エルミート方程式

級数解の例としてエルミート方程式を扱います。

　エルミート (Hermite) 方程式、もしくはエルミート微分方程式と呼ばれる 2 階微分方程式は

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+2\lambda y(x)=0$$

という形で与えられています。λ は定数です。これは任意の x で通常点なので、$x_0=0$ でのべき級数として y を

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

と仮定します。これの微分は

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{d}{dx}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n\\\frac{d^2y}{dx^2}&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}\frac{d}{dx}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n\end{aligned}$$

となるので、エルミート方程式は

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n-2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n+2\lambda\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0 \tag{1}$$

第 2 項は $n+1$ を m に置き換えれば

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n=2x\sum_{m=1}^{\infty}mc_mx^{m-1}=2\sum_{m=1}^{\infty}mc_mx^m=2\sum_{m=0}^{\infty}mc_mx^m$$

となるので、(1) は

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)(n+2)c_{n+2}-2nc_n+2\lambda c_n)x^n=0$$

$x^n\neq 0$ として

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + 2\lambda c_n = 0$$

$$c_{n+2} = -\frac{2(\lambda - n)}{(n+2)(n+1)}c_n \tag{2}$$

c_0 から書き出していくと

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{2\lambda}{2}c_0 \\
c_4 &= -\frac{2(\lambda-2)}{4\times 3}c_2 = \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4\times 3\times 2}c_0 = (-1)^2\frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!}c_0 \\
c_6 &= -\frac{2(\lambda-4)}{6\times 5}c_4 = -\frac{2(\lambda-4)}{6\times 5}\frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!} = (-1)^3\frac{2^3\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)}{6!}c_0
\end{aligned}$$

と続いているので

$$c_{2n} = (-1)^n 2^n \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)\cdots(\lambda-2(n-1))}{(2n)!}c_0 \quad (n \geq 1) \tag{3}$$

c_1 からでは

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{2(\lambda-1)}{3\times 2}c_1 \\
c_5 &= -\frac{2(\lambda-3)}{5\times 4}c_3 = (-1)^2\frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}c_1 \\
c_7 &= -\frac{2(\lambda-5)}{7\times 6}c_5 = (-1)^3\frac{2^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{7!}c_1
\end{aligned}$$

と続くので

$$c_{2n+1} = (-1)^n 2^n \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-(2n-1))}{(2n+1)!}c_1 \quad (n \geq 1) \tag{4}$$

これらによって

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= c_0 + c_1 x - \frac{2\lambda}{2!} c_0 x^2 - \frac{2(\lambda-1)}{3!} c_1 x^3 + \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!} c_0 x^4 + \frac{2^2(\lambda-3)(\lambda-1)}{5!} c_1 x^5 + \cdots \\
&= c_0(1 - \frac{2\lambda}{2!} x^2 + \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!} x^4 - \cdots) + c_1(x - \frac{2(\lambda-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2(\lambda-3)(\lambda-1)}{5!} x^5 - \cdots) \\
&= c_0\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n \frac{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2(n-1))}{(2n)!} x^{2n}\big) + c_1\big(x - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-(2n-1))}{(2n+1)!} x^{2n+1}\big) \\
&= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

x^{2n} と x^{2n+1} のために y_1/y_2 は定数にならないので、これが一般解になります。
後は級数が収束するかですが、y_1 での級数は

$$
c_{2n} x^{2n} = (-1)^n \frac{2^n \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2(n-1))}{(2n)!} x^{2n}
$$

$$
c_{2n+2} x^{2n+2} = (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1} \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n)}{(2n+2)!} x^{2n+2}
$$

なので、ratio test は

$$
\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{2n+2} x^{2n+2}}{c_{2n} x^{2n}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{2(2n)!}{(2n+2)!} \frac{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n)}{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2(n-1))}| x^2 = \lim_{n\to\infty} |\frac{2(\lambda-2n)}{(2n+2)(2n+1)}| x^2
$$

