

## 有界線形演算子

有界線形演算子の話を見ていきます。後半はヒルベルト空間での話です。

線形演算子しか出てこないで、線形は省いて演算子としています。

大文字のローマ文字は演算子、小文字のローマ文字はベクトル、ギリシャ文字は実数か複素数です。K は実数か複素数を表します。

下の補足に結果をまとめています。

最初に写像の連続の定義をしておきます。ノルム空間  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  として、 $\mathcal{N}_1$  から  $\mathcal{N}_2$  への写像を  $A$  とします。任意の実数  $\epsilon > 0$  に対して、 $\|x - x_0\| < \delta$  で  $\|A(x) - A(x_0)\| < \epsilon$  となる  $\delta > 0$  が存在するならば、 $A$  は  $x_0$  で連続 (continuous) と定義されます。 $\mathcal{N}_1$  の各点で連続ならば、 $A$  は連続と呼ばれます。

実数  $\epsilon > 0$  に対して、 $\|x - x_0\| < \delta$  で  $\|A(x) - A(x_0)\| < \epsilon$  となる  $\delta > 0$  が全ての  $x, x_0 \in \mathcal{N}_1$  で存在するならば、一様連続 (uniformly continuous) と呼ばれます。言い換えれば、 $\delta$  が  $x, x_0$  とは無関係なとき一様連続です ( $\delta$  は  $\epsilon$  のみに依存)。感覚的に言えば、連続では各点で幅  $\delta$  をいちいち変えないと  $A(x)$  と  $A(x_0)$  の幅を  $\epsilon$  より小さくできなく、一様連続では同じ  $\delta$  が使えるということです。また、定義から分かるように、一様連続ならば連続です (連続ならば一様連続は成立しない)。

$A$  が  $x_0$  で連続は、数列  $\{x_i\}$  を使って言うことができます。 $\{x_i\}$  を  $x_0 \in \mathcal{N}_1$  に収束する  $\mathcal{N}_1$  の数列とします。収束は、任意の実数  $\delta > 0$  に対して、 $n > n_0$  で  $\|x_n - x_0\| < \delta$  となる整数  $n_0 > 0$  があることです。 $A$  は  $x_0$  で連続なので、 $\|x_i - x_0\| < \delta'$  で  $\|A(x_i) - A(x_0)\| < \epsilon'$  となる  $\delta'$  があります。これと  $\{x_i\}$  の収束を合わせれば、 $n > n_0$  で  $\|A(x_n) - A(x_0)\| < \epsilon'$  となる整数  $n_0 > 0$  があることになります。なので、数列の収束の定義から、 $\{x_i\}$  が  $x_0$  に収束するならば数列  $\{A(x_i)\}$  は  $A(x_0)$  に収束します。よって、 $A$  が  $x_0$  で連続ならば、 $\{x_i\}$  が  $x_0$  に収束するとき数列  $\{A(x_i)\}$  は  $A(x_0)$  に収束すると言えます (極限で書けば  $x_i \rightarrow x_0$  なら  $A(x_i) \rightarrow A(x_0)$ )。これの逆も言えます (証明は省きます)。

$\alpha, \beta \in K$  があり、ベクトル空間  $\mathcal{V}$  からベクトル空間  $\mathcal{W}$  への写像  $T$  が

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w) \quad (v, w \in \mathcal{V})$$

であるとき、 $T$  は線形演算子、線形作用素 (linear operator) や線形変換 (linear transformation) と呼ばれます。ここでは線形演算子を使い、線形演算子しか出てこないで演算子と言っていきます。演算子  $T$  の逆写像  $T^{-1}$  は  $\mathcal{W}$  から  $\mathcal{V}$  への写像です。

$\mathcal{V}$  から  $\mathcal{W}$  への演算子のベクトル空間を  $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ 、 $\mathcal{V}$  から  $\mathcal{V}$  を  $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \mathcal{L}(\mathcal{V})$  のように表記します。和とスカラー倍は

$$(T + S)(v) = T(v) + S(v), \quad (\alpha T)(v) = \alpha T(v) \quad (T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}))$$

と与えられています。

演算子のカーネル (kernel、核、ヌル空間) は  $\text{Ker}T = \{v \in \mathcal{V} \mid T(v) = 0\}$  と定義され、カーネルは演算子を作らせたなら 0 になる  $v$  のことです。なので、 $T$  の逆写像  $T^{-1}$  によって  $T^{-1}(\{0\})$  とも書けます。

ここからノルム空間を使います。ノルム空間を  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  とし、 $T$  を  $\mathcal{N}_1$  から  $\mathcal{N}_2$  への演算子とします。 $T$  が有界 (bounded) と言ったときは

$$\|T(v)\| \leq \alpha \|v\| \quad (v \in \mathcal{N}_1) \tag{1}$$

となる有限な実数  $\alpha > 0$  が全ての  $v \in \mathcal{N}_1$  に対して存在することです。有界でないときは非有界 (unbounded) と呼ばれます。 $v$  はノルム空間  $\mathcal{N}_1$ 、 $T(v)$  はノルム空間  $\mathcal{N}_2$  なので  $\|T(v)\|_2 \leq \alpha \|v\|_1$  のように区別して表記すべきですが、混乱が起きるような話は出てこないで添え字は省きます。

