ヒルベルト空間

ヒルベルト空間の話の最初の方に出てくる内容を大まかに見ていきます。有限次元内積空間がヒルベルト空間であること、正射影定理、完全正規直交系を扱っています。最後に l^2 空間が可分なヒルベルト空間であることを示しています。
線形結合による集合には span でなく $\mathcal{S}$ を使っています。
数列は $\{a_i\}_{i=1}^k$ と表記して、ノルム (距離) が定義されていても面倒なので数列で揃えます。また、無限数列では添え字を省いて $\{a_i\}$ と表記しています。
下の補足に結果を簡単にまとめています。

最初にノルムと内積の定義をしておきます。ベクトルを v, w, w_1, w_2、$\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ として (K は実数 R か複素数 C)、ノルム $\| \ \|$ は

- $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
- $\|v\| = 0 \quad (v = 0)$

内積 $<, >$ は

- $< v, v > \geq 0$
- $< v, v >= 0 \quad (v = 0)$
- $< v, \alpha w_1 + \beta w_2 >= \alpha < v, w_1 > + \beta < v, w_2 >$
- $< v, w >=< w, v >^*$

を満たすものとして定義します。「$*$」は複素共役で、内積の左側で複素共役を取ります ($< \alpha v, w >= \alpha^* < v, w >$)。
ノルム空間 $\mathcal{N}$ での数列 $\{a_i\}$ は、$\epsilon > 0$ と正の整数 $n_0 > 0$ があり、$k > n_0$ のとき

$$\|a_k - a_0\| < \epsilon \quad (a_0 \in \mathcal{N})$$

となっているなら、$k \to \infty$ で x に収束すると定義されます。$k, m > n_0$ に対して

$$\|a_k - a_m\| < \epsilon$$

となっているなら $\{a_i\}$ はコーシー列と定義されます。
ノルム空間のコーシー列が収束しているなら、ノルム空間は完備 (complete) と言われます。完備なノルム空間はバナッハ空間 (Banach space)、完備な内積空間をヒルベルト空間 (Hilbert space) と言います。細かく言えば、ヒルベルト空間でのノルムは内積から定義されます (norm associated with inner product)。
有限次元内積空間がヒルベルト空間であることを示していきます。そのためには、有限次元ノルム空間が完備と示せればいいです。有限次元ノルム空間が完備であれば、内積を定義することでヒルベルト空間になるので、有限次元内積空間はヒルベルト空間となります。
用語の準備をしていきます。ノルム空間 $\mathcal{N}$ において、2 つのノルム $\| \ \|_1, \| \ \|_2$ が同値 (equivalent) と言ったときは、$\| \ \|_2$ において $\mathcal{N}$ の数列 $\{a_i\}$ が $a_0 \in \mathcal{N}$ に収束するなら、$\| \ \|_1$ で $\{a_i\}$ が a_0 に収束することです。これは別の言い方が出来ます。
$\| \ \|_2$ で $\{a_i\}$ は a_0 に収束していることは、$\|a_k - a_0\|_2 < \alpha\epsilon$ ($\epsilon, \alpha > 0$) です。ここで、それぞれのノルムの間で

$$\alpha \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \quad (v \in \mathcal{N})$$

が成立しているなら

$$\|a_k - a_0\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|a_k - a_0\|_2 < \epsilon$$

となり、$\| \ \|_1$ で a_k は a_0 に収束します。同様に、$\| \ \|_1$ で $\{a_i\}$ は a_0 に収束しているとし、$\|a_i - a\|_1 < \epsilon/\beta \ (\epsilon, \beta > 0)$ として

$$\|v\|_2 \leq \beta \|v\|_1$$

が成立しているとすれば

$$\|a_k - a_0\|_2 \leq \beta \|a_k - a\|_1 < \epsilon$$

となり、$\| \ \|_2$ で a_k は a_0 に収束します。

というわけで、2 つのノルムが

$$\alpha \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \beta \|v\|_1 \qquad (\alpha, \beta > 0, \ v \in \mathcal{N}) \tag{1}$$

であるなら同値です。また、これは

$$\frac{1}{\beta} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \ , \ \|v\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|_2$$

から

$$\frac{1}{\beta} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|_2$$

と出来ます。

異なる 2 つのノルム $\| \ \|_2 , \| \ \|_3$ それぞれが別のノルム $\| \ \|_1$ と同値なら、$\| \ \|_2$ と $\| \ \|_3$ は同値です。実際に、$\| \ \|_2 , \| \ \|_3$ が $\| \ \|_1$ と同値であることは

$$\alpha_1 \|v_2\| \leq \|v_1\| \leq \beta_1 \|v_2\| \ , \ \alpha_2 \|v\|_1 \leq \|v\|_3 \leq \beta_2 \|v\|_1$$

なので

$$\alpha_1 \alpha_2 \|v_2\| \leq \|v\|_3 \leq \beta_1 \beta_2 \|v_2\|$$

となり、$\| \ \|_2$ と $\| \ \|_3$ は同値です。

このことを使うと、有限次元では任意の 2 つのノルムは同値と分かります。これを示すために、$\| \ \|$ を任意のノルム、$\| \ \|_1$ を具体的に与えたノルムとします。具体的に与えたノルムが任意のノルムと同値であれば、任意の 2 つのノルムは同値と言えます (具体的なノルムが任意のノルムと同値なら、2 つの異なる任意のノルムそれぞれと具体的なノルムは同値なので、2 つの任意のノルムも同値)。

n 次元ノルム空間 $\mathcal{N}$ として、基底を $e_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ とします（n 次元ベクトル空間では定義から基底が存在する)。$\mathcal{N}$ の任意のベクトル v は基底によって

