ガンマ関数

物理でよく出てくる特殊関数であるガンマ関数について見ていきます。
複素数の知識を少し使っています。

階乗 $n!$ を計算するための公式を見つけようとしてオイラー (Euler) が見つけたのがガンマ関数です。ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}\qquad(\mathrm{Re}z>0)\tag{1}$$

と定義されています (z は複素数、Rez は z の実部)。これは第二種オイラー積分とも呼ばれます。これが階乗と関係するのは

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)&=\int_0^\infty dt\ t^ze^{-t}=[-t^ze^{-t}]_0^\infty+\int_0^\infty dt\ zt^{z-1}e^{-t}=z\int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}=z\Gamma(z)\\\Gamma(z)&=\int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}=[\frac{1}{z}t^ze^{-t}]_0^\infty+\int_0^\infty dt\ \frac{1}{z}t^ze^{-t}=\frac{1}{z}\Gamma(z+1)\\\Gamma(1)&=\int_0^\infty dt\ e^{-t}=[-e^{-t}]_0^\infty=1\end{aligned}$$

から、z が整数 n のとき

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!$$

となるからです。ちなみに t^z は

$$t^z=e^{z\log t}=e^{(x+iy)\log t}=e^{x\log t}e^{iy\log t}$$

となっていることと (x,y は実数)、Re$z=x$ が 0 より大きいことから、$t=0$ のとき t^z は 0 になります ($\log t$ は $t=0$ の極限で $-\infty$)。$e^{iy\log t}$ は

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

なので、θ が大きくなっても影響を与えません。
Re$z>0$ は積分が収束するための必要な条件にもなっているので、それを見ておきます。まず積分を

$$\int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}=\int_0^1 dt\ t^{z-1}e^{-t}+\int_1^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}\tag{2}$$

と分離します。これの第 1 項から見ていきます。第 1 項は z 次第で $t=0$ のときに発散しそうなので、下限の 0 を ϵ とします。積分の絶対値の不等式を使うと、$z=x+iy$ (x,y は実数) として

$$|\int_\epsilon^1 dt\ t^{z-1}e^{-t}| \leq \int_\epsilon^1 dt\ |t^{z-1}e^{-t}|$$

$$= \int_\epsilon^1 dt\ |e^{(z-1)\log t}e^{-t}|$$

$$= \int_\epsilon^1 dt\ |e^{(x-1+iy)\log t}||e^{-t}|$$

$$= \int_\epsilon^1 dt\ |e^{(x-1)\log t}||e^{iy\log t}||e^{-t}|$$

$$= \int_\epsilon^1 dt\ e^{(x-1)\log t}e^{-t}$$

$$= \int_\epsilon^1 dt\ t^{x-1}e^{-t}$$

e^{-t} は t が正なら 1 以下なので

$$t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1} \quad (t > 0)$$

これから、積分は被積分関数を足していったものであることを踏まえれば

$$\int_\epsilon^1 dt\ t^{x-1}e^{-t} < \int_\epsilon^1 dt\ t^{x-1} = \frac{1}{x}[t^x]_\epsilon^1 = \frac{1}{x} - \frac{\epsilon^x}{x}$$

よって、ϵ を 0 の極限に取ったとき、$x > 0$ なら積分に上限があることになります。なので、(2) の第 1 項は $x > 0$ で収束しています。

次に (2) の第 2 項を見ます。第 2 項では t が無限大のときにどうなるかなので、積分範囲の上限を δ として

$$|\int_1^\delta dt\ t^{z-1}e^{-t}| \leq \int_1^\delta dt\ t^{x-1}e^{-t}$$

e^t のテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$$

から、$n = m$ は

$$e^t > \frac{t^m}{m!}$$

なので

$$e^{-t} < \frac{m!}{t^m}$$

$$t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1-m}m!$$

これを入れて、m は n に書き換えて

$$\int_1^\delta dt\ t^{x-1}e^{-t} < n!\int_1^\delta dt\ t^{x-1-n} = n!\Big[\frac{t^{x-n}}{x-n}\Big]_1^\delta = n!\frac{\delta^{x-n}-1}{x-n}$$

