関数の極限

関数の極限の基本的な関係を並べています。関数は実関数、定義域は実数としています。
R は実数全体の集合、部分集合の記号には「⊂」を使っています。
「数列と級数」での定義や定理は説明なしで使います。
ϵ, δ や ϵ_1, δ_1 のような添え字付きは極限の定義に使われる記号としています。

[A1] 数列 $\{x_i\}$ による関数の極限。

[A2] 関数の極限の一意性。

[A3] a の r-近傍 $V_r(a)$ を含む定義域において関数 f, g が与えられており、g の a での極限があり、$f(x) = g(x)$ $(x \in V_r(a))$ なら、$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$。

[A4] 関数 $f : X \to \mathrm{R}$ があり、f が極限を持つなら、$|f(x)| \leq s$ $(x \in X)$ となる $s > 0$ がいる。

[A5] 関数 $f, g : X \to \mathrm{R}$ があり、a を X の極限点としたとき、これらが $f(x) \leq g(x)$ $(x \in X,\ x \neq a)$ であり、極限が存在するなら、$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$。

[A6] 関数 $f : X \to \mathrm{R}$ があり、a を X の極限点として、f が $c_1 \leq f(x) \leq c_2$ $(x \in X,\ x \neq a)$ となっており、a で極限を持つなら $c_1 \leq \lim_{x \to a} f(x) \leq c_2$。

[A7] はさみうちの原理。

[A8] 和の極限。

[A9] 定数倍での極限。

[A10] 極限が 0 での積の極限。

[A11] 積の極限。

[A12] 商の極限。

単語の定義から与えていきます。全ての実数の集合は R と表記します。

- 実関数

  X, A を集合とします。関数 f は X の元から A の元へ変えるものとして定義され

$$f:\ X\ \to\ A$$

と表記されます。これは元を使うと、$x \in X,\ y \in A$ として、$y = f(x)$ と書かれます。X は f の定義域 (domain)、A を終域 (codomain) と言います。$f(x)$ による集合 $\{f(x) | x \in X\} \subset A$ を像 (image) と言い、ここでは像を $f(X)$ と表記していきます。「基礎知識」で触れたように像は値域 (range) とも呼ばれ、最近では値域と呼ぶことが増えています。また、定義域が X と与えられているとき、関数 f は X において定義されていると言われます。

ここでの関数は定義域と終域が実数となる関数です。数学記号にすれば、$X \subset \mathrm{R}$ として $f : X \to \mathrm{R}$ です。なので、関数の定義域や像と言っているときは実数です。像が実数になる関数を実関数 (real function) や実数値関数 (real-valued function) と言います。

同じ定義域 X での関数 f, g による和、差、積、商は、$x \in X$ として

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)\ ,\ (fg)(x)=f(x)g(x)\ ,\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

と定義します。商の時は $g(x)\neq 0$ です。また、定数倍は c を実数として

$$(cf)(x)=cf(x)$$

と定義します。

- 関数の有界

  関数 $f:X\to \mathrm{R}$ に対して $|f(x)|\leq M$ $(x\in X)$ となる $M>0$ がいるとき、f は X において有界 (bounded on X) と言われます。

- ϵ-近傍

  a を実数、$\epsilon>0$ としたとき、$\{x\in \mathrm{R}|\ |x-a|<\epsilon\}$ で与えられる集合 $V_\epsilon(a)$ は a の ϵ-近傍 (ϵ-neighborhood) と呼ばれます。開区間 $(a-\epsilon,a+\epsilon)$ は $\{x\in \mathrm{R}|\ |x-a|<\epsilon\}$ と同じなので、開区間を使って定義しても同じです。

- 極限点

  実数のある集合 S があるとし、$x\in S$、a を実数とします。任意の正の実数 $\delta>0$ に対して、$0<|x-a|<\delta$ となる a が存在しているとき、a は集合 S の極限点 (limit point) と定義されます。絶対値なのにわざわざ $0<$ を書いているのは、$x\neq a$ であることをはっきりさせるためです。S の極限点は S に含まれている必要がないことに注意してください。

  極限点は集積点 (accumulation point, cluster point) とも呼ばれます。これらの単語は分野によって言い回しが変わるので注意が必要です。