この定義は、 $v \neq 0$  のとき

$$\frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \alpha$$

左辺はどの  $v \in \mathcal{N}_1$  ( $v \neq 0$ ) でも  $\alpha$  以下で  $\alpha$  を超えないことから、上限によって

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \alpha \quad (2)$$

と書けます。これは別の書き方も出来ます。上限、下限の関係から、適当な実数の区間を  $\mathcal{A}$ 、 $\lambda \leq \rho$  ( $\rho \in \mathcal{A}$ ) となる  $\lambda$  の集合を  $\mathcal{A}_b$  としたとき、 $\sup \mathcal{A}_b = \inf \mathcal{A}$  です。このことから

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \inf\{\alpha \mid \|T(v)\| \leq \alpha \|v\|\} \quad (3)$$

となります。

有界演算子は連続、カーネルは閉部分空間、有限次元ノルム空間からノルム空間への演算子は有界であることを示します。

連続は定義からすぐ分かります。 $T$  を有界な演算子とすれば全ての  $v, w$  で

$$\|T(v) - T(w)\| = \|T(v - w)\| \leq \alpha \|v - w\|$$

となります。 $\epsilon > 0$  として、 $\|v - w\| < \delta = \epsilon/\alpha$  のとき全ての  $v, w$  で

$$\|T(v) - T(w)\| = \|T(v - w)\| \leq \alpha \|v - w\| < \epsilon$$

となるので、有界なとき一様連続と分かります。一様連続なので連続です。連続なら有界も言えますが、省きます。

有界演算子  $T$  のカーネルを  $\text{Ker}T = \{v \in \mathcal{N} \mid T(v) = 0\}$  とします。 $\text{Ker}T$  は  $\mathcal{N}$  の部分空間です。 $\text{Ker}T$  の数列  $\{a_i\}$  の収束先が  $\text{Ker}T$  にいることが示せます。その収束先を  $a_0 \in \mathcal{N}$  とします。 $T$  は連続なので、 $a_i$  が  $a_0$  に収束するとき  $T(a_i)$  は  $T(a_0)$  に収束します。よって、 $T(a_i) = 0$  から  $T(a_0) = 0$  となり、収束先の  $a_0$  は  $\text{Ker}T$  にいるので、 $\text{Ker}T$  は閉部分空間です。

有限次元ノルム空間で演算子が有界なのは、ノルムの同値を使えば分かります。有限次元ノルム空間  $\mathcal{N}_1$  から任意のノルム空間  $\mathcal{N}_2$  への演算子を  $T$  とし、それぞれのノルムを  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  とします。 $v \in \mathcal{N}_1$  は線形結合によって

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

これとノルムの三角不等式から

$$\|T(v)\|_2 = \left\| T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \right\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|T(v_i)\|_2$$

$|\alpha_i|$  の最大値を  $\lambda$  とすれば

$$\|T(v)\|_2 \leq \lambda \sum_{i=1}^n \|T(v_i)\|_2$$

$\lambda$  は  $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\}$  のことで、最大値ノルムです。これを  $\mathcal{N}_1$  でのノルムとし

$$\|v\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\|_1 = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\}$$

とします。そうすると

$$\|T(v)\|_2 \leq \|v\|_1 \sum_{i=1}^n \|T(v_i)\|_2 = \beta \|v\|_1$$

と書けます。そして、有限次元ノルム空間での任意のノルムは同値なので、 $\mathcal{N}_1$  の任意のノルム  $\|\cdot\|$  とは同値の条件から  $\|v\|_1 \leq \alpha \|v\|$  ( $\alpha > 0$ ) となります。よって

$$\|T(v)\|_2 \leq \alpha \beta \|v\|$$

となり、有限次元ノルム空間から任意のノルム空間への演算子  $T$  は有界です。

ここまではノルム空間のベクトルに演算子を作用させたときのノルムを見てきましたが、演算子そのもののノルムを定義します。つまり、 $\mathcal{N}_1$  から  $\mathcal{N}_2$  への有界演算子によるベクトル空間  $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$  にノルムを定義します。

$T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}_B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$  は、 $\|T(v)\| \leq \alpha \|v\|, \|T_1(v)\| \leq \alpha_1 \|v\|, \|T_2(v)\| \leq \alpha_2 \|v\|$  とします。演算子の和とスカラー倍から

$$\|(T_1 + T_2)(v)\| = \|T_1(v) + T_2(v)\| \leq \|T_1(v)\| + \|T_2(v)\| \leq \alpha_1 \|v\| + \alpha_2 \|v\| = (\alpha_1 + \alpha_2) \|v\|$$

$$\|(\beta T)(v)\| = |\beta| \|T(v)\| \leq \alpha |\beta| \|v\|$$

なので、 $T_1 + T_2, \beta T$  は有界で  $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$  にいることから、 $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$  はベクトル空間です。

$\mathcal{L}_B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$  にノルムを定義します。今は (3) のように、スカラーとして上限と下限があります。これを利用してノルムを

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{\alpha \mid \|T(v)\| \leq \alpha \|v\|\} \\ &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| \end{aligned}$$