n は任意に取れるので $n > x+1$ とすれば、δ^{x-n} は δ の増加で十分早く減少させられます (分母も 0 にならない)。なので、δ の無限大の極限を取れば

$$n!\lim_{\delta\to\infty}\int_1^\delta dt\ t^{x-1-n} = \frac{n!}{n-x}$$

となり、積分の上限が与えられます。というわけで、(2) は $\mathrm{Re}z > 0$ で収束しています。

ガンマ関数の定義の仕方は (2) 以外にもいろいろとあります。例えば、x を $x > 0$ の実数としたとき関数 $f(x)$ が

$$f(x) > 0\ ,\ f(x+1) = f(x)$$

となり、$\log f(x)$ が凸関数になるなら、$f(x)$ はガンマ関数 $\Gamma(x)$ $(x > 0)$ となります。

(2) によって定義されるガンマ関数は複素平面の右半面 $\mathrm{Re}z > 0$ で与えられています。しかし、複素平面全体に広げることができます。まず、ガンマ関数は

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\mathrm{Re}z > 0)$$

で与えられて、$\Gamma(z)$ には $\mathrm{Re}z > 0$ の条件があるとします。ここで、$\Gamma(z+1)$ では z の条件が $\mathrm{Re}(z+1) > 0$ $(\mathrm{Re}z > -1)$ となることを利用します。つまり、式を

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

と書き換えたとき、右辺は $\Gamma(z+1)$ なので $\mathrm{Re}z > -1$ で定義できることから、左辺も $\mathrm{Re}z > -1$ で定義できます。$\mathrm{Re}z > -1$ に広げたガンマ関数を $\Gamma'(z)$ と書くことにして

$$\Gamma'(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad (\mathrm{Re}z > -1)$$

とします。この $\Gamma'(z)$ は $\mathrm{Re}z > -1$ で定義されていますが、右辺から分かるように $z = 0$ に 1 位の極を持っています。$\mathrm{Re}z > 0$ では $\Gamma'(z)$ と $\Gamma(z)$ は同じ式になるので

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \quad (\mathrm{Re}z > 0)$$

このように、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}z > -1$ でのガンマ関数 $\Gamma'(z)$ に解析接続されます。簡単に言えば、D_1 で定義される正則な $f_1(z)$ と、D_2 で定義される正則な $f_2(z)$ があり、2 つには共通部分 D があるとし、D_1, D_2 全体で定義される正則な $g(z)$ があるとき、f_2 は f_1(f_1 は f_2) の解析接続 (analytic continuation) と言います。これは $f_1(z), f_2(z)$ を $\Gamma(z), \Gamma'(z)$ にすれば今の状況になるのが分かると思います。

同様に $\Gamma'(z)$ から

$$\Gamma''(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{z}$$

を作ることができ、この場合は $\Gamma'(z)$ が $\mathrm{Re}z > -1$ だったので、$\Gamma'(z+1)$ から $\mathrm{Re}z > -2$ になります。$\Gamma(z)$ まで戻せば

$$\Gamma''(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \qquad (\mathrm{Re}z > -2)$$

なので、$z = 0, -1$ に 1 位の極を持ちます。
　この作業を繰り返すことで

$$\Gamma_n(z+1) = z\Gamma_n(z) \qquad (\mathrm{Re}z > -n+1)$$

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{z}\Gamma_1(z+1) \qquad (\mathrm{Re}z > 0)$$

$$\Gamma_2(z) = \frac{\Gamma_1(z+1)}{z} \qquad (\mathrm{Re}z > -1)$$

$$\Gamma_3(z) = \frac{\Gamma_1(z+2)}{z(z+1)} \qquad (\mathrm{Re}z > -2)$$

$$\Gamma_4(z) = \frac{\Gamma_1(z+3)}{z(z+1)(z+2)} \qquad (\mathrm{Re}z > -3)$$

となり、ガンマ関数は複素平面全体に拡張されます。このときも

$$\Gamma_n(1) = 1\ ,\ \Gamma_n(m+1) = m!$$

となります (m は整数)。このように複素平面全体に拡張された $\Gamma_n(z)$ もガンマ関数と呼ばれます。ただし、積分 (1) は $\mathrm{Re}z > 0$ でのみ定義されています。特に区別する必要性もないので、$\Gamma_n(z)$ を $\Gamma(z)$ と書きます。$\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \ldots$ で 1 位の極を持ち、$z = -n$ (n は正の整数) での留数は