絶対値部分は n の無限大で 0 になるので、任意の x で収束します (収束半径 $R=\infty$)。y_2 でも同様です。よって、べき級数による (5) をエルミート方程式の一般解とできます。
エルミート方程式の解として重要なのは多項式になる場合です。求めた c_n の漸化式は

$$
c_{n+2} = -\frac{2(\lambda-n)}{(n+2)(n+1)} c_n
$$

このとき、λ が負でない整数 l なら、$n=\lambda=l$ になれるために漸化式の分子は 0 になり、そこで漸化式が終わります。つまり、λ が負ない整数 l のとき漸化式は c_l までになり、級数は無限に続かずに x^l の項までの多項式になります。この多項式をエルミート多項式 (Hermite polynomial) と呼びます。注意ですが、級数解は偶数の y_1、奇数の y_2 に分かれているために、l が偶数なら y_1 は多項式、y_2 は級数、l が奇数なら y_1 は級数、y_2 は多項式となるので、一般解を多項式だけで書けるわけではないです (エルミート多項式は λ が l のときのエルミート方程式の解であって、一般解そのものではない)。
ちなみに、$l=2m$ $(m=1,2,3,\ldots)$ とすれば、c_{2n} は (3) から

$$
\begin{aligned}
c_{2n} &= (-1)^n 2^n \frac{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2(n-1))}{(2n)!}c_0 \\
&= (-1)^n 2^n \frac{2m(2m-2)(2m-4)\cdots(2m-2(n-1))}{(2n)!}c_0 \\
&= (-1)^n 2^n 2^n \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(2n)!}c_0 \\
&= (-1)^n 2^{2n} \frac{m!}{(2n)!(m-n)!}c_0
\end{aligned}
$$

となり、3 行目の分子や 4 行目の分母から $n=m$ までで止まっているのが分かります。c_{2n+1} では $l=2m+1$ として、(4) から

$$
\begin{aligned}
c_{2n+1} &= (-1)^n 2^n \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-(2n-1))}{(2n+1)!}c_1 \\
&= (-1)^n 2^n \frac{(2m+1-1)(2m+1-3)\cdots(2m+1-(2n-1))}{(2n+1)!}c_1 \\
&= (-1)^n 2^n \frac{2m(2m-2)\cdots(2m-2(n-1))}{(2n+1)!}c_1 \\
&= (-1)^n 2^{2n} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(2n+1)!}c_1 \\
&= (-1)^n 2^{2n} \frac{m!}{(2m+1)!(m-n)!}c_1
\end{aligned}
$$

これも $n=m$ で止まっています。

　というわけで、エルミート多項式を求めます。λ を負でない整数 l としたエルミート方程式は

$$
\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ly = 0
$$

これの級数解を見ます。級数解の形自体は同じなので、l を偶数として y_1 は

$$
y_1 = 1 - \frac{2l}{2!}x^2 + \frac{2^2l(l-2)}{4!}x^4 - \cdots + c_lx^l = \sum_{n=0}^{l/2}(-1)^n 2^n \frac{l(l-2)\cdots(l-2(n-1))}{(2n)!}x^{2n}
$$

分子は $n=0$ のとき $l+2$ になるので、$n=0$ では 1 としています。これは二重階乗 $n!!=n(n-2)(n-4)\cdots$ を使うと

$$
l(l-2)\cdots(l-2n+2) = \frac{l!!}{(l-2n)!!} = \frac{l!}{(l-2n)!!(l-1)!!}
$$

と書けるので

$$y_1 = \sum_{n=0}^{l/2} (-1)^n 2^n \frac{1}{(2n)!} \frac{l!!}{(l-2n)!!} x^{2n} = \sum_{k=0}^{l/2} (-1)^{(l-2k)/2} 2^{(l-2k)/2} \frac{1}{(l-2k)!} \frac{l!!}{(2k)!!} x^{l-2k} \qquad (2n = l-2k)$$

二重階乗は

$$(2k)!! = 2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2 = 2k \times 2(k-1) \times 2(k-2) \cdots 2 = 2^k k!$$

なので

$$\begin{aligned}
y_1 =& \sum_{k=0}^{l/2} (-1)^{(l-2k)/2} 2^{(l-2k)/2} \frac{1}{(l-2k)!} \frac{l!!}{2^k k!} x^{l-2k} \\
&= (-1)^{l/2} 2^{-l/2} l!! \sum_{k=0}^{l/2} (-1)^{-k} 2^{l-2k} \frac{1}{k!(l-2k)!} x^{l-2k} \\
&= (-1)^{l/2} 2^{-l/2} l!! \sum_{k=0}^{l/2} (-1)^{-k} 2^{l-2k} \frac{1}{k!(l-2k)!} (2x)^{l-2k}
\end{aligned}$$

l は定数なので、c_0 に係数部分を押し込めて、$l!$ を新しく加えて

$$y_1(x) = H_{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{l/2} (-1)^{-k} 2^{l-2k} \frac{l!}{k!(l-2k)!} (2x)^{l-2k}$$