と定義します。sup での等号を示しておきます。sup は 2 つの実数の集合  $A, B \subset \mathbb{R}$  があり、 $A \subset B$  ( $A$  は  $B$  の部分集合) であるとき  $\sup A \leq \sup B$  です (簡単に言えば  $\sup B$  は  $A$  の上限を含むから。  $\sup B$  は  $A$  の上界)。このため

$$\sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| \tag{4}$$

一方で、 $\|u\| \leq 1, u' = u/\|u\|$  ( $\|u'\| = 1$ ) としたとき

$$\|T(u)\| \leq \alpha \|u\| \leq \|T(u')\| \leq \sup_{\|u'\|=1} \|T(u')\| \quad (\|T(u')\| \leq \alpha)$$

$\|T(u)\|$  は  $\sup_{\|u'\|=1} \|T(u')\|$  以下なので

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| \leq \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\|$$

(4) とこれから

$$\sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\|$$

となります。

$\frac{\|T(v)\|}{\|v\|}$  は

$$\frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = \|T(v')\| \leq \sup_{\|v'\|=1} \|T(v')\|$$

左辺は  $v \neq 0$  であれば  $v$  は任意なので

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| \tag{5}$$

一方で、 $\|v\| = 1$  としてみると

$$\|T(v)\| = \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \tag{6}$$

これから、 $\|T(v)\|$  ( $\|v\| = 1$ ) は  $\sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}$  より大きくなれないので

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \geq \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\|$$

よって

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \sup_{\|v'\|=1} \|T(v')\|$$

となります。

他にも、(5) と

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}$$

と、 $A \subset B$  であるとき  $\sup A \leq \sup B$  を使うと

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}$$

となり、不等式が一周するために等号となることから分かります。

また、(6) から

$$\|T(v)\| \leq \|T\| \|v\| \tag{7}$$

も分かります。これを使うと、 $\mathcal{N}_1$  から  $\mathcal{N}_2$ 、 $\mathcal{N}_2$  から  $\mathcal{N}_3$  への有界演算子  $S, T$  による合成  $TS$  は

$$\|(TS)(v)\| = \|T(S(v))\| \leq \|T\| \|S(v)\| \leq \|T\| \|S\| \|v\|$$

から有界で、 $\sup_{\|v\|=1}$  を取れば

$$\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$$

となります。

ノルムの定義を満たすことを確かめます。 $\|T\| > 0$  は定義からそのまま分かります。 $\|T\| = 0$  は  $\|T(v)\| = 0$  のことなので、 $\|T\| = 0$  での  $T$  は任意の  $v$  で  $T(v) = 0$  となる演算子として定義されます。

$\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$  は (7) から

$$\|(\alpha T)(v)\| = |\alpha|\|T(v)\| \leq |\alpha|\|T\|\|v\|$$

となることを使えば分かります。これは  $\|\alpha T\| = \sup_{\|v\|=1} \|(\alpha T)(v)\|$  なので、 $\|\alpha T\| \leq |\alpha|\|T\|$  です。そうすると

$$\|T\| = \|\alpha^{-1}(\alpha T)\| \leq |\alpha^{-1}|\|\alpha T\| \leq |\alpha^{-1}|\alpha\|T\| = |\alpha^{-1}\alpha|\|T\| = \|T\|$$

となり、等式になるので、 $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$  から

$$\|T\| = |\alpha|^{-1}\|\alpha T\|$$

$$\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$$

三角不等式は

$$\|(T+S)(v)\| \leq \|T(v)\| + \|S(v)\| \leq \|T\|\|v\| + \|S\|\|v\| = (\|T\| + \|S\|)\|v\|$$

$\|T+S\| = \sup_{\|v\|=1} \|(T+S)(v)\|$  なので、 $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$  として出てきます。

有界演算子の単純な例は

$$I(v) = v$$

となる恒等演算子 (identity operator) です。この両辺のノルムは

$$\|I(v)\| = \|v\|$$

このため  $I$  は有界で、 $\|I(v)\| = \|v\| \leq \alpha\|v\|$  から  $\alpha$  の下限は 1 なので  $\|I\| = 1$  です。

他によく出てくるのが積演算子 (multiplication operator) です。 $L^2$  空間として、積分範囲が  $[\alpha, \beta]$  (実数) の  $L^2$  空間を  $L^2([\alpha, \beta])$  と表記します。 $L^2([\alpha, \beta])$  は

$$\|f\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} dt |f(t)|^2 < \infty$$

となる関数  $f$  によるヒルベルト空間です (ルベグ積分のことは無視します)。 $L^2([\alpha, \beta])$  から  $L^2([\alpha, \beta])$  の演算子  $M$  を

$$(Mf)(t) = \lambda(t)f(t) \quad (Mf = \lambda f, \lambda \in \mathbb{K})$$

として定義したものが積演算子です ( $t$  は小文字のローマ文字ですが実数)。括弧がごちゃごちゃするので、 $M(f)$  を  $Mf \in L^2([\alpha, \beta])$  と表記しています。線形は

$$M(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \lambda f_1 + \lambda_2 \lambda f_2 = \lambda_1 Mf_1 + \lambda_2 Mf_2$$

から分かります。

有界であることを示します。  $Mf$  のノルムは

$$\|Mf\| = \int_{\alpha}^{\beta} dt |\lambda(t)|^2 |f(t)|^2$$

$|\lambda(t)|$  を  $\alpha, \beta$  間で最も大きな値  $\lambda_0$  にすれば

$$\int_{\alpha}^{\beta} dt |\lambda(t)|^2 |f(t)|^2 \leq \lambda_0^2 \int_{\alpha}^{\beta} dt |f(t)|^2 = \lambda_0^2 \|f\|^2$$