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

から

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma_1(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{1}{(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

と求まります。
　ガンマ関数は微分できます。ここでは実数 $x > 0$ の場合を示します。h を微小として

$$\Gamma(x+h) = \int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x+h-1}$$

を考えます。テイラー展開して

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x+h) =& \int_0^\infty dt\ e^{-t}\exp[(x+h-1)\log t] \quad (t^y = \exp[y\log t]) \\
=& \int_0^\infty dt\ e^{-t}e^{-\log t}\exp[(x+h)\log t] \\
\simeq& \int_0^\infty dt\ e^{-t}e^{-\log t}(\exp[x\log t] + h\frac{d}{dx}\exp[(x+h)\log t]|_{h=0} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2}{dx^2}\exp[(x+h)\log t]|_{h=0}) \\
=& \int_0^\infty dt\ e^{-t}e^{-\log t}(e^{x\log t} + he^{x\log t}\log t + \frac{1}{2}h^2e^{x\log t}(\log t)^2) \\
=& \int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1} + \int_0^\infty dt\ e^{-t}e^{-\log t}(he^{x\log t}\log t + \frac{1}{2}h^2e^{x\log t}(\log t)^2) \\
=& \Gamma(x) + h\int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}\log t + \frac{1}{2}h^2\int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2) \\
\Gamma(x+h) - \Gamma(x) =& h\int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}\log t + \frac{1}{2}h^2\int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2
\end{aligned}
$$

このとき、第 2 項の積分が収束していれば微分を定義できます。それを確かめます。ガンマ関数の収束性と同じように

$$
\int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2 = \int_0^1 dt\ e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2 + \int_1^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2
$$

e^{-t} は t が 0 から 1 なら $e^{-t} \leq 1$、$(\log t)^2$ は $t \geq 1$ のとき t^2 より小さいことから

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dt\ e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2 + \int_1^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2 \leq& \int_0^1 dt\ t^{x-1}(\log t)^2 + \int_1^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}t^2 \\
=& \int_0^1 dt\ t^{x-1}(\log t)^2 + \int_1^\infty dt\ e^{-t}t^{x+2-1} \\
=& \int_0^1 dt\ t^{x-1}(\log t)^2 - \int_0^1 dt\ e^{-t}t^{x+1} + \Gamma(x+2) \\
\leq& \int_0^1 dt\ t^{x-1}(\log t)^2 + \Gamma(x+1)
\end{aligned}
$$

最後は $e^{-t}t^{x+1}$ の $t = 0 \sim 1$ での積分は必ず正だからです。第 1 項の積分は実行できますが、この時点で明らかに有限だと分かります（$t = 0$ の極限で $t^{x-1}\log t$ は 0 になる）。よって、ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は $x > 0$ のとき微分可能で

$$
\lim_{h\to 0}\frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h} = \int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}\log t
$$

同じ話を繰り返すことで、N 回微分は

$$
\Gamma^{(N)}(x) = \int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1}(\log t)^N
$$

と求まります。

ガンマ関数が出てくる典型的な積分として

$$
I=\int_0^\infty dt\ t^{x-1}e^{-t^a}\qquad (x,a>0)
$$

というのがあります。これは $u=t^a$ とすれば

$$
\begin{aligned}
I=\int_0^\infty dt\ t^{x-1}e^{-t^a}&=\frac{1}{a}\int_0^\infty du\ t^{x-a}e^{-u}\qquad (u=t^a\ ,\ du=at^{a-1}dt=au^{-1}dt)\\
&=\frac{1}{a}\int_0^\infty du\ u^{x/a-1}e^{-u}\qquad (t^{-a}=u^{-1}\ ,\ t^x=u^{x/a})\\
&=\frac{1}{a}\Gamma(\frac{x}{a})
\end{aligned}\tag{3}
$$

