連続関数

「数列と級数」での定義や定理は説明なしで使います。
ここでの区間は有界です。
部分集合には「$\subset$」を使っています。

[A1] 連続での和、積、商。

[A2] f が $a \in X$ で連続で、g は $f(a) \in Y$ で連続であるとき、合成関数 $g \circ f$ は a で連続。

[A3] 閉区間 $I = [a, b]$ で関数 f が連続関数であるとき、f は有界。

[A4] 最大値・最小値の定理。

[A5] 中間値の定理。

[A6] 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数による $\{f(x)|\ x \in I\}$ は閉区間。

[A7] 区間 I において連続な関数 f による $f(I) = \{f(x)|\ x \in I\}$ は区間。

[A8] 区間 I において連続な狭義単調関数 f の逆関数は $f(I) = \{f(x)|\ x \in I\}$ において連続な狭義単調増加な関数。

[A9] 閉区間 I において連続な関数は I において一様連続。

単語の定義を与えていきます。

- 関数の最大値、最小値
  実数の定義域を X として、$f(s) \geq f(x)$ $(x \in X)$ となる $s \in X$ がいるとき、f は X で最大値 (maximum) を持つと言い、s は X における最大点 (maximum point) と言われます。$f(t) \leq f(x)$ となる $t \in X$ がいるとき、f は X で最小値 (minimum) を持つと言い、t は X における最小点 (minimum point) と言われます。

- 単調関数
  区間 I での $a, b \in I$ があり、関数 f が $a < b$ に対して増加か減少かによって名称がついていて
  - $a < b$ に対して $f(a) \leq f(b)$ なら広義単調増加 (increasing)
  - $a < b$ に対して $f(a) < f(b)$ なら狭義単調増加 (strictly increasing)
  - $a < b$ に対して $f(a) \geq f(b)$ なら広義単調減少 (decreasing)
  - $a < b$ に対して $f(a) > f(b)$ なら狭義単調減少 (strictly decreasing)

  英語で monotonically を付けている場合もあります。また、広義単調増加か広義単調減少のどちらかなら単調 (monotone)、狭義単調増加か狭義単調減少なら狭義単調 (strictly monotone) と呼ばれます。これらの名称は数列での単調と同じように

  広義単調増加 $\Leftrightarrow$ 単調非減少（non-decreasing)
  狭義単調増加 $\Leftrightarrow$ 単調増加

  として使っている場合もあります。

- 連続
  関数 f の定義域を X とし、$a \in X$ が与えられているとします。任意の $\epsilon > 0$ に対応する $\delta(\epsilon) > 0$ があり、$|x - a| < \delta(\epsilon)$ $(x \in X)$ となるとき $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ であるなら、関数 f は a で連続 (continuous) と定義されます (一様連続の定義も参照)。a で連続でないときは a で不連続 (discontinuous) と言われます。極限と異

なり a は極限点とはされてないないことに注意してください。a が極限点でないなら定義から a で連続になります。

連続の定義は

$$|f(x)-f(a)|<\epsilon \quad (|x-a|<\delta)$$

と書くだけすませます。

連続では関数 f は a で定義されていないといけないので、連続は lim を使うと

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

と書かれます。f の定義域全体で連続なら、f は連続関数 (continuous function) と呼ばれます。

数列においても同様に、$\lim\limits_{i\to\infty} x_i=a$ となる数列 $\{x_i\}$ $(x_i\in X)$ に対して $\lim\limits_{i\to\infty}\{f(x_i)\}=f(a)$ となるとき、f は a で連続と定義されます。これの証明の仕方は極限のときと同じです。

右極限と左極限に対応して、$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$ なら右連続 (continuous on the right)、$x\to a-$ なら左連続 (continuous on the left) と定義されます。

例として $f(x)=x^2$ が任意の実数 a で連続であることを示します。$|x^2-a^2|$ は三角不等式から

$$|x^2-a^2|=|x+a||x-a|\leq(|x|+|a|)|x-a|$$

ここで、$|x-a|<1$ としてみると、逆三角不等式から

$$|x|-|a|\leq|x-a|<1 \;\Rightarrow\; |x|<|a|+1$$

このことから、$|x-a|<1$ のとき

$$|x^2-a^2|\leq(|x|+|a|)|x-a|<(2|a|+1)|x-a|$$

となるので、$\delta=\epsilon/(2|a|+1)<1$ とすれば

$$|x^2-a^2|<(2|a|+1)|x-a|=\epsilon \quad (|x-a|<\frac{\epsilon}{2|a|+1}=\delta)$$