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \qquad (\lambda_i \in \mathrm{K})$$

と展開されます。この係数からノルムとして

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

を具体的に与えます。$v = 0$ で $\|v\|_1 = 0$ は基底は線形独立なので $\lambda_i = 0$ のとき $v = 0$ から、スカラー倍は $|\rho\lambda_i| = |\rho||\lambda_i|$ から、三角不等式は絶対値の三角不等式から分かります。

任意のノルムを三角不等式から

$$\|v\| = \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|e_i\|$$

$\|e_i\|$ の中で最も大きなものを $\beta > 0$ とすれば

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|e_i\| \leq \beta \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \beta \|v\|_1$$

よって

$$\|v\| \leq \beta \|v\|_1$$

これで同値であるための不等式 (1) の片方が導けました。

もう一つの不等式を導くには必要な知識がありますが面倒なので、結果だけ使います。まず、関数 f を

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

とします。これのノルムを取れば有限なので (右辺は v)、関数 f は有界です。このことから

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \|f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\|$$

としたとき、$\alpha \leq g(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ $(\Sigma|\rho_i|^2 = 1)$ となる α がいます (証明は省きます)。e_i が基底なので $\alpha = 0$ と出来ないことから (基底は線形独立なので線形結合が 0 になるのは $\rho_i = 0$ のとき)、$\alpha > 0$ です。つまり

$$0 < \alpha \leq \left\|\sum_{i=1}^n \rho_i e_i\right\| \quad (\sum_{i=1}^n |\rho_i| = 1)$$

これは

$$\alpha \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| \quad (\sum_{i=1}^n |\lambda_i| > 0)$$

の特別な場合です。そうすると

$$\alpha \|v\|_1 = \alpha \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| = \|v\|$$

よって

$$\alpha \|v\|_1 \leq \|v\| \leq \beta \|v\|_1$$

から、$\| \ \|_1$ は任意のノルムと同値となります。

有限次元では任意のノルムは同値であることから、完備を示せます。ノルムの同値の定義は、2 つのノルムがあったとき、片方のノルムで $\{a_i\}$ が収束していればもう片方のノルムでも収束するというものです。このことは、収束する数列はコーシー列なので、$\{a_i\}$ が片方のノルムでコーシー列であれば、もう片方でもコーシー列とも言えます (直接示すなら同値の話をコーシー列で行えばいい)。そうすると、同値であることは、片方のノルムでコーシー列が収束し完備であるなら、もう片方でも完備となります。よって、有限次元では任意のノルムが同値なので、適当なノルムで完備なら、有限次元ノルム空間はノルムの選択に関係なく完備です。

というわけで、有限次元において適当なノルムを使って完備であることを見ます。基底を $\{e_i\}_{i=1}^n$ とし、ノルムは

$$\|v\| = (\sum_{i=1}^n |\rho_i|^2)^{1/2} \quad (v = \sum_{i=1}^n \rho_i e_i)$$

とします。このノルムによってコーシー列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ は、j, k を正の整数 $n_0 > 0$ に対して $j, k > n_0$ として

$$\|a_j - a_k\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(k)}|^2 < \epsilon^2 \quad (a_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(j)} e_i)$$

これは

$$|\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(k)}|^2 < \epsilon^2$$

の意味にもなっているので、$\{\lambda_i^{(j)}\}_{j=1}^n$ はコーシー列です。$\lambda_i^{(j)}$ は実数か複素数ですが、実数はその連続性から完備で、実数が完備であることから複素数も完備です。なので、$\lambda_i^{(j)}$ は収束し、その収束先を λ_i とします。正の整数 $N_i > 0$ に対して $m > N_i$ として

$$|\lambda_i^{(m)} - \lambda_i|^2 < \frac{\epsilon^2}{n}$$

a を $a = \Sigma\lambda_i e_i$ とし、N_0 を N_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の中で最も大きいとします。そうすると、$m > N_0$ に対して

$$\|a_m - a\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{(m)} - \lambda_i|^2 < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon^2}{n} = \epsilon^2$$

となり、コーシー列が収束するので、このノルムにおいて完備です。よって、任意のノルムによる有限次元ノルム空間は完備です。というわけで、内積を定義した有限次元内積空間はヒルベルト空間となります。このため、有限次元内積空間である n 次元ユークリッド空間はヒルベルト空間です。

ここから内積空間での話に移ります。ただし、ノルムを内積から $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ と与えた内積空間とします。使うことになる内積空間での関係を先に出しておきます。

内積空間を $\mathcal{P}$ とし、$v, w \in \mathcal{P}$ とします。$v + w$ のノルムの 2 乗を内積に変えていくと

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 = < v + w, v + w > &= \ < v, v > + < w, w > + < x, y > + < y, x > \\ &= \ \|v\|^2 + \|w\|^2 + < x, y > + < y, x >\end{aligned}$$

$v - w$ では

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - < x, y > - < y, x >$$

2 つを足すと

$$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2(\|v\|^2+\|w\|^2) \tag{2}$$

