群論

群論での入門部分を見ていきます。ほとんど単語の定義を与えているだけです。
e は単位元、I_n は $n \times n$ 単位行列です。

集合 S があり、その元がある演算「$\cdot$」に対して

- $a \cdot b \in S \quad (a, b \in S)$
- 結合法則：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (c \in S)$
- 単位元 e：$a \cdot e = e \cdot a = a \quad (e \in S)$
- 逆元 a^{-1}：$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \quad (a^{-1} \in S)$

という関係を満たすとき、その集合を群 (group) と定義します。「$\cdot$」は積 (multiplication, composition) と呼ばれますが、掛け算である必要はないです。簡単に言えば、群は集合 S から集合 S への演算規則が与えられたものです。

$a \cdot b = b \cdot a$ なら可換 (commutative, abelian)、$a \cdot b \neq b \cdot a$ なら非可換 (non-commutative, non-abelian) と呼ばれます。また、$a \cdot a = a^2$ のように書きますが、一般的に $(a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \neq a^2 \cdot b^2$ であることに注意してください。「$\cdot$」を省いて ab とだけ表記される場合もあります。ちなみに、可換群の積にもう 1 つ積を加えたものが環 (ring) です (新しく加える積での単位元、逆元の定義は必要ない)。

群はその元が有限個か無限個かで区別されます。群の元が有限個なら有限群と呼ばれます。ここでは有限個での有限群 (finite group) を扱っていきます。

見た目から $e = 1$ のように思え、実際に演算が掛け算で a, b がただの実数なら $e = 1$ ですが、演算が和の場合

$$a + e = a \ , \ a + a^{-1} = e$$

なので、$e = 0, \ a^{-1} = -a$ となります。演算が和で与えられていれば可換なので、可換な群は加法群 (additive group) とも呼ばれます。

単位元と逆元は 1 つに決まります。e, f が単位元なら

$$e = e \cdot f = f$$

となるからです (f が単位元なら単位元の定義から $e \cdot f = e, \ e$ が単位元なら $e \cdot f = f$)。逆元も、a の逆元を a^{-1}, b とすると

$$\begin{aligned}
e &= a \cdot a^{-1} \\
b &= b \cdot (a \cdot a^{-1}) \\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} \\
&= e \cdot a^{-1} \\
&= a^{-1}
\end{aligned}$$

となって、1 つに決まります。また、$a \cdot b$ の逆元は $b^{-1} \cdot a^{-1}$ です。これは結合法則から

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1})) = a \cdot ((b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1})) = a \cdot a^{-1} = e$$

となるからで、$(a \cdot b)^{-1} = (b^{-1} \cdot a^{-1})$ です。

群のよく出てくる例を示しておきます。

- 全ての整数の集合

  演算規則を和とすれば、無限個の元を持つ群となります。任意の整数を a, b, c とすれば

$$a + b = c$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = a$$

$$a + (-a) = 0$$

  となり、群の定義を満たします。同様に、複素数全体は通常の和の規則によって、無限個の元を持つ群となります。

- 一般線形群

  $n \times n$ 正則行列は行列の積によって群となります。逆元は逆行列、単位元は単位行列です。これは一般線形群 (general linear group) と呼ばれ、$GL(n)$ と表記されます。もしくは実数 R か複素数 C かの区別をつけて $GL(n, \mathrm{R}), GL(n, \mathrm{C})$ や、ベクトル空間 V 上として $GL(n, V)$ と書かれます。

- 巡回群

  e, a, b (e は単位元) の集合に対して積を

$$a \cdot a = b\ ,\ a \cdot b = e\ ,\ b \cdot a = e\ ,\ b \cdot b = a$$

  とすれば、群となります。積の組み合わせは

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

  として表にまとめられます。表から、積は $\{e, a, b\}$ の中で閉じていて (各行、各列で 1 度ずつ元が出てくる)、e が単位元、a の逆元が b と分かるので、群の定義を満たします (2 個の積による表なので結合法則は分からない)。また、a は $a \cdot a$ で b を作り、$a \cdot a \cdot a = b \cdot a = e$ から e を作るので、この群の元は全て a から作れます。a のように群の元を作るものは群の生成子 (generator) と呼ばれます。

  n を正の整数として、a のみによる $e, a, a^2, \ldots, a^n = e$ を元とする群は巡回群 (cyclic group) と呼ばれます。Z_n と表記すれば、今の例は $e, a, b = a^2, a^3 = e$ なので $Z_3 = \{e, a, a^2\}$ です。Z_3 になる a の具体的な形は exp の計算規則から

$$a = e^{2\pi i/3}\ ,\ a^2 = e^{4\pi i/3}\ ,\ a^3 = e^{6\pi i/3} = e^{2\pi i} = 1$$