$\epsilon/(2|a|+1)\geq 1$ となるときは $\delta=1$ とすれば、$\epsilon\geq 2|a|+1$ なので

$$|x^2-a^2|<(2|a|+1)|x-a|<2|a|+1<\epsilon \quad (|x-a|<1=\delta)$$

よって、$\delta=\min\{\epsilon/(2|a|+1),1\}$ とすれば

$$|x^2-a^2|<\epsilon \quad (|x-a|<\delta)$$

となり、x^2 は a で連続となります。

- 区分的に連続
　閉区間 $[a,b]$ において関数 $f(x)$ が与えられているとします。この区間において、有限個の点 $x_1,x_2,\dots,x_n$ を除いて連続であり、その各点において右極限と左極限が

$$f(x_i+)=\lim_{x\to x_i+}f(x)\ ,\ f(x_i-)=\lim_{x\to x_i-}f(x)\quad (i=1,2,\dots,n)$$

として存在しているなら、区分的に連続 (piecewise continuous) と言われます。

- 一様連続
　任意の $\epsilon>0$ に対応する $\delta(\epsilon)>0$ があり、$|x-a|<\delta(\epsilon)$ $(x,a\in X)$ となるとき $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ であるなら、f は一様連続 (uniformly continuous) と定義されます。定義からは分かりづらいですが、一様連続の定義で注意すべきなのは、このときの δ は ϵ のみに依存するという点で、X の全ての x,a に対して同じ δ で成立している必要があります。。連続の定義では δ は ϵ だけでなく a に依存していてもよくなっています (連続では与えられた ϵ と a に対応する $\delta(\epsilon,a)$、一様連続では与えられた ϵ に対応する $\delta(\epsilon)$)。
　例えば、$x=a$ 付近では急激に値が動き、$x=b$ 付近では値がそれほど変わらない関数があったとします。このとき、$|f(x)-f(a)|$ での $|x-a|$ と、$|f(x)-f(b)|$ での $|x-b|$ は明らかに同じ値にはならないです。これが連続の定義で δ に ϵ だけでなく求めたい地点の依存性が出てくる感覚的な理由です。そして、このような依存性が出てこない場合が一様連続です。
　単純な例は、任意の実数 x における $f(x)=x$ で、この場合は

$$|f(x)-f(a)|=|x-a|<\epsilon$$

なので、$\delta=\epsilon$ となって一様連続です。
　定義から分かるように、f が X で一様連続なら、f は X で連続です。しかし、X で連続なら X で一様連続とはならないです。例えば $x>0$ で連続な関数 $1/x$ （連続なのは $f(x)=1/x$ は $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ になるから) では、「関数の極限」の例で求めたように、$|x-a|<\delta$ での δ が $\delta(\epsilon,a)$ として a に依存するために定義に合わなくなるからです。
　[A9] で使うので、一様連続でない場合のことにも触れておきます。一様連続の定義は簡単に言えば、任意の ϵ に対して、x が $a\pm\delta$ の間にいるとき (δ はどの a でも同じ)、$f(x)$ は $f(a)\pm\epsilon$ の間に収まるということです。つまり、任意の $a\in X$ と δ に対して x の範囲が $a\pm\delta$ となっているとき、$f(x)$ が $f(a)\pm\epsilon$ の間に収まっていないなら、一様連続となりません。数学的な言い回しにすれば、X の任意の x,a において $|x-a|<\delta$ で $|f(x)-f(a)|<\epsilon$ となる δ が存在しないなら一様収束でないとなります。言い換えれば、任意の δ に対し、$|x-a|<\delta$ で $|f(x)-f(a)|\geq\epsilon$ となる x,a,ϵ が存在するなら一様収束でないです。任意の δ としているのは、存在しないとしていたものを存在すること前提に変えたためです。

連続に関する定理を示します。

[A1] 連続での和、積、商。
同じ定義域での関数 f,g,h が a で連続なとき、c を実数、$h(a)\neq 0$ として、$f+g$、cf、fg、f/h は a で連続。

　これらは lim の計算規則から示せます。f,g は連続なので

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\ ,\ \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

そうすると

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

となるので、$f+g$ は a で連続です。
　cf ではそのまま

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x)=cf(a)$$

となるので、a で連続です。
　fg も和のときと同じように

$$\lim_{x\to a}(fg)(x)=\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=f(a)g(a)=(fg)(a)$$

となるので、fg は a で連続です。
　商では

$$\lim_{x\to a}(\frac{f}{h})(x)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}h(x)}=\frac{f(a)}{h(a)}=(\frac{f}{h})(a)$$

となるので、f/h は a で連続です。
　a で連続として示しましたが、連続関数でも同様です。

[A2] X において関数 f、Y において関数 g を定義し、$f(X)\subset Y$ とする。f が $a\in X$ で連続で、g は $f(a)\in Y$ で連続であるとき、合成関数 $g\circ f$ は a で連続。