これを中線定理 (parallelogram law) と言います。中線定理は内積から与えられているノルムのときに成立するもので、一般的には成立しません。

収束する数列の内積の極限を求めます。内積空間の数列 $\{a_i\},\{b_i\}$ の収束先を a_0,b_0 とします。それぞれの内積の差の絶対値は

$$\begin{aligned}|<a_i,b_i>-<a_0,b_0>| &= |<a_i,b_i>-<a_i,b_0>+<a_i,b_0>-<a_0,b_0>| \\ &\leq |<a_i,b_i>-<a_i,b_0>|+|<a_i,b_0>-<a_0,b_0>| \\ &= |<a_i,b_i-b_0>|+|<a_i-a_0,b_0>|\end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式

$$|<v,w>|\leq\|v\|\,\|w\|$$

から

$$|<a_i,b_i-b_0>|+|<a_i-a_0,b_0>|\leq\|a_i\|\,\|b_i-b_0\|+\|a_i-a_0\|\,\|b_0\|$$

そして、$\{a_i\},\{b_i\}$ は収束するので、$i\to\infty$ の極限を取った時

$$\lim_{i\to\infty}|<a_i,b_i>-<a_0,b_0>|\leq\lim_{i\to\infty}(\|a_i\|\,\|b_i-b_0\|+\|a_i-a_0\|\,\|b_0\|)=0$$

よって、a_0,b_0 に収束する数列 $\{a_i\},\{b_i\}$ の内積の極限は

$$\lim_{i\to\infty}<a_i,b_i>=<a_0,b_0> \tag{3}$$

となります。

正規直交系 $\{v_i\}_{i=1}^k$ は内積から、クロネッカーデルタ δ_{ij} を使うことで

$$<v_i,v_j>=\delta_{ij}$$

と定義されます。直交している v,w $(<v,w>=<w,v>=0)$ による $v+w$ では

$$\|v+w\|^2=<v+w,v+w>=\|v\|^2+\|w\|^2+<v,w>+<w,v>=\|v\|^2+\|w\|^2 \tag{4}$$

これは三平方の定理 (ピタゴラスの定理) です。

n 次元内積空間での正規直交基底を $\{e_i\}_{i=1}^n$ とします。このとき、ベクトル v は

$$v=\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i=\sum_{i=1}^n<e_i,v>e_i \quad (\alpha_i\in\mathrm{K})$$

ノルムは

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2 &= <\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} <\alpha_i e_i, \alpha_j e_j> \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^*\alpha_j <e_i, e_j> \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^*\alpha_j\delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となります。

$v - \Sigma\alpha_i e_i$ のノルムを変形していくと

$$
\begin{aligned}
\left\|v - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2 &= <v - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, v - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i> \\
&= \|v\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2 - <v, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i> - <\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, v> \\
&= \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i <v, e_i> - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* <e_i, v> \\
&= \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\alpha_i^* - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*\alpha_i \\
&= \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 \\
\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 &= \|v\|^2 - \left\|v - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2 \\
\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 &\leq \|v\|^2 \\
\sum_{i=1}^{n}|<e_i, v>|^2 &\leq \|v\|^2 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

最後の不等式をベッセル (Bessel) の不等式と言います。

内積空間 $\mathcal{P}$ とその部分集合 $\mathcal{X}$ を用意します。$v \in \mathcal{P},\ x \in \mathcal{X}$ として、

$$
<x, v> = 0
$$

となる v の集まりを $\mathcal{X}$ の直交補空間 (orthogonal complement) と言い、$\mathcal{X}^\perp$ と表記します。数学記号で書けば

$$
\mathcal{X}^\perp = \{v \in \mathcal{P}|\ <x, v> = 0,\ x \in \mathcal{X}\}
$$

となります。名前の通り $\mathcal{X}^\perp$ の元は $\mathcal{X}$ の元と直交します。このとき $\alpha v + \beta w$ $(v, w \in \mathcal{X}^\perp,\ \alpha, \beta \in \mathrm{K})$ は

$$< x, \alpha v + \beta w >= \alpha < x, v > + \beta < x, w >= 0$$

から、$\alpha v + \beta w \in \mathcal{X}^\perp$ です。よって、$\mathcal{X}^\perp$ はこの和とスカラー倍によってベクトル空間なので、内積空間 $\mathcal{P}$ の部分空間です。また、$\{a_i\}$ を $\mathcal{X}^\perp$ の数列とし、$a_0 \in \mathcal{P}$ に収束するとしたとき

$$\lim_{i\to\infty} < a_0 - a_i, x >=< a_0, x > - \lim_{i\to\infty} < a_i, x >=< a_0, x > \qquad (< a_i, x >= 0,\ a_i \in \mathcal{X}^\perp)$$

数列の内積の極限 (3) から左辺は 0 なので $< a_0, x >= 0$ となり、$a_0 \in \mathcal{X}^\perp$ と分かります。このように部分空間の数列の収束先が同じ部分空間にいるなら、閉部分空間 (closed subspace) と呼ばれ、$\mathcal{X}^\perp$ は $\mathcal{P}$ の閉部分空間です。

そして、バナッハ空間の閉部分空間はバナッハ空間です。これは単純で、バナッハ空間 $\mathcal{B}$ の閉部分空間を $\mathcal{F}$ とし、$\mathcal{F}$ のコーシー列を $\{c_i\}$ とします。$\{c_i\}$ は $\mathcal{B}$ のコーシー列でもあるので $\{c_i\}$ は収束し、閉部分空間なので収束先は $\mathcal{F}$ にいます。よって、$\mathcal{F}$ のコーシ列の収束先が同じ $\mathcal{F}$ にいるので、$\mathcal{F}$ はバナッハ空間です。同様に、ヒルベルト空間の閉部分空間はヒルベルト空間です。