と与えられます。Z_n に一般化するなら $e^{i2\pi k/n}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ です。

- 対称群

置換は群となります。$\{1,2,3\}$ に対して、1 を 2、2 を 3、3 を 1 にする置換を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と表記します。$\{1,2,3\}$ の可能な置換は

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\ ,\ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\ ,\ d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

これら 6 個に積を

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

と与えることで、群となります。これは $\{1,2,3\}$ に対して b の置換を行った後に a の置換を行っています。表記を簡単にするために $a = P(2,3,1)$ とします。置換は結合法則を満たし、もとに戻す置換が逆元になり $(c, d, f$ の逆元は c, d, f、a, b の逆元は $b, a)$、この積によって

$$a \cdot b = a(P(3,1,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$a \cdot c = a(P(1,3,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = f$$

のようになり、積の結果は 6 個の内のどれかになります。$\{1, 2, \dots, n\}$ の全ての置換による群は対称群 (symmetry group) と呼ばれます。

$(x_1 x_2 \dots x_n)$ と書いたときは x_1 を x_2、x_2 を x_3、$\dots$、x_n を x_1 にすることを表し、(x) は x のままにするという表記もあります。$(x_1 x_2 \dots x_n)$ は巡回しているので、$(x_2 x_3 x_1), (x_3 x_1 x_2)$ は $(x_1 x_2 x_3)$ と同じです。この表記を使うと、例えば

$$(231) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(13)(2)(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

と対応します。

- 二面体群

　正三角形を用意し、頂点を A_1, A_2, A_3 とします。正三角形の形は回転や頂点の交換で変わらないので、それらを積とすれば群になります。$e = (A_1, A_2, A_3)$ として

$$a = (A_3, A_1, A_2)\ ,\ a^2 = a \cdot a = (A_2, A_3, A_1)\ ,\ a^3 = a \cdot a \cdot a = (A_1, A_2, A_3) = e$$

a は正三角形を 120 度回転させる動きに対応します。2 つの頂点の交換は

$$b = (A_1, A_3, A_2)\ ,\ c = (A_3, A_2, A_1)\ ,\ d = (A_2, A_1, A_3)$$

これらによる $\{a, a^2, a^3 = e, b, c, d\}$ によって群となります。しかし、頂点の入れ替えは

$$b^2 = b \cdot b = e \quad\ (b^{-1} = b)$$
$$c = (A_3, A_2, A_1) = b((A_3, A_1, A_2)) = b \cdot a$$
$$d = (A_2, A_1, A_3) = b((A_2, A_3, A_1)) = b \cdot a^2$$

なので、c, d は必要なくなり、$\{e, a, a^2, a^3 = e, b, b^2 = e, b \cdot a, b \cdot a^2\}$ と書けます。また、

$$a^{-1} \cdot a = a^{-1}((A_3, A_1, A_2)) = (A_1, A_2, A_3) = e$$
$$b^{-1} \cdot b = b^{-1}((A_1, A_3, A_2\}) = (A_1, A_2, A_3) = e$$

から

$$b^{-1} \cdot a \cdot b = b^{-1}((A_2, A_1, A_3)) = (A_2, A_3, A_1) = a^{-1}$$

このため

$$a \cdot b \cdot a^2 = b \cdot a^{-1} \cdot a \cdot a = b \cdot a$$

のようになるので、$b \cdot a, b \cdot a^2$ しか出てきません。

このようにして、正三角形に対する回転と頂点の交換は群となります。回転と頂点の交換による群は正多角形に一般化でき、二面体群 (dihedral group) と呼ばれます。二面体群の元の数は $2n$ 個で、$\{a, a^2, \ldots, a^n = e, b, b^2 = e, b \cdot a, b \cdot a^2, \ldots, b \cdot a^{n-1}\}$ $(b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1})$ と与えられます。

