積分の性質

積分の性質を求めます。
リーマン積分、ダルブー積分の区別をつけなくてはいけないとき以外は積分と言っていきます。
積分表記の定義は [A4],[A9],[A10] でしています。

ここでの記号の定義

- P：閉区間の分割
- $\dot{P}$：点付き分割
- Δ：分割 P による部分区間での最大の長さ
- $S(f;\dot{P})$：分割 P のリーマン和
- M_i, m_i：部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の上限、下限
- $U(f;P),\ L(f;P)$：上限和、下限和
- $U(f),\ L(f)$：上積分、下積分

[S1] $\sup(f(x)-f(y)) = \sup f(x) - \inf f(x).$

[S2] $\sup|f(x)| - \inf|f(x)| \leq \sup f(x) - \inf f(x).$

[S3] $\sup|f(x)-f(y)| = \sup f(x) - \inf f(x).$

[A1] 階段関数は積分可能。

[A2] 積分の規則

[A3] 関数 f が閉区間 $[a,b]$ で積分可能なとき、$[a_1,b_1]$ $(a \leq a_1 \leq b_1 \leq b)$ において f は積分可能。

[A4] f が閉区間 $[a,b]$ で積分可能なとき、$[a,c],[c,b]$ $(c \in [a,b])$ においても積分可能。

[A5] f が積分可能なら $|f|$ は積分可能。

[A6] $\Big|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

[A7] 関数 f,g が積分可能なら fg は積分可能。

[A8] 第一平均値の定理

[A9] 微分積分の基本定理 (第一形式)

[A10] 微分積分の基本定理 (第二形式)

[A11] 部分積分

[A12] 第二平均値の定理

[A13] 変数変換

上限と下限の定義と関係を出しておきます。ここでの関数 f は閉区間 I で与えられ、I で有界になっているとします。

関数 f の上限、下限は

$$\sup_{x\in I} f(x) = \sup\{f(x)|\ x\in I\}\ ,\ \inf_{x\in I} f(x) = \inf\{f(x)|\ x\in I\}$$

と表記します。また、省略して問題なさそうな場合は $\sup_I$ や $\sup$ と表記します。

M が関数 $f(x)$ の上限であるための条件は、α を実数として

(i) 全ての $x\in I$ に対して $f(x)\leq M$

(ii) $\alpha < M$ なら $\alpha < f(x)$ となる $x\in I$ がいる

m が $f(x)$ の下限であるための条件は

(i) 全ての $x\in I$ に対して $f(x)\geq m$

(ii) $\alpha > m$ なら $\alpha > f(x)$ となる $x\in I$ がいる

となっています。

使う上限と下限の関係を示します。[S1] はここでは使わないですが、積分の話のときに出てくることもあるのでついでに示しています。

[S1] $\sup_{x,y\in I}(f(x)-f(y)) = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$。

上限の定義から $f(x)\leq \sup f(x)$ なので

$$f(x)-f(y)\leq \sup_I f(x) - f(y)$$

$f(y)$ では下限 $\inf_I f(y)\leq f(y)$ を使うと

$$f(x)-f(y)\leq \sup_I f(x) - f(y) \leq \sup_I f(x) - \inf_I f(y)$$

最右辺は x, y で区別されたままにしていますが、どちらも $f(x)$ としても同じです。右辺は $x\in I$ による $f(x)$ の上限と下限で、上限、下限は定数なので、右辺は $f(x)-f(y)$ の $x, y\in I$ による集合の上界になります。そうすると、上限によって

$$\sup_{x,y\in I}(f(x)-f(y)) \leq \sup_I f(x) - \inf_I f(y) \tag{1}$$

一方で、上限、下限の条件 (i),(ii) は、任意の $\epsilon > 0$ を使って

$$f(x) > \sup_I f(x) - \epsilon\ ,\ f(x) < \inf_I f(x) + \epsilon \tag{2}$$

と書けるので

$$f(x)-f(y)>\sup_I f(x)-\epsilon-\inf_I f(y)-\epsilon=\sup_I f(x)-\inf_I f(y)-2\epsilon$$

ϵ は任意なので、上限、下限の定義が (2) となるのと同じように

$$f(x)-f(y)\geq\sup_I f(x)-\inf_I f(y)$$

これは

$$\sup_I f(x)-\inf_I f(y)\leq f(x)-f(y)\leq\sup_I(f(x)-f(y))$$

なので、(1) と合わせれば

$$\sup_{x,y\in I}(f(x)-f(y))=\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x)$$