なので、ガンマ関数が分かっていれば I を求められます。また、後で具体的に出てきますが $c>0$ として

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty dt\ t^{x-1}e^{-ct^2}&=\frac{1}{2}\int_0^\infty dt^2\ \frac{1}{t}t^{x-1}e^{-ct^2}\qquad (2tdt=dt^2)\\
&=\frac{1}{2c}\int_0^\infty ds^2\ \frac{1}{t}t^{x-1}e^{-s^2}\qquad (s^2=ct^2)\\
&=\frac{1}{c}\int_0^\infty ds\ \frac{s}{t}t^{x-1}e^{-s^2}\\
&=\frac{1}{c^{x/2}}\int_0^\infty ds\ s^{x-1}e^{-s^2}\qquad (t=\frac{s}{\sqrt{c}})\\
&=\frac{1}{2}c^{-x/2}\Gamma(\frac{x}{2})
\end{aligned}\tag{4}
$$

となります。積分は正になるので、正になるように符合を選んでいます。
　今度はガンマ関数の積を考え、ベータ関数を定義します。$\mathrm{Re}p,\mathrm{Re}q>0$ として

$$
\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{p-1}\int_0^\infty ds\ e^{-s}s^{q-1}=\int_0^\infty dtds\ e^{-(t+s)}t^{p-1}s^{q-1}
$$

変数変換を

$$
t=\alpha(1-\beta)\ ,\ s=\alpha\beta
$$

とします。α を 0 から ∞ に取れば、β は 0 から 1 になります。変数変換はヤコビアンから

$$
\begin{vmatrix}\dfrac{\partial t}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial t}{\partial\beta}\\ \dfrac{\partial s}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial s}{\partial\beta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\beta & -\alpha\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}=\alpha(1-\beta)+\alpha\beta=\alpha
$$

$|\ |$ は行列式です。よって

$$
\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) =& \int_0^\infty d\alpha \int_0^1 d\beta\ \alpha e^{-\alpha}(\alpha(1-\beta))^{p-1}(\alpha\beta)^{q-1} \\
=& \int_0^\infty d\alpha \int_0^1 d\beta\ e^{-\alpha}\alpha^{p+q-1}(1-\beta)^{p-1}\beta^{q-1} \\
=& \int_0^\infty d\alpha\ e^{-\alpha}\alpha^{p+q-1}\int_0^1 d\beta(1-\beta)^{p-1}\beta^{q-1} \\
=& \Gamma(p+q)\int_0^1 d\beta(1-\beta)^{p-1}\beta^{q-1} \\
\int_0^1 dt\ t^{p-1}(1-t)^{q-1} =& \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}
\end{aligned}
$$

最後に記号を書き直しています。これはベータ関数 $B(p,q)$ と呼ばれ

$$
B(p,q) = \int_0^1 dt\ t^{p-1}(1-t)^{q-1} \qquad (\mathrm{Re}p, \mathrm{Re}q > 0)
$$

と定義されます。また、$t = \cos^2\theta$ とすれば

$$
\begin{aligned}
B(p,q) =& \int_0^1 dt\ t^{p-1}(1-t)^{q-1} \\
=& -2\int_{\pi/2}^0 d\theta\ \sin\theta\cos\theta(\cos\theta)^{2(p-1)}(1-\cos^2\theta)^{q-1} \qquad (dt = -2\sin\theta\cos\theta d\theta) \\
=& 2\int_0^{\pi/2} d\theta\ \sin\theta\cos\theta(\cos\theta)^{2(p-1)}(\sin^2\theta)^{q-1} \\
=& 2\int_0^{\pi/2} d\theta\ (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}
\end{aligned}
$$

