です。よって、$(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset (x, y)$ となる ϵ がいるので（任意の a は (x, y) の内点)、(x, y) は開集合です。

  $(-\infty, y)$ と (x, ∞) では片側だけ同様にすれば同じ話になるので、これらも開集合です。$(-\infty, \infty)$ のときは $\epsilon = 1$ とでも取れば成立するので、開集合です。

- 開集合の和集合は開集合

  実数における開集合を $U_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ とし、和集合を $G = U_1 \cup U_2 \cup \cdots$ とします。$a \in G$ なら、a は U_i のどれかに含まれているので、$a \in U_k$ とします。開集合なので、U_k には a の ϵ-近傍 $V_\epsilon(a)$ が存在し、a の近傍 V が U_k にいます。そして、$U_k \subset G$ なので、a の近傍 V は G の部分集合です。$a \in G$ は任意なので G は各点での近傍を含むことになり $(V \subset G)$、開集合となります。

- 閉区間 $[x, y]$ は閉集合

  x, y を任意の実数とし、閉区間を $[x, y]$ とします。定義から、$[x, y]$ は開区間 $(-\infty, x), (y, \infty)$ を合わせたものの補集合です。$(-\infty, y), (x, \infty)$ は開集合で、開集合の和集合は開集合なので、その補集合である $[x, y]$ は閉集合です。