となります。

[S2] $\sup_{x\in I}|f(x)|-\inf_{x\in I}|f(x)|\leq\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x)$

$|f(x)|$ は上限、下限の条件から、任意の $\epsilon>0$ に対して

$$\sup|f(x)|-\epsilon<|f(x)|\ ,\ \inf|f(x)|+\epsilon>|f(x)|$$

この 2 つの差は

$$|f(x)|-|f(y)|>\sup|f(x)|-\epsilon-(\inf|f(x)|+\epsilon)=\sup|f(x)|-\inf|f(x)|-2\epsilon$$

逆三角不等式と、差の絶対値は上限と下限の差を超えないことから

$$|f(x)|-|f(y)|\leq|f(x)-f(y)|\leq\sup f(x)-\inf f(x)$$

そうすると

$$\sup f(x)-\inf f(x)>\sup|f(x)|-\inf|f(x)|-2\epsilon$$

ϵ は任意なので

$$\sup f(x)-\inf f(x)\geq\sup|f(x)|-\inf|f(x)|$$

となります。

[S3] $\sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)| = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$。

$f(x)-f(y)$ の絶対値は $f(x)$ の上限と下限の差を超えないので

$$|f(x)-f(y)| \leq \sup_I f(x) - \inf_I f(x)$$

右辺は $|f(x)-f(y)|$ の $x,y\in I$ による集合の上界なので、上限は

$$\sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)| \leq \sup_I f(x) - \inf_I f(x) \tag{3}$$

となっています。

上限、下限の条件から、任意の $\epsilon>0$ と $z_1,z_2\in I$ に対して

$$\sup_I f(x) - \epsilon < f(z_1)\ ,\ \inf_I f(x) + \epsilon > f(z_2)$$

これらから

$$f(z_1)-f(z_2) > \sup f(x) - \inf f(x) - 2\epsilon$$

ϵ を

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2}(\sup f(x) - \inf f(x)) \tag{4}$$

と選べば

$$\sup f(x) - \inf f(x) - 2\epsilon > 0$$

となるので

$$0 < \sup f(x) - \inf f(x) - 2\epsilon < f(z_1) - f(z_2)$$

差の絶対値は

$$f(x)-f(y) \leq |f(x)-f(y)| \leq \sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)|$$

なので、(3) から

$$0 < \sup_I f(x) - \inf_I f(x) - 2\epsilon < \sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)| \leq \sup_I f(x) - \inf_I f(x)$$

このときの ϵ は (4) から任意に小さく取れるので

$$\sup_I f(x) - \inf_I f(x) \leq \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| \leq \sup_I f(x) - \inf_I f(x)$$

よって

$$\sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| = \sup_I f(x) - \inf_I f(x)$$

となります。

単語を定義しておきます。

- 階段関数
  閉区間 $[a,b]$ があるとき、階段関数は $[a,b]$ 内の閉区間 $[a_1,b_1]$ においてのみ定数を持ち、それ以外では 0 となる関数です。x,y 軸の 2 次元のグラフで言えば、$x=a$ から $x=b$ までの間で y が定数、それ以外では 0 になっている関数です。
  一般的な階段関数は、閉区間 $I_1, I_2, \ldots, I_n$ において、それぞれが定数 $\chi_i(x) = \alpha_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ となっている関数を足し合わせたものです。

- 原始関数
  $f'(x)$ は関数 f の導関数とします。関数 f があり、f の定義域において $F'(x) = f(x)$ となる微分可能な関数 F を f の原始関数 (primitive function, antiderivative, inverse derivative) や不定積分 (indifinite integral) と言います。ただし、不定積分は [A10] で触れてるように積分の形を指すことが多いです。

ここから積分を見ていきます。リーマンとダルブーの区別が必要でないときは積分可能、積分と言っていきます。

[A1] 階段関数は積分可能。

階段関数はある閉区間において定数なので、感覚的にそのような関数は積分可能と分かりますが、リーマン積分の定義どおりに示します。

階段関数を閉区間 $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ では $f(x) = \alpha > 0$, それ以外では $f(x) = 0$ とします ($\alpha < 0$ では (7) の α が $|\alpha|$ になるだけ)。