デカルト積から群を作れます。群 G, K があり、それぞれの積は「$\cdot$」,「$\circ$」とします。$g_1, g_2 \in G, k_1, k_2 \in K$ として、デカルト積 $G \times K$ での元 $(g_1, k_1), (g_2, k_2)$ の積「$*$」を

$$(g_1, k_1) * (g_2, k_2) = (g_1 \cdot g_2, k_1 \circ k_2)$$

と与えれば、$G \times K$ は群となります。$g_1 \cdot g_2, k_1 \circ k_2$ はそれぞれ群の積なので、$G \times K$ が群の定義を満たすのはすぐに分かります。簡単な例として、G と K を $\{1, -1\}$ による群とすれば、$G \times K$ は

$$(1, 1)\ ,\ (1, -1)\ ,\ (-1, 1)\ ,\ (-1, -1)$$

なので、今の積に合わせた表は

	$(1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$
$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$
$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$	$(1,1)$	$(1,-1)$
$(-1,-1)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$

$(1, 1)$ が単位元で、対角部分から逆元が分かるので、群になっています (結合法則も成立する)。

群の部分群を見ていきます。群 G の元による部分集合 H があり、G と同じ積で群となるなら、H は G の部分群 (subgroup) と定義されます。H が部分群のとき、$g_1, g_2 \in G$ に対して $g_1 \cdot g_2 \in H$ なら $g_1, g_2 \in H$ です。これは簡単に分かります。$g_1 \cdot g_2$ は

$$g_1 \cdot g_2 = h \quad (h \in H)$$

$$g_1 = h \cdot g_2^{-1}$$

H は群なので、$g_2 \in H$ なら $g_2^{-1} \in H$ から $g_1 = h \cdot g_2^{-1} \in H$ となります。同じように、$g_1 \in H$ なら $g_2 = g_1^{-1} \cdot h \in H$ が言えます。というわけで、$g_1 \cdot g_2 \in H$ なら $g_1, g_2 \in H$ です。

正規部分群を定義します。群 G とその部分群 H があり、$h_i \in H$ と任意の $g \in G$ による $g \cdot h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を元とする集合を左余剰類 (left coset)、$h_i \cdot g$ を右余剰類 (right coset) と呼びます。そして、左余剰類と右余剰類が同じになる部分群は正規部分群 (normal subgroup) や不変部分群と定義されます。また、$g = 1$ に対して H は剰余類となります。

G の部分群 H が正規部分群なら、左余剰類と右余剰類が等しいので、左余剰類 $\{g \cdot h_1, \ldots, g \cdot h_n\}$ を gH、右余剰類 $\{h_1 \cdot g, \ldots, h_n \cdot g\}$ を Hg と書くことにすれば、任意の $g \in G$ に対して H と gHg^{-1} が同じになります。つま

り、正規部分群なら g, g^{-1} に挟まれた変換で変わらないです。例えば、G が可換群で H がその部分群なら、$g \in G$ と $h \in H$ は $g \cdot h \cdot g^{-1} = g \cdot g^{-1} \cdot h = h$ なので、可換群の部分群は正規部分群です。

また、正規部分群の定義から、その群そのものによる部分群と単位元のみの部分群は明らかに正規部分群で、この 2 つ以外に正規部分群がない群は単純群 (simple group) と呼ばれます。

N を G の正規部分群とします。このとき $g_1, g_2 \in G$ に対して、剰余類の表記を使うと

$$(g_1N)(g_2N) = g_1g_2NN = g_1g_2N \quad (gN = Ng)$$

N は群なので、N の元による積は N のままです。g_1 による左余剰類と g_2 による左剰余類の積は $g_1 \cdot g_2$ の左剰余類とすることで、正規部分群 N の左剰余類は群となり、商群 (quotient group) と呼ばれます (右剰余類でも同様)。商群は G/N と表記されます。

もう少し細かく正規部分群のときに商群になることを見ておきます。$g_1, g_2 \in g$ として、g_1N が別の元 u による uN と一致するには、$u^{-1} \cdot g_1 \in N$ が存在し

$$uN = uNN \ \Leftrightarrow \ u \cdot u^{-1} \cdot g_1 = g_1$$

となるように、$u^{-1} \cdot g_1 \in N$ が存在すればいいです。同様に $v^{-1} \cdot g_2 \in N$ なら g_2N と vN が一致します。このとき、g_1g_2N と uvN が一致するには、$(u \cdot v)^{-1} \cdot (g_1 \cdot g_2) \in N$ の必要があります。これは