  極限点は近傍を使っても定義できます。a の δ-近傍 $V_\delta(a)$ は $|x-a|<\delta$ となる x の集合、もしくは開区間で言えば、$(a-\delta,a+\delta)$ での x の集合です。なので、任意の a の δ-近傍 $V_\delta(a)$ が a でない S の点を含んでいるなら、a は S の極限点と定義できます。

- 数列による極限点

  数列を使っても極限点は定義できます。極限が a となる数列 $\{x_i\}$(a に収束する数列) が集合 $S\backslash\{a\}$ に含まれているなら、a は S の極限点となります。集合 S,T による $S\backslash T$ は $S\backslash T=\{x|\ x\in S\ ,\ x\notin T\}$ の意味で、S から T が含む元を除いた集合を表します。今の場合は $x_i\neq a$ の意味です。

  極限点の定義になっていることを示します。示したいのは

(i) 任意の正の実数 δ に対して、$0<|x-a|<\delta$ $(x\in X,\ x\neq a)$。
(ii) 極限が a となる数列 $\{x_i\}$ が集合 $X\backslash\{a\}$ に含まれている。

としたとき、(i) から (ii)、(ii) から (i) になることです。(i) は最初の定義、(ii) が数列による定義です。

(ii) から (i) はそのままです。数列 $\{x_i\}$、正の実数 $\epsilon>0$、正の整数 $N(\epsilon)$ があり、

$$|x_n-a|<\epsilon\quad\ (n>N(\epsilon))$$

となっているなら、a は数列 $\{x_i\}$ の極限です。このとき、a を含まない集合 $S\backslash\{a\}$ に $\{x_i\}$ が含まれているとすれば

$$0 < |x_n - a| < \epsilon \quad (x_i \neq a)$$

となるので、a は S の極限点となります。つまり、極限が a となる数列 $\{x_i\}$ が集合 $S\backslash\{a\}$ に含まれているなら、a は S の極限点です。

(i) から (ii) を示します。a を S の極限点とすれば

$$0 < |x_1 - a| < 1$$

となる $x_1 \in S$ が存在します。さらに

$$0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2}$$

となる $x_2 \in S$ も存在します。ただし、$|x_1 - a|$ のほうが $1/2$ より小さい可能性もあるので、どちらか小さい方を m_2 として

$$0 < |x_2 - a| < m_2 \leq \frac{1}{2}$$

これを続けていけば

$$0 < |x_n - a| < m_2 \leq \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$$

よって、n の無限大で $1/n \to 0$ から、a は数列 $\{x_i\}$ の極限です。

数列によって極限点を簡単に示せる例は、n を正の整数とした $1/n$ による集合です。この集合において数列 $\{1/n\}$ を作れば、これは $n \to \infty$ で 0 に収束します。しかし、$1/n$ による集合には 0 は含まれていないので、0 は極限点です。

- 関数の極限

関数 f の定義域を X とし、$x \in X$ とします。a を X の極限点とし、任意の正の実数 $\epsilon > 0$ に対応する $\delta(\epsilon) > 0$ があり、$0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$ となるとき $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ であるなら、α を $x \to a$ での関数 $f(x)$ の極限と言います。もしくは、$f(x)$ は α に収束すると言われます。関数の極限は簡単に言えば、x を a に十分近づけると、$f(x)$ を α にできる限り近づけられるという意味です。また、極限がなければ $f(x)$ は a で発散すると言います。

極限点によって定義していますが、関数の定義域において $x \neq a$ のとき $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ が成立すると言っているだけです。このため、a を除いて与えられている $X\backslash\{a\}$ において $0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$ となるとき $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ と言っても極限の定義になります。

近傍を使って定義すると極限が何か視覚的に分かりやすくなります。a の δ-近傍を $V_\delta(a)$、α の ϵ-近傍を $V_\epsilon(\alpha)$ とします。$V_\epsilon(\alpha)$ が与えられ、$V_\delta(a)$ の任意の点 $x \neq a$ $(x \in X)$ に対して $f(x)$ が $V_\epsilon(\alpha)$ にいるような $V_\delta(a)$ が存在するなら、α は $f(x)$ の極限となります。単純に言ってしまえば、x, y 軸において、$y = f(x)$ の範囲 $V_\epsilon(\alpha) = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ が与えられたとき、対応する x の範囲 $V_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ が存在するなら、α は $f(x)$ の極限ということです。