閉部分空間を使って、正射影定理を求めます。ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$、その閉部分空間を $\mathcal{X}$ とします。このとき、$v \in \mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{i\to\infty} \|v - a_i\|^2 = \alpha^2$$

となる数列 $\{a_i\}$ が $\mathcal{X}$ にいるとします。この α は任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して

$$\alpha^2 \leq \|v - x\|^2$$

という制限を与えているとします。中線定理 (2) から

$$\begin{aligned}\|a_i - a_j\|^2 = \|(a_i - v) - (a_j - v)\|^2 &= 2\|a_i - v\|^2 + 2\|a_j - v\|^2 - \|(a_i - v) + (a_j - v)\|^2 \\ &= 2\|a_i - v\|^2 + 2\|a_j - v\|^2 - 4\|v - \frac{1}{2}(a_i + a_j)\|^2\end{aligned}$$

第三項は $(a_i + a_j)/2 \in \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ はベクトル空間だから) なので制限から

$$2\|a_i - v\|^2 + 2\|a_j - v\|^2 - 4\|v - \frac{1}{2}(a_i - a_j)\|^2 \leq 2\|a_i - v\|^2 + 2\|a_j - v\|^2 - 4\alpha^2$$

第一項と第二項は

$$\lim_{i\to\infty} \|a_i - v\|^2 = \alpha^2\ ,\ \lim_{j\to\infty} \|a_j - v\|^2 = \alpha^2$$

なので

$$\lim_{i,j\to\infty} \|a_i - a_j\|^2 \leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0$$

よって、$\{a_i\}$ はコーシー列です。ヒルベルト空間の閉部分空間 $\mathcal{X}$ でのコーシー列なので、$\{a_i\}$ は収束先を $\mathcal{X}$ に持ちます (完備だから収束し、閉部分空間だから収束先は同じ)。このことから、収束先を $a_0 \in \mathcal{X}$ としたとき

$$\|v - a_0\|^2 = \alpha^2$$

つまり、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間を $\mathcal{X}$ としたとき、$v \in \mathcal{H}$ に対して

$$\|v - a_0\|^2 = \alpha^2 \tag{7}$$

となる $a_0 \in \mathcal{X}$ が存在します。α^2 を数学的に書くなら下限 inf を使って

$$\|v - a_0\| = \inf_{x \in \mathcal{X}} \|v - x\|$$

となります。a_0 を v の正射影 (orthogonal projection) と呼びます。示しませんが、これはユークリッド空間のベクトルの話で出てくる正射影を一般化したものです。

a_0 は一意的に決まります。(7) を満たす別の a'_0 を用意し、a_0 との差に今の結果を使うと

$$\|a_0 - a'_0\|^2 = 2\,\|a_0 - v\|^2 + 2\,\|a'_0 - v\|^2 - 4\|v - \frac{1}{2}(a_0 - a'_0)\|^2$$

a_0, a'_0 は (7) を満たしているので

$$2\,\|a_0 - v\|^2 + 2\,\|a'_0 - v\|^2 - 4\|v - \frac{1}{2}(a_0 - a'_0)\|^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0$$

よって、$a_0 = a'_0$ となり一意的に決まります。

このように閉部分空間 $\mathcal{X}$ において、下限となる a_0 がいることから、任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して $\|v - a_0\| \leq \|v - x\|$ となります。そうすると、$y = v - a_0$ とすれば

$$\|y\| \leq \|v - (a_0 + x)\| = \|y - x\| \qquad (a_0 + x \in \mathcal{X})$$

このとき、y は直交補空間 $\mathcal{X}^\perp$ にいます。実際に、$y \in \mathcal{X}^\perp$ なら

$$\|y - x\|^2 = < y - x, y - x > = \|y\|^2 + \|x\|^2 - < x, y > - < y, x > = \|y\|^2 + \|x\|^2 \geq \|y\|^2$$

となります ($\|y - x\|^2 \geq \|y\|^2$ なら $y \in \mathcal{X}^\perp$ も示せる)。

このことから、$v = a_0 + y$ は $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}^\perp$ での和です。この a_0, y は一意的に決まります。$v = a_0 + y$ と $v = a'_0 + y'$ としたとき

$$a_0 + y = a'_0 + y'$$
$$a_0 - a'_0 = y' - y$$

a_0, a'_0 は $\mathcal{X}$、y, y' は $\mathcal{X}^\perp$ にいて、それらが等号になるのは $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$ の元の場合です。しかし、内積と直交の定義からそれは 0 なので ($x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$ なら x に直交するのは x なので $< x, x >= 0$)、$a_0 = a'_0, y = y'$ です。よって、一意的に決まります。

このようにヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のベクトルが閉部分空間 $\mathcal{X}, \mathcal{X}^\perp$ のベクトルの和で書けることを正射影定理 (projection theorem) と言います。また、ヒルベルト空間がその閉部分空間の分解されていることから、直和によって

$$\mathcal{H} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^\perp$$

と表記し、これを $\mathcal{H}$ の直交分解 (orthogonal decomposition) と言います。

完全正規直交系の話に移ります。これは無限次元ヒルベルト空間での話として出てきます。

後で出てくるので稠密 (ちゅうみつ) と可分の定義を先にしておきます。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ (ノルム空間で定義できる) とその部分集合 $\mathcal{M}$ があり、$v\in\mathcal{H}$ に対して $\|v-x\|<\epsilon$ となる $x\in\mathcal{M}$ があるとき、$\mathcal{M}$ は稠密 (dense) と呼ばれます。$\mathcal{M}$ の数列 $\{a_i\}$ を使って言えば、

$$\lim_{i\to\infty} a_i = v$$

なら、稠密です。$\mathcal{H}$ において $\mathcal{M}$ が稠密であることは、$\mathcal{M}$ の元は $\mathcal{H}$ の元に任意に近づけられるということです。可算個 (有限個か数えられる無限個) の稠密な部分集合を含んでいるときを、可分 (separable) と言います。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間を $\mathcal{D}$ とし、それの直交補空間を $\mathcal{D}^\perp$ とします。$\mathcal{D}$ は稠密で、$\mathcal{D}^\perp$ は $\mathcal{H}$ の部分空間なので、$x_k\in\mathcal{D},\ x\in\mathcal{D}^\perp$ としたとき、x は x_k の極限と出来ます。そうすると、$<x_k,x>=0$ の極限は

$$0=\lim_{k\to\infty}<x_k,x>=<x,x>$$

となるので、$x=0$ です。よって、$\mathcal{D}$ が稠密なら $\mathcal{D}^\perp=\{0\}$ が言えます (逆も言える)。これは後で使います。

有限次元ヒルベルト空間 (内積空間) では正規直交基底 $e_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ があり、それによって任意のベクトルは

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

と書けます。ここで知りたいのは無限次元ヒルベルト空間において、これに対応するものをどう与えるかです。そのまま無限次元にすれば

$$v=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i \tag{8}$$

となりますが、無限級数なので収束するのかという問題が起きます。なので、収束性を見ます。

$\{e_i\}$ を無限個による正規直交系としたとき、もし

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty \tag{9}$$

であれば、(8) は収束します。これを示します。無限級数の部分和を

$$f_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i e_i$$

と与え、この部分和による数列 $\{f_k\}$ を作ります。$m>l$ として、有限個の和なので (5) から

$$\|f_m-f_l\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i e_i\right\|^2=\left\|\sum_{i=l+1}^{m}\alpha_i e_i\right\|^2=\sum_{i=l+1}^{m}|\alpha_i|^2$$

$l<m$ としても同様です。$l+1$ から m までの和なので、

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$$

として発散していないなら、最右辺は l, m の無限大の極限で 0 に収束します。なので、(9) のとき $\{f_k\}$ はヒルベルト空間のコーシー列で、$\{f_k\}$ はどこかに収束します。よって、無限級数 (8) は収束します。

というわけで、(9) なら (8) は収束します。また、収束していることから

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right\|^2 = \lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i e_i\right\|^2 = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2 \tag{10}$$

が言えます。

同じようにベッセルの不等式 (6) を部分和としてみれば、無限大のときでも有限に抑えられるので

$$\sum_{i=1}^{\infty}|<e_i, v>|^2 \leq \|v\|^2 < \infty$$

となり、$\alpha_i = <e_i, v>$ としても (8) は収束します。これから、有限次元と同じように任意のベクトルは $<e_i, v>$ を係数にして展開出来るように思えます。しかし、どこに収束するのかは決まってなく、任意のベクトルを $\Sigma <e_i, v> e_i$ で書けると言えないです。

なので、収束先は定義として加えます。つまり、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ において正規直交系 $\{e_i\}$ があり、全ての $v \in \mathcal{H}$ で

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} <e_i, v> e_i \tag{11}$$

と書けるとき、$\{e_i\}$ は完全 (complete) と定義します。完全な正規直交系を完全正規直交系と呼びます。完全正規直交系が無限次元ヒルベルト空間の正規直交基底となります。

完全正規直交系であることは違う言い方が出来ます。後の便宜上、(11) を (a) とします。(a) から、完全正規直交系であれば $v \in \mathcal{H}$ は

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} <e_i, v> e_i = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} <e_i, v> e_i$$

ということです。有限のときは線形結合なので、$\{e_i\}_{i=1}^{k}$ から作れるすべての線形結合の集合を $\mathcal{S}\{e_i|i = 1, 2, \ldots, k\}$ とし、

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} <e_i, v> e_i \in \mathcal{S}\{e_i|i = 1, 2, \ldots, k\}$$

このことから、完全正規直交系であれば v は $\mathcal{S}\{e_i|i = 1, 2, \ldots, k\}$ の元 v_k の極限 $(k \to \infty)$ にいます。なので、$\mathcal{S}\{e_i|i = 1, 2, \ldots, k\}$ は稠密です。k は任意の自然数なので自然数を N として、$\mathcal{S}\{e_i|i \in \mathrm{N}\}$ と表記し、$\mathcal{S}\{e_i|i \in \mathrm{N}\}$ は稠密です。これを (b) とします。また、稠密な部分空間 $\mathcal{D}$ の直交補空間 $\mathcal{D}^{\perp}$ は $\mathcal{D}^{\perp} = \{0\}$ なので、$\mathcal{S}\{e_i|i \in \mathrm{N}\}$ の直交補空間は $\{0\}$ です。