$[a,b]$ の分割 P を作り、$\Delta < \delta$ になっているとします。この分割で t_k を a_1, b_1 に選ぶことにすれば、$f(x)$ が 0 とならない区間を $[a_1-\delta, b_1+\delta]$ と作れます (a_1, b_1 に長さ Δ となる閉区間をくっつけたもの)。これは

$$x_i = a_1 - \delta \ ,\ x_{i+1} = a_1 \ ,\ \ldots \ ,\ x_l = b_1 \ ,\ x_{l+1} = b_1 + \delta$$

となっており、$[x_i, x_{i+1}] = [a_1-\delta, a_1]$ では $t_i = a_1$ として $f(a_1) = \alpha$ を使い、$[x_l, x_{l+1}] = [b_1, b_1+\delta]$ では $t_l = b_1$ として $f(b_1) = \alpha$ を使うということです。そうすると、この部分の和は

$$\begin{aligned}
&f(t_i)(x_{i+1}-x_i) + f(t_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+1}) + \cdots + f(t_{l-1})(x_l - x_{l-1}) + f(t_l)(x_{l+1} - x_{l-1}) \\
&\quad = \alpha((x_{i+1}-x_i) + (x_{i+2}-x_{i+1}) + \cdots + (x_l - x_{l-1}) + (x_{l+1} - x_l)) \\
&\quad = \alpha(-x_i + x_{l+1}) \\
&\quad = \alpha(b_1 - a_1 + 2\delta) \qquad (5)
\end{aligned}$$

今度は δ で $[a_1, b_1]$ が狭められているとして $[a_1+\delta, b_1-\delta]$ とすれば、これは素直に

$$\alpha(b_1-\delta-(a_1+\delta)) = \alpha(b_1-a_1-2\delta) \tag{6}$$

となります。

(10) は $f(x)$ が 0 とならない区間が $[a_1, b_1]$ より大きく、(11) は $[a_1, b_1]$ より小さいので、リーマン和はこの 2 つの間の値を持つことになり

$$\alpha(b_1-a_1-2\delta) \leq S(f;\dot{P}) \leq \alpha(b_1-a_1+2\delta)$$

変形すれば

$$-2\alpha\delta \leq S(f;\dot{P}) - \alpha(b_1-a_1) \leq 2\alpha\delta \tag{7}$$

よって、任意の $\epsilon>0$ を使って $\delta=\epsilon/2\alpha$ とすれば

$$|S(f;\dot{P}) - \alpha(b_1-a_1)| < 2\alpha\delta = \epsilon \quad (\Delta < \delta = \frac{\epsilon}{2\alpha})$$

となるので、階段関数はリーマン積分可能です。

[A2] 積分の規則。

関数 f, g が積分可能なとき

(A2-1) 積分の和：$\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(A2-2) 積分の定数倍：$\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$

(A2-3) $f(x)\geq g(x)$ なら $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

(A2-1)：f, g は積分可能なので、リーマン積分の定義から同じ分割 P において

$$|S(f;\dot{P})-\gamma_f| < \epsilon\ ,\ |S(f;\dot{P})-\gamma_g| < \epsilon \quad (\Delta < \delta)$$

γ_f, γ_g はリーマン積分です。$f+g$ でのリーマン積分が知りたいので

$$|S(f+g;\dot{P})-(\gamma_f+\gamma_g)| = |S(f;\dot{P})+S(g;\dot{P})-(\gamma_f+\gamma_g)| = |S(f;\dot{P})-\gamma_f+S(g;\dot{P})-\gamma_g|$$

三角不等式から

$$|S(f;\dot{P})-\gamma_f+S(g;\dot{P})-\gamma_g| \leq |S(f;\dot{P})-\gamma_f| + |S(g;\dot{P})-\gamma_g| < 2\epsilon$$

よって

$$|S(f+g;\dot{P})-(\gamma_f+\gamma_g)|<2\epsilon \quad (\Delta<\delta)$$

となります。

手間が増えますが、(A2-1) は上限和、下限和からも示せます。上限、下限は

$$\sup_{x\in I}(f(x)+g(x)) \le \sup_{x\in I} f(x)+\sup_{x\in I} g(x)\ ,\ \inf_{x\in I}(f(x)+g(x)) \ge \inf_{x\in I} f(x)+\inf_{x\in I} g(x)$$