極限の表記 lim を使って書くと

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \ , \ \lim_{x \to a}(f(x) - \alpha) = 0$$

となっていて、x を a に近づけたときの $f(x)$ の極限は α ということを表します。極限のよくある問題はこの意味になっていて、$x \to a$ でどうなるかを求めます。このとき注意すべきは、$f(a)$ を求めるのではないということです。つまり、極限の定義は

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1}$$

ではないということです。例えば、$f(x) = 2x$ での $x \to 2$ の極限は $f(2)$ と同じですが (極限の定義になっていることは下の例参照)、これは結果として同じになるというだけです。そして、$f(a)$ が存在していても $\lim f(x) = f(a)$ である必要はないです。(1) では連続と定義されます。

$f(a)$ が定義されていなくても極限がある例として、$f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ とします。これは $x = 3$ で分子と分母が 0 なので定義域は $\mathrm{R}\backslash\{3\}$ (3 を除いた実数) となり、$f(3)$ は与えられません。しかし、$x \neq 3$ のとき

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$$

となるので、極限は $3 + 3 = 6$ として与えられます。定義に当てはめても

$$|f(x) - 6| = |\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6| = |\frac{x^2 - 9 - 6x + 18}{x - 3}| = |\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}| = |\frac{(x-3)^2}{x - 3}| = |x - 3|$$

から、$0 < |x - 3| < \delta$ で $|f(x) - 6| < \epsilon$ となる $\delta = \epsilon$ がいるので、6 は $x = 3$ の極限です。このように、$x = 3$ での $f(3)$ そのものでなく、$x = 3$ に近づけていったときの結果として極限が求まります。

また、今の例は $g(x) = x + 3$ とすれば

$$f(x) = g(x) \quad\quad (x \neq 3)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

となっています。この関係は極限を求めるときに便利で、$x \neq a$ で $f(x) = g(x)$ なら

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

となります（証明は [A3]）。

ちなみに、極限を $< \delta, < \epsilon$ で与えていますが、$\leq \delta, \leq \epsilon$ でも同じです。ある $\epsilon, \delta(\epsilon)$ があり、$|x - a| < \delta(\epsilon)$ のとき $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ になるとします。まず、$\delta' < \delta(\epsilon)$ を作って $|x - a| \leq \delta'$ とします。そうすると、$|x - a| \leq \delta'$ なら $|x - a| < \delta$ になり、このとき $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ です。そして $< \epsilon$ は $\leq \epsilon$ に含まれるので、$|f(x) - \alpha| < \epsilon$ なら $|f(x) - \alpha| \leq \epsilon$ です。よって、$|x - a| \leq \delta'$ のとき $|f(x) - \alpha| \leq \epsilon$ は同じ意味になります。ただし、$\leq$ を使って極限を定義していることはほぼないです。

ここから、$\delta(\epsilon)$ は δ と書いていきます。また、いちいち言葉にするのが面倒なので、極限であることは

$$|f(x)-\alpha| < \epsilon \quad (0 < |x-a| < \delta)$$

と書くだけですませます。ϵ, δ はこの意味で使います。

- 左極限、右極限

  関数の極限は a に x を近づけたときに $f(x)$ は α になるという意味ですが、a への近づけ方として a より大きい側からと小さい側からとがあります。このことをはっきりさせるために、$|x-a| < \delta$ での絶対値を外して

$$0 < x-a < \delta$$

として、$x > a$ として a より大きな値から近づける場合と、同様に $0 < a-x < \delta$ として a より小さな値から近づける場合を

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \alpha \ , \ \lim_{x\to a-} f(x) = \alpha$$

と表記します。$a+$ では右極限や右側極限 (right-hand limit)、$a-$ では左極限や左側極限 (left-hand limit) と言い、この 2 つのことを片側極限 (one-sided limit) と言います。ここでは $a\pm$ と表記しますが、$a_\pm$ や $a\pm0$ と表記していることも多いです。