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{-1} \cdot (g_1 \cdot g_2) &= v^{-1} \cdot u^{-1} \cdot g_1 \cdot g_2 \\
&= v^{-1} \cdot n \cdot g_2 \quad (n = u^{-1} \cdot g_1) \\
&= v^{-1} \cdot g \cdot g^{-1} \cdot n \cdot g_2 \\
&= v^{-1} \cdot g_2 \cdot (g_2^{-1} \cdot n \cdot g_2)
\end{aligned}$$

$n \in N$ は正規部分群なので $g_2^{-1} \cdot n \cdot g_2 \in N$ から、$(u \cdot v)^{-1} \cdot (g_1 \cdot g_2) \in N$ と確かめられます。このように、正規部分群の性質が必要なので、商群では正規部分群が使われます。

共役類 (conjugacy class) を定義します。$a, b \in G$ として、$g \in G$ によって a, b が

$$b = g^{-1} \cdot a \cdot g$$

となっているとき、b は a の共役 (conjugate) と言い、a に共役な G の元による集合を a の共役類 (conjugacy classs) と言います。G の部分群 H による $gHg^{-1} = \{g \cdot h \cdot g^{-1} | \ h \in H\}$ は H の共役類です。

gHg^{-1} が G の部分群になるのを示します。群 G の部分群 H の元 $h_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ による $h'_i = g \cdot h_i \cdot g^{-1}$ $(g \in G)$ を元とする集合 H' は部分群になります。$h'_i \cdot h'_j \in H'$ になることは、$h_i \cdot h_j = h_k \in H$ なので

$$h'_i \cdot h'_j = (g \cdot h_i \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot h_j \cdot g^{-1}) = g \cdot h_i \cdot h_j \cdot g^{-1} = g \cdot h_k \cdot g^{-1} \in H'$$

から分かります。逆元は

$$h'^{-1}_i = (g \cdot h_i \cdot g^{-1})^{-1} = g \cdot h_i^{-1} \cdot g^{-1}$$

とすれば、$h_i^{-1} \in H$ なので H' の定義から $h_i'^{-1} \in H'$ と与えられます。単位元は H と同じで、結合法則は H' は G の部分集合なのでそのまま適用されます。というわけで、

$$H' = \{h_i' |\ h_i' = g \cdot h_i \cdot g^{-1},\ g \in G,\ h_i \in H\}$$

で与えられた集合 H' は G の部分群となります。

例として正三角形による 2 面体群 $D_6 = \{e, a, a^2, a^3 = e, b, b^2 = e, b \cdot a, b \cdot a^2\}$ での共役類を求めてみます。e は

$$\begin{aligned}
&a \cdot e = a \cdot a^3 = a^3 \cdot a = e \cdot a \\
&a^2 \cdot e = a^2 \cdot a^3 = a^3 \cdot a^2 = e \cdot a^2 \\
&b \cdot e = b \cdot b^2 = b^2 \cdot b = e \cdot b
\end{aligned}$$

のようになっているので、e の共役 $g^{-1} \cdot e \cdot g$ は e で、e の共役類は $\{e\}$ です。a では

$$a^{-1} = a^2\ ,\ b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} = a^2$$

を使うと、共役 $g^{-1} \cdot a \cdot g$ は

$$\begin{aligned}
&a^{-1} \cdot a \cdot a = a \\
&(a^2)^{-1} \cdot a \cdot a^2 = (a^{-1})^{-1} \cdot e = a \\
&(b \cdot a)^{-1} \cdot a \cdot (b \cdot a) = a^2 \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b \cdot a = a^2 \cdot a^{-1} \cdot a = a^2 \\
&(b \cdot a^2)^{-1} \cdot a \cdot (b \cdot a^2) = (a^2)^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b \cdot a^2 = a \cdot a^{-1} \cdot a^2 = a^2 \\
&b^{-1} \cdot a \cdot b = a^2
\end{aligned}$$