となっていることと、上積分は下積分以上になっていることから

$$L(f;P)+L(g;P)\le L(f+g;P)\le U(f+g;P)\le U(f;P)+U(g;P)$$

分割 P が分割 P_1,P_2 の細分であるなら (「リーマン積分とダルブー積分」の [B1])

$$L(f;P_1)+L(g;P_2)\le L(f;P)+L(g;P)\ ,\ U(f;P)+U(g;P)\le U(f;P_1)+U(g;P_2)$$

上積分は上限和の下限、下積分は下限和の上限なので

$$L(f;P_1)+L(g;P_2)\le L(f;P)+L(g;P)\le L(f;P_1)+L(g;P_2)\le L(f+g;P)\le L(f+g)$$
$$U(f+g)\le U(f+g;P)\le U(f;P)+U(g;P)\le U(f;P_1)+U(g;P_2)$$

これらを合わせれば

$$L(f;P_1)+L(g;P_2)\le L(f+g)\le U(f+g)\le U(f;P_1)+U(g;P_2)$$

P_1,P_2 は任意なので上積分、下積分になる分割を選んだとすれば、f,g は積分可能なことから

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\le L(f+g)\le U(f+g)\le \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

よって、全て等号になるので (A2-1) になります。

(A2-2)：定数 α による関数の定数倍のリーマン和は

$$S(\alpha f;\dot{P})=\alpha S(f;\dot{P})$$

定数はリーマン積分の定義での絶対値の外に出せるので、f が積分可能なら αf も積分可能で、そのまま (A2-2) になります。

(A2-3)：$f(x)=g(x)$ のときはそのまま成立するので、$f(x)\neq g(x)$ とします。リーマン積分の定義から絶対値を外して書けば

$$-\epsilon < S(f;\dot{P}) - \gamma_f < \epsilon\ ,\ -\epsilon < S(g;\dot{P}) - \gamma_g < \epsilon$$

これらから

$$S(f;\dot{P}) < \gamma_f + \epsilon\ ,\ \gamma_g - \epsilon < S(g;\dot{P})$$

として、$f(x) > g(x)$ なら $S(f;\dot{P}) > S(g;\dot{P})$ となることに使えば

$$\gamma_g - \epsilon < S(g;\dot{P}) < S(f;\dot{P}) < \gamma_f + \epsilon$$

よって

$$\gamma_g < \gamma_f + 2\epsilon$$

となり、ϵ は任意なので、$f(x) > g(x)$ なら $\gamma_f > \gamma_g$ となります。

(A2-3) は、リーマン積分とダルブー積分を合わせるともっと簡単に示せます。f, g は積分可能なので (A2-1) から

$$\gamma_f - \gamma_g = \gamma_{f-g} \quad (\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx)$$

$f(x) - g(x) \geq 0$ なので、$f - g$ の下限和は 0 以上です。そうすると、下限和の上限である下積分も 0 以上になるので

$$L(f - g) \geq 0$$

リーマン積分とダルブー積分は等しいので

$$\gamma_f - \gamma_g = \gamma_{f-g} = L(f - g) \geq 0$$

となり、$\gamma_f \geq \gamma_g$ です。

[A3] 関数 f が閉区間 $[a, b]$ で積分可能なとき、$[a_1, b_1]$ $(a \leq a_1 \leq b_1 \leq b)$ において f は積分可能。

f は $[a, b]$ で積分可能なので、任意の分割 P に対して（「リーマン積分とダルブー積分」の [B5]）

$$U(f;P) - L(f;P) < \epsilon \tag{8}$$

任意なので $a_1, b_1 \in [a, b]$ の点を含んでいない場合もありますが、P に a_1, b_1 を加えた細分 S は

$$U(f;S) - L(f;S) \leq U(f;P) - L(f;P) < \epsilon$$

となっているので、話は同じです。M_i, m_i を部分区間 I_i の上限、下限として

$$\begin{aligned}U(f;P)-L(f;P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{j}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=j+1}^{k}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\end{aligned}$$

このとき、$x_j=a_1,\ x_k=b_1$ とすれば、第 2 項が $[a_1,b_1]$ 部分での和になります。$M_i-m_i\geq 0$ のために和が負になることはないので、$[a_1,b_1]$ の分割を Q として、(8) から

$$U(f;Q)-L(f;Q)=\sum_{i=j+1}^{k}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\epsilon \tag{9}$$

よって、f は $[a_1,b_1]$ で積分可能です。

[A4] f が閉区間 $[a,b]$ で積分可能なとき、$[a,c],[c,b]$ $(c\in[a,b])$ においても積分可能。これは必要十分条件。そして、このとき

$$\int_a^b f(dx)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{10}$$

となり、a,b,c の大小関係とは無関係に成立する。

[A3] から f が $[a,b]$ で積分可能とすれば、$[a,b]$ 内の閉区間において f は積分可能なので $[a,c],[c,b]$ で積分可能です。