$|x-a| < \delta$ で $f(x)$ の極限 α があるとすれば、右極限、左極限は $|x-a|$ の絶対値を外して作ったものなので、$x > a$ なら $0 < x-a < \delta$ なら、$x < a$ なら $0 < a-x < \delta$ となるだけです。よって、極限があるなら

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \alpha$$

となります。

$x = a$ での $f(x)$ の極限は右極限と左極限が一致するときに存在します。これは単純に示せます。右極限と左極限があり、それが一致するので、それぞれにおいて、

$$|f(x)-\alpha| < \epsilon \quad (0 < x-a < \delta_r)$$
$$|f(x)-\alpha| < \epsilon \quad (0 < a-x < \delta_l)$$

となる δ_r, δ_l がいます。δ_r, δ_l から $\delta = \min\{\delta_r, \delta_l\}$ (min は { } 内の最も小さいものを選ぶ記号) とすると、それぞれで $\delta \le \delta_r, \ \delta \le \delta_l$ となる δ がいることになるので

$$|f(x)-\alpha| < \epsilon \quad (0 < x-a < \delta \le \delta_r)$$
$$|f(x)-\alpha| < \epsilon \quad (0 < a-x < \delta \le \delta_l)$$

よって、$|x-a|<\delta$ で $|f(x)-\alpha|<\epsilon$ が言えるので、右極限と左極限が一致するなら、$x=a$ での $f(x)$ の極限は存在します。また、定義から、極限が存在するなら右極限と左極限は一致しないといけないので、これは必要十分条件です。

- 無限大での極限

  関数が $x\to a$ で無限大になる場合も定義されています。

  関数 f の定義域を X とし、a を X の極限点とします。任意の実数 m に対応して $\delta(m)>0$ があり、$0<|x-a|<\delta$ のとき $f(x)>m$ $(x\in X)$ となるなら、f は $x\to a$ で $+\infty$ に近づくと言われます。これは

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

  と表記されます。$-\infty$ の場合も同様で、任意の m に対応して $\delta(m)>0$ があり、$0<|x-a|<\delta$ のとき $f(x)<m$ $(x\in X)$ となるなら、f は $x\to a$ で $-\infty$ に近づくと言われます。これらは $f(x)$ が無限大に近づくために $|f(x)-\alpha|<\epsilon$ を与えることはできません。

  実用上で重要なのは x を無限大に近づけるときで、このときも極限は定義されます。

  任意の $\epsilon>0$ に対応して $k(\epsilon)>0$ があり、$|f(x)-\alpha|<\epsilon$ $(x>k(\epsilon))$ であるなら、α は $x\to+\infty$ での f の極限と定義されます。これはある $k(\epsilon)$ より大きな x で $f(x)$ を α にどこまでも近づけられるという意味です。なので、$x\to+\infty$ での極限として扱われます。また、$x\to+\infty$ のために極限点との $|x-a|$ の関係は作れません。$x\to-\infty$ でも同様ですが、符号が反転するので、$k(\epsilon)>0$ に対して $|f(x)-\alpha|<\epsilon$ $(x<-k(\epsilon))$ となります。

基本的な定理を示します。X,Y は実数の部分集合です。

[A1] 数列 $\{x_i\}$ による関数の極限。
関数を $f:X\to \mathrm{R}$、a を X の極限点として、$\displaystyle\lim_{i\to\infty}\{x_i\}=a$ $(x_i\neq a)$ となる数列 $\{x_i\}\in X$ に対して $\displaystyle\lim_{i\to\infty} f(x_i)=\alpha$ であるとき、α は f の極限。

分かりやすくするために

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$
(ii) $\displaystyle\lim_{i\to\infty}\{x_i\}=a$ $(x_i\neq a)$ となる数列 $\{x_i\}$ に対して $\displaystyle\lim_{i\to\infty} f(x_i)=\alpha$