となるので、  $M$  は有界です。

有界でない例も出しておきます。 演算子  $D$  を微分演算子

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

とします。 微分演算子は線形です。  $f$  は  $f(x) = \sin nx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とし、  $L^2([-\pi, \pi])$  の関数とします。 実際に、ノルムは

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx |\sin nx|^2 = \pi < \infty$$

となっています。 しかし、  $Df$  は

$$\|Df\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left| \frac{df}{dx}(x) \right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx |n \cos nx|^2 = n^2 \pi$$

となり、  $n = 1, 2, \dots$  なので微分演算子  $D$  は有界ではありません。

ノルム空間  $\mathcal{N}$  とバナッハ空間  $\mathcal{B}$  があり、  $\mathcal{N}$  から  $\mathcal{B}$  への有界演算子による  $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  はバナッハ空間になります。  $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  のコーシー列を  $\{T_i\}$  としたとき、  $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  がバナッハ空間であるなら収束先  $T$  があるので、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = T \quad (T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{B}))$$

が示せればよいです。

$\{T_i\}$  はコーシー列なので  $\epsilon > 0$  と整数  $N > 0$  による  $i, j > N$  によって

$$\|T_i - T_j\| < \epsilon$$

とします。 また、コーシー列は有界な数列なので  $\|T_i\| \leq \lambda$  ( $\lambda > 0$ ) です。 (7) から

$$\|T_i(v) - T_j(v)\| = \|(T_i - T_j)(v)\| \leq \|T_i - T_j\| \|v\| \quad (v \in \mathcal{N})$$

このため、  $\mathcal{B}$  の数列  $\{T_i(v)\}$  はコーシー列です。 バナッハ空間なのでコーシー列  $\{T_i(v)\}$  には収束先があり、それを  $T(v) \in \mathcal{B}$  とし

$$\|T(v) - T_i(v)\| < \epsilon \tag{8}$$

とします。

$T(v)$  は  $T_i(v)$  の収束先というだけで、  $T$  が線形、有界か分からないので確かめます。 線形であることは

$$T(v+w) = \lim_{i \rightarrow \infty} T_i(v+w) = \lim_{i \rightarrow \infty} (T_i(v) + T_i(w)) = T(v) + T(w)$$

$$T(\alpha v) = \lim_{i \rightarrow \infty} T_i(\alpha v) = \alpha \lim_{i \rightarrow \infty} T_i(v) = \alpha T(v)$$

から分かります。 $\{T_i\}$  はコーシー列なので

$$\|T_i(v)\| \leq \|T_i\| \|v\| \leq \lambda \|v\|$$

$\|T(v)\|$  を変形して、三角不等式と  $\{T_i\}$  はコーシー列から

$$\|T_i(v)\| \leq \|T_i\| \|v\| \leq \lambda \|v\|$$

となることを使うと、

$$\begin{aligned} \|T(v)\| &= \|T(v) - T_i(v) + T_i(v)\| \leq \|(T - T_i)(v)\| + \|T_i(v)\| \\ &\leq \|T(v) - T_i(v)\| + \lambda \|v\| \end{aligned}$$

第一項は (8) なので、 $T$  は有界です。というわけで、 $T$  は  $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  にいます。後は  $\{T_i\}$  の収束先が  $T$  であればいいです。

$\|T(v) - T_i(v)\|$  は三角不等式から

$$\|T(v) - T_i(v)\| = \|T(v) - T_j(v) + T_j(v) - T_i(v)\| \leq \|T(v) - T_j(v)\| + \|T_j(v) - T_i(v)\|$$

最右辺の第一項は (8) から  $\epsilon$  より小さく、第二項は

$$\|T_i(v) - T_j(v)\| \leq \|T_i - T_j\| \|v\|$$

から、 $\|v\| \leq 1$  のとき  $\epsilon$  より小さくなります。そうすると、ノルムの定義から

$$\|T - T_i\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v) - T_i(v)\| < 2\epsilon$$

となり、 $\{T_i\}$  は  $T$  に収束します。よって、コーシー列  $\{T_i\}$  は  $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  に収束するので、 $\mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  はバナッハ空間です。

ここからヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  とします。ヒルベルト空間なので内積  $\langle v, w \rangle$  ( $v, w \in \mathcal{H}$ ) が定義されています。複素共役は  $\bar{v}$  と表記し、

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \overline{\langle w, v \rangle} \\ \langle \alpha v_1 + \beta v_2, w \rangle &= \bar{\alpha}_1 \langle v_1, w \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle v_2, w \rangle \end{aligned}$$

複素共役は物理の慣習に従って左側に対して取るようにします。ノルムは内積から

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

と与えます。また、 $\mathcal{H}_1$  から  $\mathcal{H}_2$  への演算子  $T$  を含む  $\langle T(v), w \rangle$  は  $v \in \mathcal{H}_1, T(v), w \in \mathcal{H}_2$  での内積です。内積に関連して有界演算子のノルムが定義できます。まず、

$$|\langle \frac{v}{\|v\|}, v \rangle| = \frac{1}{\|v\|} |\langle v, v \rangle| = \|v\|$$