から、a の共役類は $\{a, a^2\}$ です。b では

$$a^{-1} \cdot b = (b^{-1} \cdot a \cdot b) \cdot b = b \cdot a$$

を使うと

$$\begin{aligned}
&a^{-1} \cdot b \cdot a = (b \cdot a) \cdot a = b \cdot a^2 \\
&(a^2)^{-1} \cdot b \cdot a^2 = a \cdot (b \cdot a) \cdot a = b \cdot a \\
&(b \cdot a)^{-1} \cdot b \cdot (b \cdot a) = (a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot b \cdot (b \cdot a) = b \cdot a^2 \\
&(b \cdot a^2)^{-1} \cdot b \cdot (b \cdot a^2) = (a \cdot b^{-1}) \cdot b \cdot (b \cdot a^2) = a \cdot b \cdot a^2 = b \cdot a \\
&b^{-1} \cdot b \cdot b = b
\end{aligned}$$

から、共役類は $\{b, b\cdot a, b\cdot a^2\}$ です。よって、D_6 の共役類は $\{e\}, \{a, a^2\}, \{b, b\cdot a, b\cdot a^2\}$ です。

次に群の表現を見ていきます。まず、準同型写像 (homomorphism) を定義します。群 G があり、G から別の群 K への写像を F とします。$g_1, g_2 \in G$ に対して

$$F(g_1\cdot g_2) = F(g_1)\circ F(g_2) \quad (F(g_1), F(g_2)\in K)$$

となるなら、F は準同型写像となります。左辺は G での積、右辺は K での積として区別するために「$\cdot$」,「$\circ$」を使っています。G での積 $g_1\cdot g_2$ を写像 F によって K での積 $k_1\circ k_2$ $(k_1, k_2\in K)$ にしているだけです。単位元 $e\in G$ に対しては

$$F(e) = F(e\cdot e) = F(e)\circ F(e)$$

なので、G の単位元は K の単位元 $F(e)$ になります。$a\in G$ の逆元 a^{-1} では

$$F(e) = F(a\cdot a^{-1}) = F(a)\circ F(a^{-1})$$

なので、$a\in G$ の逆元 a^{-1} は $F(a^{-1}) = (F(a))^{-1}$ として $F(a)\in K$ の逆元になります。このように、準同型写像は積、単位元、逆元を与え、群の積の構造を維持します (ただし、全単射である必要はない)。また、これらから分かるように、準同型写像の像 (image) は K の部分群です。

準同型写像でのカーネル (kernal)Ker$F$ は

$$\mathrm{Ker}F = \{g\in G|\ F(g) = e\in K\}$$

として定義されています。つまり、K の単位元になる $g\in G$ のことです。単位元は G, K の両方で e としているので気をつけてください。

カーネルは G の正規部分群になります。G の単位元 e は $F(e) = e$ なので Ker$F$ にいて、$a\in \mathrm{Ker}F$ の逆元 a^{-1} は $F(a^{-1}) = (F(a))^{-1} = e^{-1} = e$ なので Ker$F$ にいます。$a, b\in \mathrm{Ker}F$ に対して

$$F(a\cdot b) = F(a)\circ F(b) = e\circ e = e$$

なので、演算に対して $a\cdot b\in \mathrm{Ker}F$ です。よって、Ker$F$ は G の部分群です。さらに、任意の $g\in G$ に対して、$g^{-1}\cdot a\cdot g\in \mathrm{Ker}F$ なら正規部分群です。g の逆元を g^{-1} として、$F(g^{-1}) = (F(g))^{-1}$ から

$$\begin{aligned}
F(g^{-1}\cdot a\cdot g) &= (F(g))^{-1}\circ F(a)\circ F(g)\\
&= (F(g))^{-1}\circ e\circ F(g) \quad (a\in \mathrm{Ker}F)\\
&= e
\end{aligned}$$

なので、$g^{-1}\cdot a\cdot g\in \mathrm{Ker}F$ です。よって、Ker$F$ は G の部分群で $g^{-1}\cdot a\cdot g\in \mathrm{Ker}F$ なので、Ker$F$ は G の正規部分群です。

Ker$F$ による商群 $G/\mathrm{Ker}F$ と F の像 $\{k\in K|\ k = F(g),\ g\in G\}$ は同型になります。これを示すには、A を $G/\mathrm{Ker}F$ から $F(g)\in K$ への写像としたとき、A が同型写像であることを示せばいいです。$G/\mathrm{Ker}F$ は左余剰類 $g\mathrm{Ker}F$ が元なので $g\cdot q\in g\mathrm{Ker}F$ $(q\in \mathrm{Ker}F)$ として、$A(g\cdot q) = F(g)$ とします (全射)。$g_1 = g_2\cdot q$ とすれば、

$$A(g_1 \cdot q) = F(g_1) = F(g_2 \cdot q) = F(g_2) \circ F(q) = F(g_2) \circ e = F(g_2) = A(g_2 \cdot q)$$