として、(i) が極限の定義なので、(i) なら (ii) と (ii) なら (i) を示します。
(i) なら (ii) を示します。このときは、極限の定義から

$$|f(x)-\alpha|<\epsilon \quad (0<|x-a|<\delta)$$

a が $\{x_i\}$ の極限なら $(x_i\neq a)$、$n>N$ で

$$0<|x_n-a|<\delta$$

となる正の整数 N が存在します。このため

$$|f(x_n)-\alpha|<\epsilon \quad (n>N)$$

と書けるので、$n \to \infty$ で $f(x_n)$ は $f(x)$ の極限 α になります。

(ii) なら (i) を対偶で示します。この場合は、(i) でないなら (ii) でないを示すので、$f(x)$ が極限を持たないとして

$$|f(x) - \alpha| \geq \epsilon' \ , \ 0 < |x - a| < \delta \quad (\epsilon' > 0)$$

$\lim\limits_{i \to \infty} \{x_i\} = a$ なら、数列での極限点の定義で示したのと同じようにすれば、任意の正の整数 n に対して

$$|f(x_1) - \alpha| \geq \epsilon' \ , \ 0 < |x_1 - a| < 1$$

$$|f(x_2) - \alpha| \geq \epsilon' \ , \ 0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2}$$

$$|f(x_n) - \alpha| \geq \epsilon' \ , \ 0 < |x_2 - a| < \frac{1}{n}$$

となりますが、これは (ii) での

$$|f(x_n) - \alpha| < \epsilon \ , \ 0 < |x_n - a| < \delta \quad (n > N)$$

と矛盾するので、(i) でないなら (ii) でないことが分かります。よって、(ii) なら (i) となります。

[A2] 関数の極限の一意性。

$f(x)$ の a での極限が α, β になっているとします。$\alpha \neq \beta$ ならそれぞれで、ある $\epsilon > 0$ に対して $\delta_1, \delta_2 > 0$ があるので

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta_1) \tag{2a}$$

$$|f(x) - \beta| < \epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta_2) \tag{2b}$$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ と選べば、どちらも同じ δ で書けます。そして、α と β の差を

$$\alpha - \beta = \alpha - f(a) + f(a) - \beta$$

と変形すれば、三角不等式から

$$|\alpha - \beta| = |(\alpha - f(a)) + (f(a) - \beta)| \leq |\alpha - f(a)| + |f(a) - \beta| < 2\epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta)$$

となるので

$$\frac{1}{2}|\alpha - \beta| < \epsilon$$

これは x に依存していません。

ϵ は任意なので、$\alpha \neq \beta$ として $\epsilon = |\alpha - \beta|/2$ と選べます。このとき、α, β が極限として (2a) と (2b) が成立するとすれば、今求めたように $|\alpha - \beta|/2 < \epsilon$ となり矛盾します。つまり、$\alpha \neq \beta$ のとき α, β は極限ではないです。よって、α, β が極限なら $\alpha = \beta$ です。

数列を使うともっと単純になります。a を X の極限点とすれば、$x_i \in X$ による数列 $\{x_i\}$ は a に収束します。この数列 $\{x_i\}$ によって、関数 $f(x_i)$ の極限が与えられるとします。その極限が 2 つあるとして

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = \alpha \ , \ \lim_{i\to\infty} f(x_i) = \beta$$

$f(x_i)$ を数列とすれば、数列の極限は 1 つなので $\alpha = \beta$ となり、関数の極限は 1 つに決まります。

[A3] a の r-近傍 $V_r(a)$ を含む定義域において関数 f, g が与えられており、g の a での極限があり、$f(x) = g(x)$ $(x \in V_r(a))$ なら、$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$。

$g(x)$ は極限が α になるとして

$$|g(x) - \alpha| < \epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta)$$

このときは $g(x)$ の定義域での x なので、x を a の r-近傍 $V_r(a)$ に制限します。これは単純に、a の r-近傍 $V_r(a)$ は開区間 $(r-a, r+a)$ $(0 < |x-a| < r)$ のことなので、$\delta < r$ と選びます。この δ において $g(x) = f(x)$ なので

$$|g(x) - \alpha| = |f(x) - \alpha| < \epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta)$$

となり、$f(x)$ の極限が存在し、$g(x)$ の極限と等しくなります。

[A4] 関数 $f : X \to \mathrm{R}$ があり、f が X の極限点 a で極限を持つなら、$|f(x)| \leq s$ $(x \in X)$ となる $s > 0$ がいる。