(b) から言えることがあります。$\{e_i\}$ と直交するベクトルを v として

$$<e_i, v> = 0$$

としたとき、e_i の線形結合である $x \in \mathcal{S}\{e_i|i \in \mathrm{N}\}$ でも

$$<x, v> = 0$$

$\mathcal{S}\{e_i|i \in \mathrm{N}\}$ は稠密なので、x と直交している v は $\mathcal{S}\{e_i|i \in \mathrm{N}\}$ の直交補空間 $\{0\}$ にいて、$v = 0$ です。よって、$< e_i, v >= 0$ なら $v = 0$ が言えます（別の言い方をすれば集合 $\{e_i|i \in \mathrm{N}\}$ の直交補空間が $\{0\}$）。これを (c) とします。

$< e_i, v >= 0$ なら $v = 0$ とすれば、w を

$$w = v - \sum_{n=1}^{\infty} < e_i, v > e_i$$

としたとき

$$\begin{aligned}
< e_j, w >= &< e_j, v > - < e_j, \sum_{i=1}^{\infty} < e_i, v > e_i > \\
= &< e_j, v > - \lim_{k \to \infty} < e_j, \sum_{i=1}^{k} < e_i, v > e_i > \\
= &< e_j, v > - \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} < e_i, v >< e_j, e_i > \\
= &< e_j, v > - < e_j, v > \\
= &\, 0
\end{aligned}$$

$< e_j, w >= 0$ なら $w = 0$ なので

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} < e_i, v > e_i$$

となり、元の条件 (11) に戻ります。なので、(a)→(b)→(c)→(a) から、これらは完全正規直交系であるための条件です。

すぐ分かるように、(a) は (10) から

$$\|v\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} < e_i, v > e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |< e_i, v >|^2 \tag{12}$$

(12) を (d) とします。最右辺は $< e_i, v >= 0$ で 0 になり、そのとき $\|v\|^2 = 0$ なので $v = 0$ です。つまり、$< e_i, v >= 0$ なら $v = 0$ となり、(d) から (c) が出てきました。なので、(a)→(d)→(c)→(a) となり、(d) も条件となります。また、(12) はパーセヴァル (Parseval) の等式と呼ばれます。

(a) に従う v, w の内積は、

$$
\begin{aligned}
< v, w > &= < \sum_{i=1}^{\infty} < e_i, v > e_i, \sum_{j=1}^{\infty} < e_j, w > e_j > \\
&= \lim_{k\to\infty} < \sum_{i=1}^{k} < e_i, v > e_i, \sum_{j=1}^{k} < e_j, w > e_j > \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} < e_i, v > \sum_{j=1}^{k} < e_j, w >< e_i, e_j > \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} < e_i, v >< e_i, w > \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} < e_i, v >< e_i, w >
\end{aligned}
$$

となり、これを (e) とします。これは $v = w$ のときパーセヴァルの等式になります。なので、(a)→(e)→(d)→(c)→(a) から、これも条件です。

まとめれば、$\mathcal{H}$ の正規直交系 $\{e_i\}$ と $v, w \in \mathcal{H}$ に対して

(a) $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} < e_i, v > e_i$

(b) $\mathcal{S}\{e_i | i \in \mathrm{N}\}$ は $\mathcal{H}$ で稠密

(c) $< e_i, v >= 0$ なら $v = 0$

(d) $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} | < e_i, v > |^2$

(e) $< v, w >= \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} < e_i, v >< e_i, w >$

これらのうちのどれかであれば、$\{e_i\}$ は完全正規直交系です (無限次元ヒルベルト空間の正規直交基底)。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が完全正規直交系を持つとき可分であることを示します。$\{e_i\}$ は完全正規直交系とします。まず、

$$
v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i
$$

と書ける $v_k \in \mathcal{H}$ による部分集合 $\mathcal{D}$ を作ります。$\mathcal{D}$ は α_i を可算として、可算個の元による部分集合とします。任意の $w \in \mathcal{H}$ は $\{e_i\}$ から

$$
w = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i
$$

和は収束するので

$$
\sum_{i=N+1}^{\infty} |\beta_i|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} \qquad (\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2 < \infty)
$$

となる N があります。これと v_N から

$$\begin{aligned}\|v_N - w\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i e_i\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha'_i - \beta_i)e_i\right\| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha'_i - \beta_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}|\alpha_i - \beta_i|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty}|\beta_i|^2\end{aligned}$$

α_i を $|\alpha_i - \beta_i|^2 < \epsilon^2/2N$ となるように選んでいれば

$$\sum_{i=1}^{N}|\alpha_i - \beta_i|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty}|\beta_i|^2 < \epsilon^2$$

これから、$\mathcal{D}$ には $\|v_N - w\|^2 < \epsilon^2$ となる v_N がいるので、稠密です。よって、可算で稠密な部分集合がいるので、可分です。というわけで、完全正規直交系がいれば可分となります。