これから

$$A(g_1 \cdot q) \circ A(g_2 \cdot q) = F(g_1) \circ F(g_2) = F(g_1 \cdot g_2) = A((g_1 \cdot g_2) \cdot q)$$

よって、$g\mathrm{Ker}F$ に対して A は準同型写像です。そして、$A(g_1 \cdot q) = A(g_2 \cdot q)$ とすれば、$F(g_1) = F(g_2)$ なので

$$e = (F(g_2))^{-1} \circ F(g_1) = F(g_2^{-1} \cdot g_1)$$

となり、$g_2^{-1} \cdot g_1 = e$ から $g_1 \cdot q = g_2 \cdot q$ です (単射)。よって、A は同型写像になり、$G/\mathrm{Ker}F$ と F の像は同型です。
群 G の元から有限次元ベクトル空間 V の線形演算子 (V から V への線形写像) への写像 ϕ が

$$\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

となっているとき、ϕ を V における群 G の表現 (representation)、V を表現空間 (representation space) と定義します。$g_1 \neq g_2$ で $\phi(g_1) \neq \phi(g_2)$ (全単射の場合、同型写像) となるなら、表現は忠実 (faithful) と言われます。線形演算子は、線形演算子の積と恒等演算子を与え、逆変換が可能とすることで群を構成できます。なので、表現は群 G からベクトル空間 V の線形演算子による群への準同型写像です。ただし、今の右辺のように積の記号「$\cdot$」を省いていきます。
表現の簡単な例は、群の元すべてに対してベクトル空間の恒等演算子 1 になる $\phi(g) = 1$ で (同型写像ではない)、自明な表現 (trivial representation) と呼ばれます。
有限次元ベクトル空間での線形演算子は適当な基底を与えれば行列にできます。そして、行列の積、単位行列、逆行列から正則行列は群を作れます。このため、表現は群から $n \times n$ 正則行列の群 $GL(n, \mathrm{C})$ への準同型写像と言えます。つまり、適当な基底が与えられたとき、表現を与える線形演算子 ϕ は、n 次元ベクトル空間 V^n から n 次元複素空間 C^n への同型写像 T によって、$g \in G$ に対応する行列 $\Pi(g) \in GL(n, \mathrm{C})$ へ

$$\Pi(g) = T\phi(g)T^{-1}$$

と変換され、Π は G から $GL(n, \mathrm{C})$ への準同型写像となります。準同型写像になっていることは

$$\begin{aligned}\Pi(g_1 \cdot g_2) &= T\phi(g_1 \cdot g_2)T^{-1} \\ &= T(\phi(g_1)\phi(g_2))T^{-1} \\ &= T\phi(g_1)T^{-1}T\phi(g_2)T^{-1} \\ &= \Pi(g_1)\Pi(g_2)\end{aligned}$$

から確かめられます。
内積を $<,>$ と表記します。表現空間を内積空間 V とし、G に対する表現 Π の内積が

$$< \Pi(g)v, \Pi(g)w > = < v, w > \qquad (g \in G\ ,\ v, w \in V)$$

となるなら、Π はユニタリー表現と定義されます。簡単に言えば、ユニタリー行列になる場合です。例えば実数 R による群とし、1 次元の表現空間とすれば、$\Pi(x) = e^{ix}$ $(x \in \mathrm{R})$ はユニタリー表現です。

二面体群を使って表現の例を見ます。正三角形での $D_6 = \{e, a, a^2, a^3 = e, b, b^2 = e, b\cdot a, b\cdot a^2\}$ を使います。D_6 の a は正三角形を 120 度回転させることに対応するので、3 次元空間での基底の 120 度回転は D_6 と同じ構造と予想できます。そして、2 つの頂点の入れ替えは基底の反転に対応させます。

というわけで、3 次元実ベクトル空間として、基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{e}_3$ 軸周りに 120 度 $(2\pi/3)$ 回転させる行列を持ってきます。基底の回転は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= \cos\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{e}_2 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2 \\
\boldsymbol{e}'_2 &= -\sin\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{e}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 \\
\boldsymbol{e}'_3 &= \boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