としたのがエルミート多項式 $H_{(l)}$ です。

l が奇数の場合も同様で、このときは y_2 なので

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x - \frac{2(l-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2(l-3)(l-1)}{5!} x^5 - \cdots + c_l x^l \\
&= \sum_{n=0}^{(l-1)/2} (-1)^n 2^n \frac{(l-1)(l-3)\cdots(l-(2n-1))}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{(l-1)/2} (-1)^n 2^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(l-1)!!}{(l-2n-1)!!} x^{2n+1} \\
&= (-1)^{(l-1)/2} (l-1)!! \sum_{k=0}^{(l-1)/2} (-1)^{-k} 2^{(l-2k-1)/2} \frac{1}{(l-2k)!} \frac{1}{(2k)!!} x^{l-2k} \qquad (2n+1 = l-2k) \\
&= (-1)^{(l-1)/2} (l-1)!! \sum_{k=0}^{(l-1)/2} (-1)^{-k} 2^{(l-1)/2-k} \frac{1}{(l-2k)!} \frac{1}{2^k k!} x^{l-2k} \\
&= (-1)^{(l-1)/2} 2^{-(l+1)/2} (l-1)!! \sum_{k=0}^{(l-1)/2} (-1)^{-k} \frac{1}{k!(l-2k)!} (2x)^{l-2k}
\end{aligned}$$

よって、y_1 と係数を同じにすることで

$$y_2(x) = H_{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{(l-1)/2}(-1)^{-k}\frac{l!}{k!(l-2k)!}(2x)^{l-2k}$$

として、l が奇数でのエルミート多項式が与えられます。

和の範囲が異なるだけなので、エルミート多項式は

$$H_{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^{-k}\frac{l!}{k!(l-2k)!}(2x)^{l-2k}$$

と与えられ、$[l/2]$ は l が偶数なら $l/2$、奇数なら $(l-1)/2$ とすることを表します。エルミート多項式を和の形で与えるときはこれが使われます。

今度は、べき級数を上側から見ていくことでエルミート多項式を求めてみます。これは解が

$$y(x) = c_l x^l + c_{l-2}x^{l-2} + \cdots$$

となっているとして、c_l から減っていくように漸化式を作るというだけです。なので、漸化式 (2) を

$$\begin{aligned}
c_{n+2} &= -\frac{2(l-n)}{(n+2)(n+1)}c_n \\
c_n &= -\frac{(n+2)(n+1)}{2(l-n)}c_{n+2}
\end{aligned}$$

と変形します。偶数なら $l = 2m$ なので $2m-2, 2m-4, \ldots, 0$、奇数なら $l = 2m+1$ なので $2m-2, 2m-4, \ldots, 1$ と下がっていくので、どちらも減らし方は同じです。というわけで、どちらの場合でも l から $2k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ ずつ減らしていけばいいので、n を $l-2k$ に置き換えて

$$c_{l-2k} = -\frac{(l-2k+2)(l-2k+1)}{2(l-(l-2k))}c_{l-2k+2} = -\frac{(l-2k+2)(l-2k+1)}{4k}c_{l-2k+2}$$

$k = 1, 2, 3$ を見ると

$$\begin{aligned}
c_{l-2} &= -\frac{l(l-1)}{2^2}c_l \\
c_{l-4} &= -\frac{(l-2)(l-3)}{8}c_{l-2} = \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2^2\times(4\times 2)}c_l \\
c_{l-6} &= -\frac{(l-4)(l-5)}{12}c_{l-4} = -\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)(l-4)(l-5)}{2^3(6\times 4\times 2)}c_l
\end{aligned}$$

これらは

$$
\begin{aligned}
c_{l-2k} &= (-1)^k \frac{1}{2^k} \frac{1}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots\times 2} \frac{l!}{(l-2k)!} c_l \\
&= (-1)^k \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{k(k-1)(k-2)\cdots\times 1} \frac{l!}{(l-2k)!} c_l \\
&= (-1)^k \frac{1}{2^{2k}} \frac{l!}{k!(l-2k)!} c_l
\end{aligned}
$$

偶数と奇数の違いは、x^{l-2k} の k の範囲が偶数 $l=2m$ なら $0,1,2,\ldots,m=l/2$ まで、奇数 $l=2m+1$ なら $0,1,2,\ldots,m=(l-1)/2$ までというだけです。なので、解として、l が偶数、奇数の場合に対して

$$
y(x) = c_l \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{1}{2^{2k}} \frac{l!}{k!(l-2k)!} x^{l-2k}
$$

c_l を 2^l とすることで

$$
y(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{l!}{k!(l-2k)!} (2x)^{l-2k}
$$

となり、エルミート多項式になります。