$\langle v, v \rangle$  は正として定義されているので絶対値はなくても同じですがつけておきます。コーシー・シュワルツの不等式を使うと

$$\|v\| = |\langle \frac{v}{\|v\|}, v \rangle| \leq \|\frac{v}{\|v\|}\| \|v\|$$

$\|v/\|v\|\| = 1$  なので、任意の  $w$  による  $|\langle w, v \rangle|$  において、 $\|w\| = 1$  の上限で  $\|v\|$  になると言えて

$$\|v\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle w, v \rangle|$$

これから演算子のノルムも内積で書けます。今の結果から

$$\|T(v)\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle w, T(v) \rangle|$$

演算子のノルムは  $\|v\| = 1$  の上限なので

$$\|T\| = \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| = \sup_{\|v\|=1} \sup_{\|w\|=1} |\langle w, T(v) \rangle|$$

となります。

$\mathcal{H}$  から  $K$  への演算子を  $F$  とします。 $\mathcal{H}$  から  $K$  への演算子なので線形汎関数のことで、 $\mathcal{H}$  の双対空間  $\mathcal{H}^*$  の元です。このため有界線形汎関数 (bounded linear functional) と呼ばれます。

$F$  を  $\mathcal{H}$  の有界線形汎関数としたとき、 $F(v) = \langle w, v \rangle$  となる  $w \in \mathcal{H}$  が全ての  $v \in \mathcal{H}$  に対して一意に存在します。さらに、 $\|F\| = \|w\|$  となります。これをリースの表現定理 (Riesz representation theorem) と言います。

先に線形と有界であることを確かめます。線形であることは内積の定義からそのまま分かります。 $F(v)$  は  $K$  なのでノルムは絶対値で与えられ、コーシー・シュワルツの不等式によって

$$|F(v)| = |\langle w, v \rangle| \leq \|w\| \|v\|$$

となり、有界です。そして、 $F$  のノルムは

$$\|F\| = \sup_{\|v\|=1} |F(v)|$$

となります。

$w$  が一意に存在することを示します。存在することから見ます。上で示したように、演算子  $F$  によるカーネル  $\text{Ker}F$  は  $\mathcal{H}$  の閉部分空間です。そうすると、これの直交補空間  $(\text{Ker}F)^\perp$  が  $\mathcal{H}$  にあります。 $v \in \mathcal{H}, v_\perp \in (\text{Ker}F)^\perp$  とします。 $v$  を

$$v = v - v_\perp + v_\perp$$

とすれば、正射影定理から  $v - v_\perp$  は  $\text{Ker}F$  にあります。 $\text{Ker}F$  にいるので  $F(v - v_\perp) = 0$  です。そうすると、線形性から



$$\begin{aligned}
0 &= F(v - v_{\perp}) \\
&= F(v) - F(v_{\perp}) \\
F(v) &= F(v_{\perp})
\end{aligned}$$

$\langle v_{\perp}, v - v_{\perp} \rangle = 0$  は

$$\begin{aligned}
0 &= \langle v_{\perp}, v \rangle - \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle \\
\langle v_{\perp}, v \rangle &= \|v_{\perp}\|^2
\end{aligned}$$

ここで、 $v_{\perp}$  を  $\alpha v_{\perp}$  としてみると

$$F(v) = \alpha F(v_{\perp}), \quad \langle v_{\perp}, v \rangle = \alpha \|v_{\perp}\|^2$$

から

$$F(v) = \frac{\langle v_{\perp}, v \rangle}{\|v_{\perp}\|^2} F(v_{\perp}) = \frac{\overline{F(v_{\perp})}}{\|v_{\perp}\|^2} \langle v_{\perp}, v \rangle = \langle w, v \rangle$$

として、 $w$  が存在することが分かります ( $v$  そのものには依存していない)。  
一意性はすぐ分かります。  $F(v) = \langle w', v \rangle = \langle w, v \rangle$  とすると

$$\langle w - w', v \rangle = 0$$

全ての  $v$  でこれは成立するので  $v = w - w'$  とすれば、 $\langle w - w', w - w' \rangle = 0$  から、 $w = w'$  となり一意的に  $w$  は決まります。

$\|F\| = \|w\|$  はすぐ求められます。まず、コーシー・シュワルツの不等式から

$$|F(v)| = |\langle w, v \rangle| \leq \|w\| \|v\|$$

なので、 $\|v\| \leq 1$  のとき

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |F(v)| \leq \|w\|$$

左辺は演算子のノルムの定義なので

$$\|F\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |F(v)| \leq \|w\|$$

一方で

$$\|w\|^2 = |\langle w, w \rangle| = |F(w)| = \|F(w)\| \leq \|F\| \|w\|$$

から  $\|w\| \leq \|F\|$  なので、 $\|F\| = \|w\|$  です。

リースの表現定理を使って、有界演算子の共役を定義します。ヒルベルト空間  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  があり、 $\mathcal{H}_1$  から  $\mathcal{H}_2$  への有界演算子  $T$  を使って内積  $\langle w, T(v) \rangle$  を作り、有界線形汎関数  $F$  によって

$$F(v) = \langle w, T(v) \rangle \quad (v \in \mathcal{H}_1, T(v), w \in \mathcal{H}_2)$$