極限の定義から

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta)$$

$\epsilon = 1$ として、逆三角不等式を使うと

$$|f(x)| - |\alpha| \leq |f(x) - \alpha| < 1$$

となり

$$|f(x)| < |\alpha| + 1$$

$x \in X$ において $a \in X$ なら $f(a)$ があり、$|f(a)|$ が $|\alpha|+1$ より小さければ $|f(x)| < |\alpha|+1$、大きければ $|f(a)|$ が最大になります。一方で、$a \notin X$ なら $|f(x)| < |\alpha|+1$ です。なので、$a \in X$ では $s = \max\{|f(x)|, |\alpha|+1\}$ (max は { } 内の最も大きいものを選ぶ記号)、$a \notin X$ では $s = |\alpha| + 1$ として

$$|f(x)| \leq s$$

となります。

[A5] 関数 $f, g : X \to \mathrm{R}$ があり、a を X の極限点としたとき、これらが $f(x) \leq g(x)$ $(x \in X,\ x \neq a)$ であり、極限が存在するなら、$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$。

a で f, g の極限 α, β があるとして、$\alpha > \beta$ と仮定します。極限の定義から、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - \alpha| < \epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta_1) \\
&|g(x) - \beta| < \epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta_2)
\end{aligned}
$$

これらは $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ によってどちらも成立します。絶対値を外して

$$
\begin{aligned}
&\alpha - \epsilon < f(x) < \alpha + \epsilon \\
&\beta - \epsilon < g(x) < \beta + \epsilon \quad (0 < |x - a| < \delta)
\end{aligned}
$$

と書いて、$\epsilon = (\alpha - \beta)/2 > 0$ と選ぶと

$$
g(x) < \beta + \epsilon = \alpha - \epsilon < f(x)
$$

となるのが分かり、$f(x) > g(x)$ です。

よって、$\alpha > \beta$ のとき $f(x) > g(x)$ なので、$f(x) \leq g(x)$ では

$$
\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)
$$

となります。

[A6] 関数 $f : X \to \mathrm{R}$ があり、a を X の極限点 a とし、f が $c_1 \leq f(x) \leq c_2$ $(x \in X,\ x \neq a)$ となっており、a で極限を持つなら $c_1 \leq \lim_{x \to a} f(x) \leq c_2$。

$x \in X$ を X での数列 $\{x_n\}$ にすれば

$$
c_1 \leq f(x_n) \leq c_2
$$

数列での極限点の定義から、$\{x_n\}$ は a $(x_n \neq a)$ に収束します。よって

$$
c_1 \leq \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leq c_2 \ \Rightarrow \ c_1 \leq \alpha \leq c_2
$$

となります。

[A7] はさみうちの原理

関数 f, g, h を $f, g, h : X \to \mathrm{R}$、$a$ を X の極限点としたとき、これらが $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $(x \in X,\ x \neq a)$ であり、極限が

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \ , \ \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$$

であるなら、$\lim_{x\to a} g(x) = \alpha$。

極限の定義から、$\epsilon > 0$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon \quad (0 < |x-a| < \delta_1)$$
$$|h(x) - \alpha| < \epsilon \quad (0 < |x-a| < \delta_2)$$

これらは $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすればどちらも成立します。これらは絶対値を外せば

$$\alpha - \epsilon < f(x) < \alpha + \epsilon \ , \ \alpha - \epsilon < h(x) < \alpha + \epsilon \quad (0 < |x-a| < \delta)$$

よって

$$\alpha - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \alpha + \epsilon \ \Rightarrow \ \alpha - \epsilon < g(x) < \alpha + \epsilon$$

となるので、$0 < |x-a| < \delta$ で $|g(x) - \alpha| < \epsilon$ となる δ が存在することになり、$g(x)$ の極限は α となります。

[A8] 関数 f と g があり、それぞれが a で極限 α, β を持つとき $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$。

$f(x), g(x)$ は極限を持つので、$\epsilon > 0$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} \quad (0 < |x-a| < \delta_1)$$
$$|g(x) - \beta| < \frac{\epsilon}{2} \quad (0 < |x-a| < \delta_2)$$