これの逆 (可分なら完全正規直交系がいる) も示せます。可分なので、稠密な部分集合を作る可算な $x_1, x_2, \ldots \neq 0$ がいるとします。これに対して、$x_2 = \alpha x_1$ と書けるなら x_2 は消し、そうでないなら残して、x_1, x_2 が線形独立になるようにします。これを x_3 では $x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ と書けるなら消し、そうでないなら残して線形独立にするという手順を繰り返していきます、そうして線形独立として残ったものを $y_1, y_2, \ldots$ とします。線形独立となるようにしただけなので、線形結合によって作られる集合は、$\{x_i\}, \{y_i\}$ のどちらの場合も同じで

$$\mathcal{S}\{x_i|i \in \mathrm{N}\} = \mathcal{S}\{y_i|i \in \mathrm{N}\}$$

となります。

線形独立な $\{y_i\}$ からグラム・シュミットの正規直交化法で正規直交系 $\{g_i\}$ が作れて、$\{g_i\}$ よる線形結合は $\{y_i\}$ と等しいことから、$\mathcal{S}\{g_i\}$ は $\mathcal{S}\{x_i\}$ と等しいです (煩わしいので $i \in \mathrm{N}$ を省いてます)。そして、$\{x_i\}$ は稠密なので極限も $\mathcal{H}$ にいて、その線形結合による $\mathcal{S}\{x_i\}$ の元の極限は $\mathcal{H}$ にいます。このため、$\mathcal{S}\{g_i\}$ は稠密です。よって、$\mathcal{S}\{g_i\}$ は稠密なので、条件 (b) から $\{g_i\}$ は完全正規直交系です。というわけで、可分であれば完全正規直交系がいます。

最後に、l^2 空間が可分なヒルベルト空間であることをを見ておきます。l^2 空間を記号としては l^2 と表記します。l^2 空間は二乗総和可能 (square summable) な全ての実数か複素数の数列 $x = \{x_i\}$ による空間です。二乗総和可能は

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < \infty$$

を満たすことです。

和とスカラー倍を、$x, y \in l^2$ に対して $x + y = \{x_i + y_i\}$、$\alpha x = \{\alpha x_i\}$ で与えることでベクトル空間となります。分かりやすく書けば

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

ということです。実際に、和 $x + y$ は、複素数 z, w の絶対値の三角不等式

$$
\begin{aligned}
|z+w| &\leq |z|+|w| \\
|z+w|^2 &\leq |z|^2+|w|^2+2|z||w| \\
&\leq 2|z|^2+2|w|^2-(|z|^2+|w|^2-2|z||w|) \\
&\leq 2|z|^2+2|w|^2-(|z|-|w|)^2 \\
&\leq 2|z|^2+2|w|^2
\end{aligned}
$$

から、$x, y \in l^2$ に対して

$$
\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^2 \leq 2\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i|^2+|y_i|^2) < \infty
$$

となるので、$x+y \in l^2$ となっています。スカラー倍は単に $|\alpha|^2$ が出てくるだけなのですぐに分かります。
　l^2 空間の基底は線形独立な数列

$$
e_1 = (1, 0, 0, \ldots)\ ,\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)\ ,\ \ldots
$$

によって与えられます。e_i は数列であることに注意してください (l^2 空間は数列による集まり)。
　ノルムと内積は、$x, y \in l^2$ として

$$
\|x\|^2 =< x, x >= \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\ ,\ < x, y >= \sum_{i=1}^{\infty}x_i^* y_i
$$

と定義され、これによって内積空間となります。
　内積は無限大の和になっているので、収束していることを確かめます。そのためには

$$
\sum_{i=1}^{\infty}|\overline{x}_i y_i|
$$

が有限かどうか見ればいいです。これは単純な不等式

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (|x_i|-|y_i|)^2 \\
|x_i||y_i| &\leq \frac{1}{2}(|x_i|^2+|y_i|^2)
\end{aligned}
$$

と $|x_i||y_i| = |\overline{x}_i||y_i| = |\overline{x}_i y_i|$ から

$$
\sum_{i=1}^{N}|\overline{x}_i y_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(|x_i|^2+|y_i|^2) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2) \leq \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2)
$$

最右辺では $|x_i|, |y_i| \geq 0$ なので N を無限大にした方が大きくなります。そうすると、$x, y \in l^2$ なので最右辺は有限なために、任意の N に対して $\Sigma|\overline{x}_i y_i|$ は有限になっています。よって、内積は絶対収束しています。
　l^2 空間が完備であることを示します。まず、l^2 空間でのコーシー列を $\{a^{(i)}\} = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots\}$ とします（数列の数列)。$\{a^{(i)}\}$ はコーシー列なので、$\epsilon > 0$ と任意の正の整数 n_0 に対して、$i, j \geq n_0$ で $\left\|a^{(i)}-a^{(j)}\right\| < \epsilon$ です。完備であるためには

$$\lim_{i\to\infty} a^{(i)} = b$$

となり、尚且つ収束先 b が l^2 空間にいる必要があります。つまり、b も数列で、それを $b = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ とすれば

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\beta_m|^2 < \infty$$

であればいいです。

これらを示すために、$a^{(i)}$ を複素数の数列 $a^{(i)} = \{\alpha_m^{(i)}\}_m = \{\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots\}$ とします。このとき、$\{\alpha_m^{(i)}\}_i = \{\alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, \ldots\}$ はコーシー列です。このことは、内積の定義から

$$\begin{aligned}\left\|a^{(i)} - a^{(j)}\right\|^2 = \left\|\{\alpha_m^{(i)}\}_m - \{\alpha_m^{(j)}\}_m\right\|^2 &= \left\|(\alpha_1^{(i)} - \alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(i)} - \alpha_2^{(j)}, \ldots)\right\|^2 \\ &= |\alpha_1^{(i)} - \alpha_1^{(j)}|^2 + |\alpha_2^{(i)} - \alpha_2^{(j)}|^2 + \cdots \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m^{(i)} - \alpha_m^{(j)}|^2\end{aligned}$$