と与えられるとします。 $\langle w, T(v) \rangle$  が線形なのは内積の定義と  $T$  の線形性からそのまま分かり、コーシー・シュワルツの不等式から

$$|\langle w, T(v) \rangle| \leq \|w\| \|T(v)\| \leq \|w\| \|T\| \|v\|$$

となるので有界と分かります。リースの表現定理が使えるので、全ての  $v$  に対して  $F(v) = F_z(v) = \langle z, v \rangle$  となる  $z \in \mathcal{H}$  が一意にいます。よって

$$\langle w, T(v) \rangle = F_z(v) = \langle z, v \rangle$$

ここで、 $T^*(w) = z$  と定義すれば

$$\langle w, T(v) \rangle = \langle T^*(w), v \rangle \tag{9}$$

と出来ます。 $T^*$  を  $T$  の共役 (adjoint) と言い、共役演算子と呼ばれます。 $T^*$  は  $T$  から一意に決まります。 $T_1^*, T_2^*$  とすれば

$$\langle w, T(v) \rangle = \langle T_1^*(w), v \rangle = \langle T_2^*(w), v \rangle$$

から  $T_1^*(w) = T_2^*(w)$  となり、 $T_1^* = T_2^*$  となるからです。

$T^*$  は有界演算子です。線形は

$$\begin{aligned} \langle T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2), v \rangle &= \langle \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2, T(v) \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle w_1, T(v) \rangle + \overline{\alpha_2} \langle w_2, T(v) \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle T^*(w_1), v \rangle + \overline{\alpha_2} \langle T^*(w_2), v \rangle \\ &= \langle \overline{\alpha_1} T^*(w_1) + \overline{\alpha_2} T^*(w_2), v \rangle \end{aligned}$$

から

$$T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \overline{\alpha_1} T^*(w_1) + \overline{\alpha_2} T^*(w_2)$$

と分かります。コーシー・シュワルツの不等式から、 $\|T^*(w)\| > 0$  として

$$\begin{aligned}
\|T^*(w)\|^2 &= | \langle T^*(w), T^*(w) \rangle | \\
&= | \langle T^*(w), z \rangle | \\
&= | \langle w, T(z) \rangle | \\
&= | \langle w, T(T^*(w)) \rangle | \\
&\leq \|w\| \|T(T^*(w))\| \\
&\leq \|w\| \|T\| \|T^*(w)\| \\
\|T^*(w)\| &\leq \|w\| \|T\|
\end{aligned}$$

となり、有界です。また、 $T$  と  $T^*$  のノルムの関係

$$\|T^*\| \leq \|T\|$$

も分かりますが、次に示すように  $\|T^*\| = \|T\|$  です。  
共役は性質として

- (i)  $T = T^{**}$
- (ii)  $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$
- (iii)  $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
- (iv)  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
- (v)  $\|T\|^2 = \|T^* T\|$
- (vi)  $\|T^*\| = \|T\|$

を持っています。これらを示します。

$T^*$  はヒルベルト空間の演算子なので、 $T^*$  の共役も与えられて、それを  $T^{**} = (T^*)^*$  とします。これは、(9) で  $T$  を  $T^*$ 、 $T^*$  を  $T^{**}$  と見なせばいいので

$$\langle v, T^*(w) \rangle = \langle T^{**}(v), w \rangle$$

そして、内積の定義から

$$\langle T(v), w \rangle = \overline{\langle w, T(v) \rangle} = \overline{\langle T^*(w), v \rangle} = \langle v, T^*(w) \rangle$$

なので

$$\langle T(v), w \rangle = \langle T^{**}(v), w \rangle$$

から、 $T = T^{**}$  です。  
 $T_1 T_2$  は

$$\langle w, (T_1 T_2)(v) \rangle = \langle (T_1 T_2)^*(w), v \rangle$$

これは

$$\langle w, (T_1 T_2)(v) \rangle = \langle w, T_1(T_2(v)) \rangle = \langle T_1^*(w), T_2(v) \rangle = \langle T_2^*(T_1^*(w)), v \rangle = \langle (T_2^* T_1^*)(w), v \rangle$$

のことなので

$$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$$

となります。

$(T_1 + T_2)^*$  と  $(\alpha T)^*$  は

$$\begin{aligned} \langle (T_1 + T_2)^*(w), v \rangle &= \langle w, (T_1 + T_2)(v) \rangle = \langle w, T_1(v) \rangle + \langle w, T_2(v) \rangle \\ &= \langle T_1^*(w), v \rangle + \langle T_2^*(w), v \rangle \\ &= \langle T_1^*(w) + T_2^*(w), v \rangle \end{aligned}$$

と

$$\langle (\alpha T)^*(w), v \rangle = \langle w, (\alpha T)(v) \rangle = \alpha \langle w, T(v) \rangle = \alpha \langle T^*(w), v \rangle = \langle \bar{\alpha} T^*(w), v \rangle$$

から

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)^* &= T_1^* + T_2^* \\ (\alpha T)^* &= \bar{\alpha} T^* \end{aligned}$$

となります。

コーシー・シュワルツの不等式から

$$\|T(v)\|^2 = |\langle T(v), T(v) \rangle| = |\langle T^*(T(v)), v \rangle| \leq \|T^*(T(v))\| \|v\| \leq \|T^* T\| \|v\| \|v\|$$