$[a,c]$ と $[c,b]$ で f は積分可能とすれば、$[a,c]$ の分割 P_{ac} と $[c,b]$ の分割 P_{cb} は (9) となっています。P を P_{ac} と P_{cb} に分割しているので

$$U(f;P_{ac})-L(f;P_{ac})+U(f;P_{cb})-L(f;P_{cb})=U(f;P)-L(f;P)<2\epsilon$$

となって、f は $[a,b]$ で積分可能です。

$[a,b],[a,c],[c,b]$ で積分可能として (10) を示します。上積分 $U(f)$ は上限和 $U(f;P)$ の分割 P による集合の下限なので

$$U(f)\leq U(f;P)$$

今は積分可能なので上積分を積分として

$$\int_a^b f(x)dx\leq U(f;P)=U(f;P_{ac})+U(f;P_{cb})$$

上積分は上限和の集合 (分割によって区別される上限和の集合) の下限なので、任意の $\epsilon>0$ による下限の条件 $U(f;P)<U(f)+\epsilon$ から

$$\int_a^c f(x)dx \leq U(f;P) = U(f;P_{ac}) + U(f;P_{cb}) < \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + 2\epsilon$$

ϵ は任意なので

$$\int_a^c f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{11}$$

となっています。

今度は逆側から見ます。上積分は上限和の集合の下限なので

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U(f;P_{ac}) + U(f;P_{cb})$$

積分可能の条件 $U(f;P) - L(f;P) < \epsilon$ から

$$U(f;P_{ac}) + U(f;P_{cb}) < L(f;P_{ac}) + L(f;P_{cb}) + 2\epsilon = L(f;P) + 2\epsilon$$

下積分は下限和の集合の上限で、ϵ は任意なので

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

よって、(11) と合わせれば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

となります。

今の表記において $a < c < b$ ですが、$a > b$ と $a = b$ のときを

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \ , \ \int_a^a f(x)dx = 0$$

と表記するように定義します (符号を反転させるのは $b - a < 0$ だから)。この定義を加えることで、a, b, c の大小に関係なくこの定理は使えます。$f(x)$ は無関係なので省いて書くことにして、例えば $c \leq a \leq b$ なら

$$\int_c^b = \int_c^a + \int_a^b$$

となりますが、このとき

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = -\int_c^a + \int_c^b = -\Big(\int_c^b - \int_a^b\Big) + \int_c^b = -\int_c^b + \int_a^b + \int_c^b$$
$$= -\Big(\int_c^b + \int_b^a\Big) + \int_c^b$$
$$= -\int_c^a + \int_c^b$$
$$= \int_a^c + \int_c^b$$

として成立します。他の場合も同様に示せるので、a, b, c の大小に関係なく成立します。

[A5] f が積分可能なら $|f|$ は積分可能。

$|f|$ での上限和と下限和を

$$M_i^* = \sup\{|f(x)| \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}\ ,\ m_i^* = \inf\{|f(x)| \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

とすれば、[S2] から

$$M_i^* - m_i^* \le M_i - m_i$$

この関係を持ったまま足していったのが上限和、下限和なので

$$U(|f|; P) - L(|f|; P) \le U(f; P) - L(f; P)$$

f は積分可能なので、(8 からこれは

$$U(|f|; P) - L(|f|; P) < \epsilon$$

となり、$|f|$ は積分可能です。

[A6] $\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|dx$。

絶対値は $f(x) \le |f(x)|,\ -f(x) \le |f(x)|$ で、積分は関数を足していったものなので

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx\ ,\ -\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

これらから

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

真ん中を絶対値にすれば

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

となります。

[A7] 関数 f, g が積分可能なら fg は積分可能。

fg の上限和と下限和は

$$U(fg;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(fg)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{I_i}(f(x)g(x))(x_i - x_{i-1})$$

$$L(fg;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(fg)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{I_i}(f(x)g(x))(x_i - x_{i-1})$$

これらから

$$U(fg;P) - L(fg;P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i(fg) - m_i(fg))(x_i - x_{i-1}) \tag{12}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\sup_{I_i}(f(x)g(x)) - \inf_{I_i}(f(x)g(x)))(x_i - x_{i-1}) \tag{13}$$