　合成関数は $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ です。g は $f(a)$ で連続なので、$y\in Y$ として

$$|g(y)-g(f(a))|<\epsilon_1\quad(|y-f(a)|<\delta_1)$$

f は a で連続なので、$x\in X$ として

$$|f(x)-f(a)|<\epsilon_2\quad(|x-a|<\delta_2)$$

$f(X)\subset Y$ なので、$y=f(x)\in Y$ から

$$|f(x)-f(a)|=|y-f(a)|<\delta_1\quad(|x-a|<\delta_2)$$

そうすると、$|x-a|<\delta_2$ で $|y-f(a)|<\delta_1$ となるので

$$|g(f(x))-g(f(a))|<\epsilon\quad(|x-a|<\delta_2)$$

よって、$g\circ f$ は a で連続となります。

[A3] 閉区間 $I = [a, b]$ で関数 f が連続関数であるとき、f は有界。

f は閉区間 I において連続で、有界でないとします。f は有界でないので、任意の $s > 0$ に対して $|f(s)| > s$ となる $s \in I$ がいます。なので、s を正の整数としたとき

$$|f(x_1)| > 1\ ,\ |f(x_2)| > 2\ ,\ \ldots,\ |f(x_n)| > n\ ,\ \ldots \qquad (x_1, x_2, \ldots \in I)$$

とできて、これらから数列 $\{x_n\}$ が作れます (有界 $|f(s)| \leq s$ だと n が s までで止まるので数列にならない)。$\{x_n\}$ は閉区間内で与えているために、$|x_n| \leq x_0$ となる x_0 が閉区間内にいます。なので、$\{x_n\}$ は有界です。

数列のボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から、有界な数列は収束する部分列を持ちます。その部分列を $\{x_{n_i}\}$ $(n_1 < n_2 < \cdots)$ とします。$\{x_n\}$ の部分列なので $|f(x_{n_i})| > s$ です。

$y_i \leq z_i$ による数列 $\{y_i\}, \{z_i\}$ が c_1, c_2 に収束するなら $c_1 \leq c_2$ です。これを今の場合に当てはめるために、$a \leq x_{n_i} \leq b$ なので $b_i = \{b, b, b, \ldots\}$ という数列を作れば、$x_{n_i} \leq b_i$ とできます。同様に $a_i = \{a, a, a, \ldots\}$ とすれば $a_i \leq x_{n_i}$ です。そうすると、$\{x_{n_i}\}$ が c に収束するとすれば $a \leq c \leq b$ が言えるので、収束先 c は I にいます。

関数 f は I で連続なので、$c \in I$ では

$$\lim_{x \to c} \{f(x_{n_i})\} = f(c)$$

これは $\{f(x_{n_i})\}$ が $f(c)$ に収束するということなので、$\{f(x_{n_i})\}$ は有界です (収束する数列は有界)。これは f が有界でないとしたことと矛盾します。よって、f が I で連続関数なら f は I において有界となります。

[A4] 最大値・最小値の定理 (maximum-minimum theorem)
閉区間 $I = [a, b]$ で関数 f が連続関数であるとき、f は I において最大値と最小値を持つ。

示したいのは、$x \in I$ に対して $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ となる $c_1, c_2 \in I$ (最大点と最小点) が存在することです。

閉区間 I での f の像 $f(I) = \{f(x)|\ x \in I\}$ は有界なので、上限を $u = \sup f(I)$、下限を $l = \inf f(I)$ とします。I において、n を正の整数として

$$u - \frac{1}{n} < u$$

そうすると、f は有界なので、$x_n \in I$ が

$$u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u$$

として存在します。これから数列 $\{x_n\}$ を

$$u - \frac{1}{1} < f(x_1) \leq u\ ,\ u - \frac{1}{2} < f(x_2) \leq u\ ,\ \ldots$$

として作ります。I での数列なので $\{x_n\}$ は有界となり、数列のボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から収束する部分列 $\{x_{n_i}\}$ がいます。$\{x_n\}$ の部分列なので

$$u - \frac{1}{n_i} < f(x_{n_i}) \leq u$$

数列 $\{1/n_i\}$ の $i \to \infty$ の極限は 0 なので、数列でのはさみうちの原理から

$$\lim_{i\to\infty} \{f(x_{n_i})\} = u$$

そして、$\{x_{n_i}\}$ の収束先 c_1 は I にいて、f は I で連続としているので c_1 で連続です。なので

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(c_1)$$

数列の収束先は 1 つに決まるので $f(c_1) = u$ です。よって、$f(x) \leq f(c_1)$ となる c_1 が存在し、c_1 は I における f の最大点となります。