そして、$\{a^{(i)}\}$ はコーシー列なので

$$|\alpha_m^{(i)} - \alpha_m^{(j)}| \le \left\|a^{(i)} - a^{(j)}\right\| < \epsilon$$

よって、数列 $\{\alpha_m^{(i)}\}_i$ は複素数のコーシー列です。複素数は完備なので収束先があり、それを $\beta_m = \lim_{i\to\infty} \alpha_m^{(i)}$ とし、数列 $\{\beta_m\}$ を作ります。

$|\alpha_m^{(i)} - \alpha_m^{(j)}|^2$ の有限の和は

$$\sum_{m=1}^{n} |\alpha_m^{(i)} - \alpha_m^{(j)}|^2 \le \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m^{(i)} - \alpha_m^{(j)}|^2 = \left\|a^{(i)} - a^{(j)}\right\|^2 < \epsilon^2$$

$i \to \infty$ とすれば

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\beta_m - \alpha_m^{(j)}|^2 = \left\|(\beta_1 - \alpha_1^{(j)}, \beta_2 - \alpha_2^{(j)}, \ldots)\right\|^2 = \left\|\{\beta_m\} - \{\alpha_m^{(j)}\}_m\right\|^2 = \left\|b - a^{(i)}\right\|^2 < \epsilon^2$$

このため、

$$\lim_{i\to\infty} a^{(i)} = b$$

となり、$a^{(i)}$ は b に収束します。

そして、$|\beta_m|^2$ の和は絶対値の不等式から

$$\sum_{m=1}^{n} |\beta_m|^2 = \sum_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m^{(j)} + \alpha_m^{(j)}|^2 \le 2\sum_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m^{(j)}|^2 + 2\sum_{m=1}^{n} |\alpha_m^{(j)}|^2$$

$a^{(i)} = \{\alpha_m^{(i)}\}_m \in l^2$ なので

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m^{(j)}|^2 < \infty$$

から、$n \to \infty$ で

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\beta_m|^2 < 2\epsilon^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m^{(j)}|^2 < \infty$$

よって、収束先の b も l^2 空間にいることから l^2 空間は完備です。このように、l^2 空間は完備な内積空間なので、ヒルベルト空間です。

可分であることは簡単に分かります。ノルムの定義と基底 e_i から、$x \in l^2$ のノルムは

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | < e_i, x > |^2$$

これは $\{e_i\}$ が完全正規直交系であるための条件 (d) です。よって、完全正規直交系がいるので l^2 空間は可分なヒルベルト空間です。

・補足

定義と求められた結果を簡単にまとめています。

内積空間は $\mathcal{P}$、ヒルベルト空間は $\mathcal{H}$、「$\perp$」は直交補空間、$\mathcal{S}$ は線形結合による集合、N は自然数、v, w はベクトル。

定義

- 同値

  2 つのノルム $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ が $\alpha \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \beta \|v\|_1$ $(\alpha, \beta > 0)$ のとき同値。

- 閉部分空間

  部分空間の数列の収束先が同じ部分空間。

- 直交補空間

  $\mathcal{P}$ の部分集合を $\mathcal{X}$。$v \in \mathcal{P}$ と $x \in \mathcal{X}$ の内積が $< x, v >= 0$ となる v の集合。$\mathcal{P}$ の閉部分空間。

- 稠密

  $\mathcal{H}$ の部分集合を $\mathcal{M}$。$v \in \mathcal{H}$ に対して $\|v - x\| < \epsilon$ となる $x \in \mathcal{M}$ がいる。

  $\mathcal{M}$ の数列 $\{a_i\}$ が $\lim_{i\to\infty} a_i = v$ となる。

- 可分

  $\mathcal{H}$ が可算個の稠密な部分集合を含んでいる

- 完全

  $\mathcal{H}$ の正規直交系 $\{e_i\}$ が、全ての $v \in \mathcal{H}$ で

  $$v = \sum_{i=1}^{\infty} < e_i, v > e_i$$

  と書けるとき、$\{e_i\}$ は完全

定理 (補題や系とされるものもまとめてます)

- 有限次元ノルム空間は完備

- 有限次元内積空間はヒルベルト空間

内積空間 $(\|v\| = \sqrt{< v, v >})$

- 中線定理
  $\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2(\|v\|^2+\|w\|^2)$
- 三平方の定理
  $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2 \quad (<v,w>=<w,v>=0)$
- ベッセルの不等式
  $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|<e_i,v>|^2 \leq \|v\|^2$

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$

- 正射影定理
  $v\in\mathcal{H}$ は閉部分空間 $\mathcal{X},\mathcal{X}^\perp$ の $x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{X}^\perp$ によって、$v=x+y$ と一意的に書ける。
- $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{D}$ が稠密なら $\mathcal{D}^\perp=\{0\}$、$\mathcal{D}^\perp=\{0\}$ なら稠密
- $\{e_i\}$ が正規直交系のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}<e_i,v>e_i$ は収束
- $\{e_i\}$ が完全なとき

  (a) $v=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}<e_i,v>e_i$

  (b) $\mathcal{S}\{e_i|i\in\mathrm{N}\}$ は $\mathcal{H}$ で稠密

  (c) $<e_i,v>=0$ なら $v=0$

  (d) $\|v\|^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}|<e_i,v>|^2$ （パーセヴァルの等式）

  (e) $<v,w>=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}<e_i,v><e_i,w>$
- $\mathcal{H}$ が完全正規直交系を持つとき可分。可分なら完全正規直交系がいる。