$\|v\| = 1$  の sup を取って  $T$  のノルムにすれば

$$\|T\|^2 \leq \|T^* T\|$$

そして

$$\|T^* T\| \leq \|T^*\| \|T\|$$

に  $\|T\| = \|T^*\|$  を使えば  $\|T^* T\| \leq \|T\|^2$  なので、 $\|T\|^2 = \|T^* T\|$  です。

$\|T^*\| \leq \|T\|$  で、一方では  $T = T^{**}$  から

$$\|T\| = \|T^{**}\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$$

なので、 $\|T^*\| = \|T\|$  です。

共役と関係する演算子を定義していきます。

$T$  の共役演算子  $T^*$  が  $T = T^*$  のとき、 $T^*$  は自己共役 (self adjoint) と呼ばれます。このときは

$$\langle w, T(v) \rangle = \langle T(w), v \rangle$$

となります。内積の対称性から

$$\langle v, T(v) \rangle = \langle T(v), v \rangle = \overline{\langle v, T(v) \rangle}$$

なので、自己共役演算子では  $\langle v, T(v) \rangle$  は実数です。

共役と交換する有界演算子のことを正規演算子 (normal operator) と言います ( $TT^* = T^*T$ )。自己共役演算子  $T = T^*$  は正規演算子です。

線形で、ノルムが

$$\|T(v)\| = \|v\|$$

となる演算子  $T$  を等長写像 (isometry) と言います。等長写像はノルムを変えない変換になっています ( $v$  と変換後の  $T(v)$  でノルムが等しい)。定義から、 $T(v) = 0$  なら  $v = 0$  なので、単射です。 $T$  のノルムは  $\|T\| = 1$  なので、有界です。

等長写像のとき  $T^*T = I$  ( $I$  は恒等演算子) です。これは

$$\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = \|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle T^*(T(v)), v \rangle = \langle (T^*T)(v), v \rangle$$

から分かります。逆も言えて、 $T^*T = I$  となる有界演算子では

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle (T^*T)(v), v \rangle = \langle v, v \rangle$$

となるので、 $T$  は等長写像です。等長写像は

$$\langle T(v_1), T(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

として、内積を変えないと定義することも出来ます。実際に、ノルムは

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

と与えられます。

全単射な等長写像をユニタリー演算子 (unitary operator) と言います。等長写像は単射なので全射であることが要求されます (等長演算子の定義域と値域  $\{T(v) \mid v \in \mathcal{H}\}$  がヒルベルト空間全体になる)。なので、言い換えれば、逆  $T^{-1}$  がある等長写像がユニタリー演算子です。ユニタリー演算子では  $I = T^*T = T^{-1}T$  なので、 $T^* = T^{-1}$  をユニタリー演算子の定義とできます。

全単射の写像は同型写像 (isomorphism) なので、ユニタリー演算子は、isometric isomorphism と呼ばれ、ユニタリー演算子によって関連する内積空間  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  は同型 (isomorphic) と呼ばれます。

$\mathcal{H}$  から  $\mathcal{H}$  への有界演算子  $P$  が自己共役  $P^* = P$  で、冪等 (Idempotent)  $P^2 = PP = P$  であるとき、正射影や直交射影 (orthogonal projection) と呼びます。すぐ分かるように

$$\langle v, P(v) \rangle = \langle v, (PP)(v) \rangle = \langle P^*(v), P(v) \rangle = \langle P(v), P(v) \rangle = \|P(v)\|^2$$

となります。

$P$  は  $\mathcal{H}$  の閉部分空間 ( $P$  の値域) への正射影と言えます。これを見ておきます。

まず、 $P(v)$  ( $v \in \mathcal{H}$ ) がヒルベルト空間の閉部分空間になることから示します。 $\mathcal{H}$  の部分空間  $\mathcal{X}$  の数列  $\{a_i\}$  の収束先を  $a_0 \in \mathcal{H}$  とします。 $P(v) = w$  ( $w \in \mathcal{H}$ ) は冪等性から

$$P(P(v)) = P(w)$$

$$P(v) = P(w)$$

$$w = P(w)$$

となっているので、 $P(a_i) = a_i$  です。そして、 $P$  は連続なので極限として  $P(a_0) = a_0$  が言えます。よって、 $\{a_i\}$  の収束先は  $a_0 = P(a_0) \in \mathcal{X}$  なので  $\mathcal{X}$  は閉部分空間です。

$w - P(w)$  と  $x \in \mathcal{X}$  との内積を取ってみると

$$\langle w - P(w), x \rangle = \langle w, x \rangle - \langle P(w), x \rangle = \langle w, x \rangle - \langle w, x \rangle = 0$$

となり、直交していることが分かり、 $w - P(w)$  は直交補空間  $\mathcal{X}^\perp$  にいます。ここで、正射影定理を持ち込みます。 $\mathcal{H}$  の閉部分空間  $S$  とその直交補空間  $S^\perp$  があり、 $s \in S$ ,  $s_\perp \in S^\perp$  としたとき、 $v \in \mathcal{H}$  は

$$v = s + s_\perp \quad (\langle s, s_\perp \rangle = 0)$$

と一意に書けます。これを今の結果に当てはめれば、 $v$  は  $w$ 、 $x$  は  $s$ 、 $w - P(w)$  は  $s_\perp$  なので

$$w = x + w - P(w) \quad (w - P(w) = (I - P)(w) \in \mathcal{X}^\perp, I(w) = w)$$