なので、a の表現 $\Pi(a)$ は $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ に作用する 3 次元回転行列として

$$\Pi(a) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} & 0 \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a^2 は回転を 2 回行うことと $\Pi(a\cdot a) = \Pi(a)\Pi(a)$ が対応し

$$\Pi(a^2) = \Pi(a)\Pi(a) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Pi(a^3) = \Pi(a)\Pi(a)\Pi(a)$ は 3×3 単位行列 I_3 です。b の頂点の入れ替えは空間反転に対応させて、$\boldsymbol{e}_2$ を反転させることにして

$$\Pi(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Pi(b^2) = I_3$$

$\Pi(b)\Pi(a), \Pi(b)\Pi(a^2)$ も同様に求められ、D_6 の構造と同じになります。このように、今の Π は D_6 から $GL(3, \mathrm{R})$ への表現となります。

正方形による二面体群 $D_8 = \{e, a, a^2, a^3, a^4 = e, b, b^2 = e, b\cdot a, b\cdot a^2, b\cdot a^3\}$ も見ておきます。表現空間を 2 次元実ベクトル空間として、基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の 90 度回転と対応させます。なので、2 次元回転行列として

$$A = \Pi(a) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e}_2$ の反転として (I_2 は 2×2 単位行列)

$$B = \Pi(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とします。90 度回転なので $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は A の作用で

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \ \Rightarrow \ (\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1) \ \Rightarrow \ (-\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2) \ \Rightarrow \ (-\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) \ \Rightarrow \ (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

となり、B は $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \Rightarrow (\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2)$ となります。行列は

$$\begin{aligned}
&A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A^4 = I_2 \\
&B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B^2 = I_2 \\
&BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ BA^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ BA^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

なので、D_8 から $GL(2, \mathrm{R})$ への表現となります。

V^n から C^n への同型写像は 1 つでなく、基底の選び方に依存していくつも存在します。なので、別の同型写像 T' によって表現を

$$\Pi'(g) = T'\phi(g)T'^{-1} = T'T^{-1}T\phi(g)T^{-1}TT'^{-1} = T'T^{-1}\Pi(g)TT'^{-1}$$

としていくつも作れます。このとき、G から $GL(n, \mathrm{C})$ への表現 Π, Π' が

$$\Pi'(g) = S\Pi(g)S^{-1}$$

となる同型写像 S ($n \times n$ 正則行列) が存在するなら、表現 Π, Π' は同値 (equivalence) と定義されます。これは行列の相似変換に対応します。

より一般的にすれば、ϕ をベクトル空間 V 上の線形演算子への表現、ϕ' をベクトル空間 W 上の線形演算子への表現としたとき、$\phi'(g) = S\phi(g)S^{-1}$ となる V から W への同型写像 S が存在すれば、ϕ, ϕ' は同値です。例えば、ベクトル空間を V, W として、$v \in V, w \in W$、v の変換行列を A、w の変換行列を B とし、S は $w = Sv, \ B = SAS^{-1}$ とすれば

$$Bw = SAS^{-1}Sv = S(Av)$$

これから、ベクトル w を B で変換したベクトル $Bw \in W$ は、ベクトル v を変換したベクトル $Av \in V$ に S を作用したものと同じです。つまり、同値なら $w = Sv$ が A, B の変換後でも成立します。このように、v (V) から w (W) 経由で Bw (W) に行くのと、v (V) から Av (V) 経由で Bw (W) に行くのが同じ結果になれば同値で、行列の相似変換です。

D_8 の $GL(2, \mathrm{R})$ の表現は (1) ですが、複素数にした $GL(2, \mathrm{C})$ では

$$A' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \ , \ B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とできます。実際に、この場合でも

$$A'^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ A'^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \ , \ A'^4 = I_2 \ , \ B'^2 = I_2$$

となり、他の場合も同様です。このとき、変換の行列 T を

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \ , \ T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

とすれば

$$TAT^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = A'$$

$$TBT^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B'$$

となり、他の場合も同様で、2 つの表現は同値です。

また、$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ に A を作用させてから T を作用させて複素ベクトル空間に持っていく場合は

$$A \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ -\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ -\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ -\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 + i\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 - i\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix}$$

先に $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ に T を作用させて複素ベクトル空間に持って行ってから A' を作用させた場合は

$$T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$A' \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 + i\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 - i\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix}$$

となって一致するので、同値であることが直接分かります (A' は A の $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ から $(\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1)$ への変換を反映している)。