これが積分可能の条件を満たすかを求めます。

積分可能な関数は有界なので (「リーマン積分とダルブー積分」の [A3])

$$|f(x)| \leq \alpha\ ,\ |g(x)| \leq \alpha$$

となる $\alpha > 0$ がいます。そうすると、三角不等式から

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))| \\
&\leq |f(x)(g(x) - g(y)))| + |g(y)(f(x) - f(y))| \\
&= |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\
&\leq \alpha|g(x) - g(y)| + \alpha|f(x) - f(y)|
\end{aligned}$$

差の絶対値は

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup f(x) - \inf f(x)$$

なので

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)| \le \alpha(\sup g(x)-\inf g(x))+\alpha(\sup f(x)-\inf f(x))$$

左辺で $(fg)(x)=f(x)g(x)=h(x)$ とすれば、右辺は任意の x, y での $|h(x)-h(y)|$ 以上になると言っているので、上限を使って

$$\sup_{x,y\in I}|h(x)-h(y)| \le \alpha(\sup g(x)-\inf g(x))+\alpha(\sup f(x)-\inf f(x))$$

[S3] から

$$\sup(f(x)g(x))-\inf(f(x)g(x)) \le \alpha(\sup g(x)-\inf g(x)+\sup f(x)-\inf f(x))$$

これを (12) に使えば

$$\begin{aligned}
U(fg;P)-L(fg;P) &= \sum_{i=1}^{n}(\sup_{I_i}(f(x)g(x))-\inf_{I_i}(f(x)g(x)))(x_i-x_{i-1})\\
&\le \alpha\sum_{i=1}^{n}(\sup_{I_i} g(x)-\inf_{I_i} g(x)+\sup_{I_i} f(x)-\inf_{I_i} f(x))(x_i-x_{i-1})\\
&= \alpha(U(g;P)-L(g;P)+L(f;P)-L(f;P)
\end{aligned}$$

f, g は積分可能なので

$$U(fg;P)-L(fg;P) < \alpha(\epsilon+\epsilon) < \epsilon'$$

となり、fg は積分可能です。

[A8] 第一平均値の定理 (first mean value theorem)
閉区間 $[a, b]$ において連続な関数 f, g があり、$g(x) > 0$ $(x \in [a, b])$ であるなら

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

となる $c \in [a, b]$ が存在する。

連続なら積分可能なので (「リーマン積分とダルブー積分」の [B8])、[A7] から左辺の積分は存在します。閉区間で連続なので、最大値・最小値の定理から f は最大値と最小値を持ち

$$\min\{f(x)|\ x\in[a,b]\} \le f(x) \le \max\{f(x)|\ x\in[a,b]\}$$

最小値を m、最大値を M とします。$m = M$ では $f(x)$ は閉区間で定数になりそのまま成立するので $m \neq M$ として、これに $g(x) > 0$ をくっつければ

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

[A2] の (A2-3) から、大小関係は積分でも維持されるので

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

m, M は定数なので [A2] の (A2-2) から外に出しています。今は $g(x) > 0$ なので

$$\gamma_g = \int_a^b g(x)dx > 0$$

このため γ_g で割れば

$$m \le \frac{1}{\gamma_g}\int_a^b f(x)g(x)dx \le M$$

となります。

連続関数の中間値の定理から、ある閉区間 $[a_1, b_1]$ において $f(a_1) \neq f(b_1)$ で $f(a_1)$ と $f(b_1)$ の間に実数 α があるなら

$$f(c) = \alpha$$

となる $c \in [a_1, b_1]$ がいます。なので、a_1, b_1 で最大値、最小値を与えているとすれば

$$f(c) = \frac{1}{\gamma_g}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

となる c が $[a, b]$ にいます ($[a_1, b_1] \subset [a, b]$)。よって

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\gamma_g = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

となります。また、$g(x) = 1$ のときでは

$$\int_a^b g(x)dx = b - a$$

なので

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

となり、これを第一平均値の定理と呼んでいることもあります。実際に、これは閉区間 $[a, b]$ での積分を閉区間の長さで割っているために、平均の形になっていることが分かりやすいです。

[A9] 微分積分の基本定理 (第一形式)

$[a,b]$ において関数 F が連続で、導関数 $F'(x)=f(x)$ $(x\in[a,b])$ があり、f が積分可能なら

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

関数 F は $[a,b]$ で連続なので、部分区間 $[x_{i-1},x_i]$ での中間値の定理から

$$F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i-x_{i-1}) = f(c_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{14}$$