から、 $P(w) = x$  です。つまり、 $P$  は  $w \in \mathcal{H}$  を  $x \in \mathcal{X}$  にします。このことから、 $P$  は閉部分空間  $\mathcal{X}$  上への正射影と言えます。また、 $P(v) = P(x) + P(y) = x$  ( $v = x + y$ ,  $y \in \mathcal{X}^\perp$ ) です。

$P(v)$  は閉部分空間にいるので、閉部分空間の正規直交基底を  $\{e_i\}_{i=1}^n$  としたとき

$$P(v) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, P(v) \rangle e_i$$

と書けて、 $P$  は自己共役なので

$$P(v) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, P(v) \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle P(e_i), v \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle e_i, v \rangle e_i$$

となります。 $e_i$  は閉部分空間の基底なので  $P(e_i) = e_i$  です。完全正規直交系とすれば  $n$  は無限大まで取れます。

$P$  を  $\mathcal{X}$  上への正射影  $P(v) = x$  としたとき、線形、有界になっていることも示しておきます。 $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$  を  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ ,  $y_1, y_2 \in \mathcal{X}^\perp$  によって

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(x_1 + y_1) + \alpha_2(x_2 + y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

とすれば

$$P(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 P(v_1) + \alpha_2 P(v_2)$$

となるので、線形です。 $P(v) = x$ ,  $v = x + y$  ( $v, w \in \mathcal{H}$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $y \in \mathcal{X}^\perp$ ) に三平方の定理

$$\|v\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

を使えば

$$\|P(v)\|^2 = \|x\|^2 = \|v\|^2 - \|y\|^2 \leq \|v\|^2$$

となるので、有界です。

最後に  $C^*$  代数の定義を簡単に与えておきます。ここで言う代数 (algebra) は、大雑把には、積が与えられたベクトル空間の意味です。

有界演算子によるバナッハ空間  $\mathcal{L}_B(\mathcal{B})$  は代数を作ります。つまり、 $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{L}_B(\mathcal{B})$  において、 $T_1 T_2$  のノルムは  $\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$  を満たし、積として

$$(T_1 + T_2)T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3, \quad T_1(T_2 + T_3) = T_1 T_2 + T_1 T_3$$

$$(T_1 T_2)T_3 = T_1(T_2 T_3), \quad \alpha(T_1 T_2) = (\alpha T_1)T_2 = T_1(\alpha T_2)$$

が与えられることで、ノルム空間の代数になります。そして、 $\mathcal{L}_B(\mathcal{B})$  はバナッハ空間なので、 $\mathcal{L}_B(\mathcal{B})$  はバナッハ代数と呼ばれます。

共役の性質 (i) から (iv) を持つ写像としての「\*」を対合 (involution) と言います。(v) を満たす対合を持つバナッハ代数 (恒等演算子を含む) を  $C^*$  代数と呼びます。

・補足

定義と求められた結果を簡単にまとめています。

$\mathcal{N}$  はノルム空間、 $\mathcal{B}$  はバナッハ空間、 $\mathcal{H}$  はヒルベルト空間、 $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  は  $\mathcal{N}$  から  $\mathcal{B}$  への有界演算子の集合、 $S, T$  は演算子、 $I$  は恒等演算子、 $v, w$  はベクトル。

定義

- 有界演算子  $\|T(v)\| \leq \alpha \|v\|$  ( $\alpha > 0$ )。

- 有界演算子のノルム

$$\|T\| = \inf\{\alpha \mid \|T(v)\| \leq \alpha \|v\|\} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\|$$

- 共役演算子  $T^*$ ,  $\langle w, T(v) \rangle = \langle T^*(w), v \rangle$ 。
- 自己共役演算子  $T = T^*$ 。
- 正規演算子  $TT^* = T^*T$ 。
- 等長写像  $\|T(v)\| = \|v\|$ ,  $T^*T = I$ 。
- ユニタリー演算子  $T^* = T^{-1}$ 。
- 正射影演算子  $T = T^*$ ,  $T^2 = T$ 。

定理

- 有界なら連続、連続なら有界。
- 有界演算子  $T$  のカーネル  $\text{Ker}T = \{v \in \mathcal{N} \mid T(v) = 0\}$  は閉部分空間。
- 有限次元ノルム空間の演算子は有界。
- $\|T(v)\| \leq \|T\| \|v\|$ ,  $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$
- $\mathcal{L}_B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  はバナッハ空間。

ヒルベルト空間

- 有界演算子のノルム

$$\|T\| = \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| = \sup_{\|v\|=1} \sup_{\|w\|=1} |\langle w, T(v) \rangle|$$

- リースの表現定理

$F$  を有界線形汎関数として、 $F(v) = \langle w, v \rangle$  となる  $w \in \mathcal{H}$  が全ての  $v \in \mathcal{H}$  に対して一意的に存在する。そして、 $\|F\| = \|w\|$ 。

- 共役

- $T = T^{**}$
- $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$
- $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
- $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
- $\|T\|^2 = \|T^* T\|$
- $\|T^*\| = \|T\|$