と書き換えられます。
　ベータ関数を使うと

$$
\begin{aligned}
B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) =& \int_0^1 dt\ t^{1/2-1}(1-t)^{1/2-1} \\
=& \int_0^1 dt\ t^{-1/2}(1-t)^{-1/2} \\
=& 2\int_0^1 ds(1-s^2)^{-1/2} \qquad (s = t^{1/2}\ ,\ ds = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}s^{-1}dt) \\
=& -2\int_0^1 d\theta\sin\theta(1-\cos^2\theta)^{-1/2} \qquad (s = \cos\theta\ ,\ ds = -\sin\theta d\theta) \\
=& -2\int_{\pi/2}^0 d\theta \\
=& \pi
\end{aligned}
$$

そして、ガンマ関数とは

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=(\Gamma(\frac{1}{2}))^2$$

実数 $x>0$ のガンマ関数 $\Gamma(x)$ は正なので、$\Gamma(1/2)$ は

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

と求まります。これによって、ガンマ関数を直接計算したときに出てくる ((3) での $a=2, x=1$)

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty dt\ t^{-1/2}e^{-t}=2\int_0^\infty du\ e^{-u^2}\qquad (t=u^2\ ,\ dt=2udu)$$

という積分が

$$\int_0^\infty du\ e^{-u^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となることも分かります。また、三角関数の積分として

$$\begin{aligned}B(x,\frac{1}{2})&=2\int_0^{\pi/2}d\theta\ (\cos\theta)^{2x-1}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(x+1/2)}=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1/2)}\sqrt{\pi}\\ B(\frac{1}{2},x)&=2\int_0^{\pi/2}d\theta\ (\sin\theta)^{2x-1}=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1/2)}\sqrt{\pi}\end{aligned}\tag{5}$$

というのも与えることが出来ます。

ベータ関数 $B(1-z,z)$ を求めます。これは

$$B(1-z,z)=\frac{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}{\Gamma(1)}=\Gamma(1-z)\Gamma(z)$$

ベータ関数の定義から

$$\begin{aligned}\Gamma(1-z)\Gamma(z)=&\int_0^1 dt\ t^{-z}(1-t)^{z-1}\\ =&-\int_\infty^0 dv\frac{1}{(1+v)^2}\frac{1}{(1+v)^{-z}}\frac{v^{z-1}}{(1+v)^{z-1}}\qquad (t=\frac{1}{1+v}\ ,\ dt=-\frac{dv}{(1+v)^2})\\ =&\int_0^\infty dv\frac{v^{z-1}}{1+v}\end{aligned}$$

「複素積分の例」で $0<\mathrm{Re}z<1$ の場合を計算していて

$$\int_0^\infty dv\frac{v^{z-1}}{1+v}=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

後は解析接続によって、$z=0,\pm1,\pm2,\ldots$ を除いた複素平面に拡張できるので

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

これをガンマ関数の相反公式 (reflection formula) と言います。

ガンマ関数による不等式を求め、それからスターリング (Stirling) の公式を求めます。$x>0$ を実数とします。まず、変数変換 $t=x(1+\alpha)$ によって、ガンマ関数を

$$\begin{aligned}\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1} &= \int_{-1}^\infty d\alpha\ xe^{-x(1+\alpha)}(x(1+\alpha))^{x-1} \\ &= x^x e^{-x}\int_{-1}^\infty d\alpha\ e^{-x\alpha}(1+\alpha)^{x-1} \\ &= x^x e^{-x}F(x) \qquad (6)\end{aligned}$$

とします。exp に書き換えると

$$e^{-x\alpha}(1+\alpha)^{x-1} = e^{-x\alpha}\exp[(x-1)\log[1+\alpha]] = \exp[-x(\alpha-\log[1+\alpha])-\log[1+\alpha]]$$