となる c_i がいます。部分区間での f の上限 M_i と下限 m_i とは

$$m_i(x_i-x_{i-1}) \le f(t_i)(x_i-x_{i-1}) \le M_i(x_i-x_{i-1})$$

そうすると、上限和、下限和とは

$$L(f;P) \le \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1}) \le U(f;P)$$

真ん中は (14) であり

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (F(x_i)-F(x_{i-1})) &= (F(x_1)-F(x_0))+(F(x_2)-F(x_1))+\cdots+(F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+(F(x_n)-F(x_{n-1}))\\ &= F(x_n)-F(x_0)\\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}$$

なので

$$L(f;P) \le F(b)-F(a) \le U(f;P)$$

f は積分可能なので、分割 P を積分になるように選ぶことで

$$L(f)=U(f)=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

となります。最右辺は

$$F(x)|_a^b \ , \ [F(x)]_a^b$$

のように表記されます。

積分をリーマン和の極限や上限和、下限和から求めるのは難しいですが、この定理によって積分は原始関数さえ分かれば求められます。簡単に言えば、F を微分すれば f、f を積分すれば F になるということです。

[A10] 微分積分の基本定理 (第二形式)
閉区間 $[a,b]$ で関数 f が積分可能なとき関数 F を

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \tag{15}$$

と与えたとき、F は $[a,b]$ で連続で、f が $c\in[a,b]$ で連続なら F は c で微分可能で $F'(c)=f(c)$ となる。

表記をはっきりさせます。F は、$I=[a,b]$ での任意の s によって

$$F(s)=\int_a^s f(x)dx$$

として、s に対応する値 $F(s)$ を与えています。この s を関数 F の変数扱いにして、$x\in I$ として

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx$$

と表記することが多いです。しかし、これでは関数 F の変数としての x と積分としての x が同じになっているので、区別するために

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

と表記します。
a でなく $c\in[a,b]$ にしている場合もあります。このときは

$$\int_c^x f(t)dt=\int_c^a f(t)dt+\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt-\int_a^c f(t)dt$$

となって、x とは無関係な定数の項による差が出ますが、実際にこれから示す話を見ればわかるように a か c かの影響はないです。
この違いは微分を絡めると状況がはっきりします。f の原始関数が F_1 と F_2 の 2 つあったとき

$$(F_1(x)-F_2(x))'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

となるので、微分の性質から F_1 と F_2 の差は定数になります。つまり、f の原始関数は定数だけ異なっていてもよく、このことを積分で反映させると、定数 C を使って

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$$

となり、C を積分定数 (constant of integration) と呼びます。これに対応させて

$$F(x)=\int f(x)dx+C$$

と書いた右辺の積分を f の不定積分と呼ぶことが多いです。右辺の具体的な計算をするときは原始関数を求めるという言い方はほぼ使わなく (物理で原始関数という単語はごくまれにしか出てこない)、大抵の場合で f を積分するとだけ言っています。

連続であることを示します。[A4] から、$x, y \in [a, b]$ に対して

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_y^a f(t)dt = \int_y^x f(t)dt$$

積分可能な関数は有界なので $|f(t)| \leq \alpha$ として、$x > y$ なら

$$|F(x) - F(y)| = |\int_y^x f(t)dt| \leq \int_y^x |f(t)|dt \leq \alpha(x - y)$$

$x < y$ では

$$|\int_y^x f(t)dt| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq \alpha(y - x)$$

となるので

$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x - y|$$

$|x - y| < \delta = \epsilon/\alpha$ とすれば

$$|F(x) - F(y)| < \epsilon \quad (|x - y| < \delta(\epsilon))$$

となるので、F は $[a, b]$ で連続です。

f が c で連続なら $F'(c) = f(c)$ を示します。微分可能か知りたいので

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)$$

を見ていきます。(15) から

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_c^a f(t)dt = \int_c^x f(t)dt$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) &= \frac{1}{x - c}\int_c^x f(t)dt - f(c) = \frac{1}{x - c}\int_c^x f(t)dt - \frac{1}{x - c}f(c)(x - c) \\ &= \frac{1}{x - c}\Big(\int_c^x f(t)dt - f(c)(x - c)\Big)\end{aligned}$$

定数の積分から

$$f(c)=\frac{1}{x-c}\int_c^x f(c)dt$$

とすれば

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)=\frac{1}{x-c}\Big(\int_c^x f(t)dt-\int_c^x f(c)dt\Big)$$