となる、δ_1, δ_2 がいます。三角不等式から

$$|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| = |(f(x) - \alpha) + (g(x) - \beta)| \leq ||f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| < \epsilon$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすれば

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_1 \ , \ 0 < |x-a| < \delta \leq \delta_2$$

となるので、$0 < |x-a| < \delta$ のとき

$$|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$$

よって

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\alpha+\beta \quad (\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x))$$

となります。

数列としてしまうともっと単純です。$\{x_i\}$ によって極限を定義すれば、数列の極限から

$$\lim_{i\to\infty}(\{f(x_i)\}+\{g(x_i)\})=\lim_{i\to\infty}\{f(x_i)\}+\lim_{i\to\infty}\{g(x_i)\}=\alpha+\beta$$

これは $f(x),g(x)$ での極限と同じなので、示せたことになります。

[A9] 関数 f が a で極限 α を持つとき、実数 c に対して $\lim_{x\to a}(cf(x))=c\alpha$。

極限を持つので、$c\neq 0$ として

$$|f(x)-\alpha|<\frac{\epsilon}{|c|} \quad (0<|x-a|<\delta)|c||f(x)-\alpha|<\epsilon$$

左辺は $|cf(x)-c\alpha|$ なので

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\alpha \quad (\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x))$$

$c=0$ のときは $cf(x)=0$ なので、そのまま 0 になります。

[A10] 関数 f,g があり、極限がどちらも a で 0 のとき、$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=0$。

a で極限が 0 になるとして

$$|f(x)-0|<\epsilon \quad (0<|x-a|<\delta_1)$$
$$|g(x)-0|<\epsilon \quad (0<|x-a|<\delta_2)$$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすれば

$$0<|x-a|<\delta\leq\delta_1\ ,\ 0<|x-a|<\delta\leq\delta_2$$

なので

$$|f(x)g(x)-0|=|f(x)-0||g(x)-0|<\epsilon^2 \quad (0<|x-a|<\delta)$$

よって

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=0$$

[A11] 関数 f, g があり、それぞれが a で極限 α, β を持つとき、$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \alpha\beta$。

極限は

$$\lim_{x\to a}(f(x)-\alpha)=0\ ,\ \lim_{x\to a}(g(x)-\beta)=0$$

と書けることと、極限が 0 同士での積の極限は 0 になることから

$$0=\lim_{x\to a}(f(x)-\alpha)(g(x)-\beta)=\lim_{x\to a}(f(x)g(x)+\alpha\beta-\alpha g(x)-\beta f(x))$$

最右辺の極限が 0 と分かりますが、$f(x)g(x)$ の極限がいるのかはまだ分かっていません。
$f(x)g(x)$ を除いた項の極限は、定数倍での極限の関係から

$$\lim_{x\to a}(\alpha\beta-\alpha g(x)-\beta f(x))=\alpha\beta-\alpha\beta-\alpha\beta=-\alpha\beta$$

と分かるので、符号を反転させて加えると

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)+\alpha\beta-\alpha g(x)-\beta f(x))+\lim_{x\to a}(-\alpha\beta+\alpha g(x)+\beta f(x))=0+\alpha\beta=\alpha\beta$$

そうすると、左辺は和の極限から

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)+\alpha\beta-\alpha g(x)-\beta f(x)-\alpha\beta+\alpha g(x)+\beta f(x))=\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$$

となるので

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\alpha\beta\quad\ (\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x))$$

[A12] 関数 f が a で極限 α、関数 g が a で極限 $\beta\neq 0$ を持つとき、$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$。

$g(x)$ の a での極限が $\beta\neq 0$ のとき、$1/g(x)$ の a での極限が $1/\beta$ になることを示せば、積の規則から α/β になることが示せます。
$1/g(x)$ を極限の定義にそのまま入れて

$$|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}|<\epsilon\quad\ (0<|x-a|<\delta)$$

とすれば

$$|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}|=|\frac{\beta-g(x)}{g(x)\beta}|=\frac{|\beta-g(x)|}{|g(x)\beta|}$$

極限 β の絶対値は三角不等式を使うと

$$|\beta| = |\beta - g(x) + g(x)| \leq |\beta - g(x)| + |g(x)| < \frac{|\beta|}{2} + |g(x)|$$