ここで、$u^2=\alpha-\log[1+\alpha]$ として

$$2udu = \frac{\alpha}{1+\alpha}d\alpha$$

u は、α が -1 のとき $-\infty$ になるように

$$u = |\alpha-\log[1+\alpha]|^{1/2} \quad (0\leq\alpha<\infty)$$

$$u = -|\alpha-\log[1+\alpha]|^{1/2} \quad (-1<\alpha<0)$$

と与えます。u に変換すると

$$\begin{aligned}F(x) = \int_{-1}^\infty d\alpha\ e^{-x\alpha}(1+\alpha)^{x-1} &= \int_{-1}^\infty d\alpha\ \ \exp[-x(\alpha-\log[1+\alpha])-\log[1+\alpha]] \\ &= 2\int_{-\infty}^\infty du\ \frac{u}{\alpha(u)}\exp[\log[1+\alpha]]\exp[-xu^2-\log[1+\alpha]] \\ &= 2\int_{-\infty}^\infty du\ \frac{u}{\alpha(u)}e^{-xu^2}\end{aligned}$$

$\alpha(u)$ は $u^2=\alpha-\log[1+\alpha]$ によるものです。

今の積分は $e^{-x\alpha}$ がいることから $\alpha=0$ 付近の寄与が主になっていると考えて、$\alpha=0$ での展開を使って

$$u^2(\alpha) \simeq 0 + (1-\frac{1}{1+\alpha})|_{\alpha=0}\alpha + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\alpha)^2}|_{\alpha=0}\alpha^2$$

第 2 項は $\alpha=0$ で消して、第 3 項の $\alpha=0$ は $\epsilon\to0$ として残しておいて

$$u^2(\alpha) \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\epsilon)^2}\alpha^2$$

$$u(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{1+\epsilon}$$

α の範囲の対する u の定義から

$$\frac{u(\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\epsilon}>0$$

これは $\epsilon\to 0$ で $1/\sqrt{2}$ なので、$1/\sqrt{2}$ との差を見てみると

$$|\frac{u(\alpha)}{\alpha}-\frac{1}{\sqrt{2}}|=|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\epsilon}-\frac{1}{\sqrt{2}}|=\frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{\epsilon}{1+\epsilon}|=|\frac{\epsilon u(\alpha)}{\alpha}|=|\frac{\epsilon}{\alpha}||u(\alpha)|$$

そうすると、$\epsilon\to 0$ から

$$|\frac{\epsilon}{\alpha}||u(\alpha)|\leq|u(\alpha)|$$

となるので

$$\left|\frac{u(\alpha)}{\alpha}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\leq|u(\alpha)|$$

$u(\alpha)/\alpha$ は $F(x)$ に含まれているので、この関係が使えるように積分を作ると

$$\begin{aligned}2\int_{-\infty}^{\infty}du\ e^{-xu^2}(\frac{u}{\alpha(u)}-\frac{1}{\sqrt{2}})&=2\int_{-\infty}^{\infty}du\ e^{-xu^2}\frac{u}{\alpha(u)}-\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}du\ e^{-xu^2}\\&=2\int_{-\infty}^{\infty}du\ e^{-xu^2}\frac{u}{\alpha(u)}-\sqrt{2}\int_{-\infty}^{0}du\ e^{-xu^2}-\sqrt{2}\int_{0}^{\infty}du\ e^{-xu^2}\\&=2\int_{-\infty}^{\infty}du\ e^{-xu^2}\frac{u}{\alpha(u)}-2\sqrt{2}\int_{0}^{\infty}du\ e^{-xu^2}\\&=F(x)-\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\end{aligned}$$

最後の第 2 項の積分は (4) から

$$\int_0^{\infty}du\ e^{-xu^2}=\frac{1}{2}x^{-1/2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