これの絶対値は

$$|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)|=\frac{1}{|x-c|}\Big|\int_c^x(f(t)-f(c)dt\Big|$$

x,c は任意なので、$x-c$ には絶対値をつけたままにしています。

f は c で連続なので、$\epsilon>0$ に対して

$$|f(x)-f(c)|<\epsilon \quad (|x-c|<\delta)$$

となっていることから、$x>c$ では

$$|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)|\le\frac{1}{x-c}\int_c^x|(f(t)-f(c)dt|<\frac{1}{x-c}\epsilon(x-c)=\epsilon$$

$x<c$ では

$$\begin{aligned}\frac{1}{c-x}\Big|\int_c^x(f(t)-f(c)dx\Big| &= \frac{1}{c-x}\Big|-\int_x^c(f(t)-f(c))dt\Big|\\ &= \frac{1}{c-x}\Big|\int_x^c(f(t)-f(c))dt\Big|\\ &\le \frac{1}{c-x}\int_x^c|(f(t)-f(c)|dt\\ &< \frac{1}{c-x}\epsilon(c-x)\\ &= \epsilon\end{aligned}$$

となって、どちらの場合も同じです。よって、微分可能の定義

$$|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-\alpha|<\epsilon\ \Leftrightarrow\ F'(c)=\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=\alpha$$

から、$F'(c)=f(c)$ です。ただし、$[a,b]$ の端点での微分は右微分、左微分です。

[A11] 部分積分 (integration by parts)

閉区間 $[a,b]$ で関数 f,g は連続で、f',g' が積分可能なら

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

微分の規則から $(fg)' = f'g + fg'$ となり、f, g, f', g' は積分可能なので、$(fg)'$ も積分可能です。積分可能なので、基本定理 [A9] から

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b$$

積分の和の規則 ([A2] の (A2-1)) から

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b$$

となるので

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

となります。

[A12] 第二平均値の定理 (second mean value theorem)
閉区間 $[a, b]$ において、関数 f は微分可能とし、$f' > 0$ が積分可能で、g が連続なとき $c \in [a, b]$ に対して

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx.$$

両辺が積分可能なのはすぐに分かります。右辺は g が連続なので積分は存在します。微分可能なら連続なので f は連続で、g も連続なので fg も連続になり、左辺の積分は存在します。
[A10] から

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt \qquad (G'(x) = g(x)) \tag{16}$$

とすれば、部分積分から

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

$f' > 0$ なので第一平均値の定理から

$$\int_a^b f'(x)G(x)dx = G(c)\int_a^b f'(x)dx$$

となる $c \in [a,b]$ がいます。右辺は

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

なので

$$\int_a^b f'(x)G(x)dx = (f(b) - f(a))G(c) = (f(b) - f(a))\int_a^c g(x)dx$$

よって

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \big[f(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx\\ &= (f(b)G(b) - f(a)G(a)) - (f(b) - f(a))\int_a^c g(x)dx\end{aligned}$$

(16) から $G(a) = 0$ なので

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)\int_a^b g(x)dx - f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_a^c g(x)dx\\ &= f(b)\Big(\int_a^b g(x)dx + \int_c^a g(x)dx\Big) + f(a)\int_a^c g(x)dx\\ &= f(b)\int_c^b g(x)dx + f(a)\int_a^c g(x)dx\end{aligned}$$

となります。

[A13] 変数変換
閉区間 $I = [a_1, b_1],\ J = [a_2, b_2]$ があり、関数 f は I で連続とし、$t \in J$ を $x \in I$ へと変換する連続で微分可能な関数 ϕ があり $(x = \phi(t))$、ϕ' は J で積分可能とする。このとき、$\phi(a_2) = a,\ \phi(b_2) = b$ とすれば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a_2}^{b_2} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

連続関数の合成関数は連続で、f, ϕ' は積分可能なので、右辺の積分は存在します。左辺は $a, b \in [a_1, b_1]$ なので [A3] から積分は存在します。

f の原始関数 F を [A10] から

$$F(x) = \int_c^x f(s)ds \qquad (F' = f)$$

と作れば

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a)$$

微分の連鎖律から

$$F'(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

なので

$$\int_{a_2}^{b_2} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{a_2}^{b_2} F'(\phi(t))dt = F(\phi(b_2)) - F(\phi(a_2)) = F(b) - F(a)$$

よって

$$\int_{a}^{b} f(s)ds = \int_{a_2}^{b_2} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

となります。