最後に、可約、既約の定義を与えます。ここでは V_1, V_2 としますが、$V_1, V_2, \ldots, V_n$ でも同様に定義されます。

群 G があり、ベクトル空間 V の表現を Π、V の部分空間を W として、$w \in W$ に対して $\Pi(g)w \in W$ $(g \in G)$ となるとき、W を不変な部分空間と定義します。

$\Pi(g)$ $(g \in G)$ を $GL(n, V)$ とします。ここで、V が 2 つの部分空間 V_1, V_2 $(V_1 \cap V_2 = \{0\})$ の直和によって $V = V_1 \oplus V_2$ と書けるとします。そうすると、V のベクトル v は V_1, V_2 のベクトル v_1, v_2 の和として

$$v = v_1 + v_2$$

と書け、V の基底は V_1, V_2 の基底を合わせたものです (V の次元は V_1 の次元と V_2 の次元の和)。この和を $v = (v_1, v_2) = (v_1, 0) + (0, v_2)$ と表記して

$$\Pi(g)v = \begin{pmatrix} \Pi_1(g) & D_1(g) \\ D_2(g) & \Pi_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\Pi_1(g), \Pi_2(g), D_1(g), D_2(g)$ は行列です。また、$\Pi(g_1 \cdot g_2) = \Pi(g_1)\Pi(g_2)$ から

$$\begin{pmatrix} \Pi_1(g_1 \cdot g_2) & D_1(g_1 \cdot g_2) \\ D_2(g_1 \cdot g_2) & \Pi_2(g_1 \cdot g_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1(g_1) & D_1(g_1) \\ D_2(g_1) & \Pi_2(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1(g_2) & D_1(g_2) \\ D_2(g_2) & \Pi_2(g_2) \end{pmatrix}$$

となります。$v_2 = 0$ として V_1 での $(v_1, 0)$ に $\Pi(g)$ を作用させると

$$\begin{pmatrix} \Pi_1(g) & D_1(g) \\ D_2(g) & \Pi_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1(g)v_1 \\ D_2(g)v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

ここで、V_1 を不変な部分空間とすると、$\Pi(g)v_1 \in V_1$ から上の成分だけが残る必要があるので $(v'_2 = 0)$、$D_2(g) = 0$ となり、$v'_1 = \Pi_1(g)v_1$ となります。このため、Π_1 は V_1 での表現となります。

このように、V での表現 Π から V の不変な部分空間の表現が出てくるとき、Π は可約 (reducible) と呼ばれます。言い換えれば、V が不変な部分空間を持つとき Π は可約表現となります。可約でないなら既約 (irreducible) と呼びます。なので、ある表現が既約なら、それより小さい表現にならないです（V_1 は V の部分空間なので V_1 での表現は V より小さいと言える)。

というわけで、行列が

$$\begin{pmatrix} \Pi_1(g) & D_1(g) \\ 0 & \Pi_2(g) \end{pmatrix}$$

という形なら可約表現です。可約表現では

$$\begin{pmatrix} \Pi_1(g) & D_1(g) \\ 0 & \Pi_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1(g)v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} \Pi_1(g) & D_1(g) \\ 0 & \Pi_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g)v_2 \\ \Pi_2(g)v_2 \end{pmatrix}$$

となるので、V_1 は不変な部分空間ですが、V_2 はそうではないです。

V_1, V_2 を不変な部分空間とし、$D_1(g), D_2(g)$ が 0 のとき

$$\begin{pmatrix} \Pi_1(g) & 0 \\ 0 & \Pi_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1(g)v_1 \\ \Pi_2(g)v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1(g)v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_2(g)v_2 \end{pmatrix}$$

$\Pi(g)v_1 \in V_1,\ \Pi(g)v_2 \in V_2$ なので、Π_1, Π_2 は V_1, V_2 の表現となります。このように、$\Pi(g)$ の対角部分だけが 0 でないとき、Π は完全可約 (completely reducible) と呼ばれます。細かく言えば、V_1, V_2 が不変な部分空間で Π_1, Π_2 が既約な表現なら、$V = V_1 \oplus V_2$ での表現 Π は完全可約表現となります。V が不変な部分空間 V_1, V_2 によって $V = V_1 \oplus V_2$ となるなら Π は decomposable と言います。

ある表現の行列がこれらの形になっていなくても、その全ての行列が基底の変換でその形にできるなら可約、完全可約表現です。