となっています。展開した形を使い、絶対値を取れば

$$
\begin{aligned}
|F(x)-\sqrt{\frac{2\pi}{x}}| &= \big|2\int_{-\infty}^{\infty}du\ e^{-xu^2}(\frac{u}{\alpha(u)}-\frac{1}{\sqrt{2}})\big| \\
&\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}du\ e^{-xu^2}\big|\frac{u}{\alpha}-\frac{1}{\sqrt{2}}\big| \\
&\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}du\ e^{-xu^2}|u| \\
&= \ -2\int_{-\infty}^{0}du\ ue^{-xu^2}+2\int_{0}^{\infty}du\ ue^{-xu^2} \\
&= 4\int_{0}^{\infty}du\ ue^{-xu^2} \\
&= \frac{2}{x}
\end{aligned}
$$

積分は (4) から

$$
\int_0^{\infty}du\ ue^{-xu^2}=\frac{1}{2x}\Gamma(1)=\frac{1}{2x}
$$

となっています。よって

$$
\big|F(x)-\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\big|\leq\frac{2}{x}
$$

これを (6) からガンマ関数に戻すと

$$
\big|\frac{\Gamma(x)}{x^xe^{-x}}-\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\big|\leq\frac{2}{x}
$$

という不等式になります。
　$x\to\infty$ を考えると

$$
\begin{aligned}
\big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(x)}{x^{x-1/2}e^{-x}}-1\big| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \\
\lim_{x\to\infty}\big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(x)}{x^{x-1/2}e^{-x}}-1\big| &\leq \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \\
\lim_{x\to\infty}\big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(x)}{x^{x-1/2}e^{-x}}-1\big| &= 0 \\
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(x)}{x^{x-1/2}e^{-x}} &= 1
\end{aligned}
$$

これの対数を取ると

$$
\begin{aligned}
\log\Gamma(x) &= (x-\frac{1}{2})\log x-x+\log\sqrt{2\pi} \\
&= x\log x-x-\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}\log 2\pi \\
&= x\log x-x+\frac{1}{2}\log\frac{2\pi}{x}
\end{aligned}
$$

となり、スターリングの公式になります。

最後に n 次元球の体積を求めるときにガンマ関数が出てくるのを見ます。いろいろな方法がありますが、n 次元極座標を積分することで求めます (「n 次元極座標」参照)。

実行する積分は、球の半径を r として

$$\Omega_n = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n \qquad (x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \le r^2) \tag{7}$$

というものです。これを n 次元極座標に書き換えると (「n 次元極座標」参照)

$$\Omega_n = \int_0^r d\rho\ \rho^{n-1} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\pi} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-1-k}$$

となります。Π は

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$$

という記号です。ρ と θ_{n-1} の積分は実行して

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= 2\pi \frac{1}{n} r^n \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\pi} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-1-k} \\
&= 2\pi \frac{1}{n} r^n \prod_{k=1}^{n-2} S_k
\end{aligned}$$

S_k は

$$S_k = \int_0^{\pi/2} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1} + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1}$$

これの第 2 項は

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{0} d\theta_k\ (\sin(\theta_k + \pi))^{n-k-1} &= \int_{-\pi/2}^{0} d\theta_k\ (-\sin\theta_k)^{n-k-1} \\
&= -\int_{\pi/2}^{0} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1} \qquad (\sin\theta = -\sin(-\theta)) \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1}
\end{aligned}$$

と変形させれば、(5) によって

$$S_k = 2\int_0^{\pi/2} d\theta_k\ (\sin\theta_k)^{n-k-1} = \frac{\Gamma(\frac{n-k}{2})}{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}\sqrt{\pi}$$

となるので、

$$\prod_{k=1}^{n-2} S_k = (\sqrt{\pi})^{n-2} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n-3}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} \frac{\Gamma(\frac{2}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{(\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma(n/2)}$$

よって、n 次元球の体積は

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= 2\pi \frac{1}{n} r^n \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\pi} d\theta_k \ (\sin\theta_k)^{n-1-k} = 2\pi \frac{1}{n} r^n (\sqrt{\pi})^{n-2} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \\
&= r^n (\sqrt{\pi})^n (\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2}))^{-1} \\
&= r^n (\sqrt{\pi})^n \frac{1}{\Gamma(n/2+1)}
\end{aligned}$$

となります。