そうすると、極限の定義から、$|\beta|/2$ に対して $0 < |x-a| < \delta_1$ で $|g(x)-\beta| < |\beta|/2$ となる δ_1 がいるとして

$$|\beta| < \frac{|\beta|}{2} + |g(x)|$$
$$\frac{|\beta|}{2} < |g(x)|$$

となるので

$$|g(x)\beta| = |g(x)||\beta| > \frac{|\beta|^2}{2} \ \Rightarrow\ \frac{1}{|g(x)\beta|} < \frac{2}{|\beta|^2}$$

$0 < |x-a| < \delta_2$ で $|g(x)-\beta| < |\beta|^2\epsilon/2$ とすれば

$$|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}| = \frac{|\beta - g(x)|}{|g(x)\beta|} < \frac{2}{|\beta|^2}\frac{|\beta|^2}{2}\epsilon = \epsilon \quad (0 < |x-a| < \delta)$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ です。よって、$1/g(x)$ の極限が与えられます。
これと積の極限の規則を使えば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

極限の例をいくつか示します。

- a, c を実数として、$f(x) = c \ (x \in \mathrm{R})$ の $x \to a$ の極限は c。

  極限を c とすれば $|f(x) - c| = |c - c| = 0$ となり、0 なので任意の $\epsilon > 0$ で $|f(x) - c| < \epsilon$ です。このため、ϵ に対して $\delta > 0$ を好き選んでも $|x - c| < \delta$ が常に成立します。よって、c は極限です。

- a, c を実数として、$f(x) = cx \ (x \in \mathrm{R})$ の a での極限は ca。

  $f(x) - f(a) = cx - ca$ なので

  $$|f(x) - f(a)| = |cx - ca| = |c||x-a| < \epsilon$$

  $c \neq 0$ なら $|x-a| < \delta = \epsilon/|c|$ として成立し、$c = 0$ では $f(x) = 0$ なので $|f(x) - ca| = |c||x-a| = 0 < \delta$ として成立します。よって、ca が極限となります。

- $f(x) = 1/x \ (x \in \mathrm{R}\backslash\{0\})$ の $x \to a \ (a > 0)$ の極限は $1/a$。

  $f(x)$ と $1/a$ の差の絶対値は

  $$|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| = \frac{|a-x|}{xa}$$

ここで $|x-a|<|a|/2$ としてみると、x は

$$
\begin{aligned}
x-a<\frac{a}{2}\ &\Rightarrow\ x<\frac{3}{2}a \\
-(x-a)<\frac{a}{2}\ &\Rightarrow\ x>\frac{1}{2}a
\end{aligned}
$$

から、$a/2<x<3a/2$ です。そうすると、xa は

$$
\frac{1}{xa}<\frac{2}{a^2}
$$

となるので

$$
\frac{|x-a|}{xa}<\frac{|x-a|}{a}\frac{2}{a}=\frac{2}{a^2}|x-a|
$$

これと $|x-a|<a/2$ と設定していることから、$\epsilon>0$ を使って $\delta=a^2\epsilon/2<a/2$ とすれば

$$
|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}|<\frac{2}{a^2}|x-a|=\epsilon \quad (|x-a|<\frac{a^2\epsilon}{2}=\delta)
$$

$a^2\epsilon/2>a/2$ では、$\epsilon>1/a$ なので

$$
|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}|<\frac{2}{a^2}|x-a|<\frac{1}{a}<\epsilon \quad (|x-a|<\frac{a}{2}=\delta)
$$

よって、$\delta=\min\{a^2\epsilon/2,a/2\}$ とすることで

$$
|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}|<\epsilon \quad (|x-a|<\delta)
$$

となるので、$1/x$ の極限は $1/a$ です。また、商の極限の規則を使えば x の極限が a というだけで求まります。

- $\lim_{x\to 0}\sin x=0$
  $\sin$ は $-\theta\leq\sin\theta\leq\theta\ (\theta\geq 0)$ という性質を持ち、$\lim_{\theta\to 0}\theta=0,\ \lim_{\theta\to 0}(-\theta)=-\lim_{x\to 0}\theta=0$ なので、はさみうちの原理から 0 です。