最小点も同様に示せます。$l = \inf f(x)$ として、同じように

$$l \leq f(y_n) < l + \frac{1}{m} \qquad (y_n \in I)$$

とすれば、数列 $\{y_n\}$ が作れ、収束する部分列 $\{y_{n_i}\}$ がいます。はさみうちの原理から

$$\lim_{i\to\infty} \{f(y_{n_i})\} = l$$

部分列の収束先を c_2 として

$$\lim_{i\to\infty} \{f(y_{n_i})\} = y(c_2)$$

よって、$f(c_2) \leq f(x)$ となる c_2 が存在し、c_2 は I における f の最小点となります。

[A5] 中間値の定理 (intermediate value theorem)
閉区間 $I = [a, b]$ において連続な関数 f が $f(a) \neq f(b)$ となっており、$f(a)$ と $f(b)$ の間に実数 α があるなら、$f(c) = \alpha$ となる $c \in I$ が存在する。

$f(a)$ と $f(b)$ の間の実数 α は、$f(a) < \alpha < f(b)$、もしくは $f(b) < \alpha < f(a)$ の意味です。$f(a) < \alpha < f(b)$ での場合を示しますが、関数 $g(x) = f(x) - \alpha$ を使って、$g(a) < 0 < g(b)$ とします。α は定数なので g も I において連続です。また、$f(b) < \alpha < f(a)$ では、$g(x) = -f(x) + \alpha$ とすれば $g(b) > 0 > g(a)$ となるので、同じ話がそのまま使えます。

示したいのは、$g(c) = 0$ となる c が存在するかどうかです。まず、$g(x) < 0$ となる x の集合を $A = \{x \in I |\ g(x) < 0\}$ とします。I は閉区間なので A は上に有界で、上限 s $(s \leq b)$ が存在します。そして、$a \in A$ なので $s \in I$ です。

上限 s に収束する A の数列 $\{x_n\}$ を、n を正の整数として

$$s - \frac{1}{n} < x_n \leq s \qquad (x_n \in A)$$

と作ります。そうすると、g は I で連続なので

$$\lim_{n\to\infty} \{g(x_n)\} = g(s)$$

$g(x_n) < 0$ ですが、g は $s \in I$ で定義されているために s での極限が 0 になる可能性もあるので $g(s) \leq 0$ とします。

今度は閉区間として $[s, b]$ を作ります。この閉区間において s に収束する数列を $y_n = s + 1/n$ と作ります。b を超えてはいけないので、$s + 1/n$ が b を超えたときは $y_n = b$ とします ($y_n = \min\{s + 1/n, b\}$)。s は $A = \{x \in I |\ g(x) < 0\}$ の上限で

$$s < s + \frac{1}{n} = y_n$$

となっており、$y_n = b$ のときでは $g(b) > 0$ となるので、y_n は A にいません。なので、$g(y_n) \geq 0$ です。そして、$\{y_n\}$ は s に収束し、$[s, b]$ は I にいるので g は $[s, b]$ で連続であることから

$$\lim_{n \to \infty} \{g(y_n)\} = g(s) \geq 0$$

最初の結果 $g(s) \leq 0$ と合わせれば、$g(s) = 0$ となります。また、$g(a) \neq g(b)$ と $g(a) < 0 < g(b)$ から $s \neq a, b$ となり、$a < s < b$ にもなっています。よって、g を f に戻せば、$f(a) < \alpha < f(b)$ のとき、$f(s) = \alpha$ となる $s \in I$ が存在することになります。

別の方法として、$g(x) = 0$ となる x を近似的に求めるという視点から示します。

考え方は単純で、閉区間 $I = [a, b]$ を分割していくというだけです。まず、$I_1 = [a, b] = [a_1, b_1]$ として、これを半分に区切ります。その中心の地点は

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

もし、$g(p_1) = 0$ なら $c = p_1$ となり、ここで終わります。そうなっていなく、もし $g(p_1) < 0$ なら、$g(c) = 0$ の地点が知りたいので $g(p_1)$ より下の領域はいらなくなります。なので、その p_1 の地点で切ってしまって、閉区間を

$$I_2 = [p_1, b_1] = [a_2, b_2] \quad (g(a_2) < 0 < g(b_2))$$

として、I_1 より小さい区間 $I_2 \subset I_1$ にできます。もしくは、$g(p_1) > 0$ であるなら、$g(p_1)$ より上の領域はいらないので

$$I_2' = [a_1, p_1] = [a_2', b_2'] \quad (g(a_2') < 0 < g(b_2'))$$

として、$I_2' \subset I_1$ となります。こうすれば、I_1 より小さな区間に c がいることになります。言い換えると、c の値の誤差が I_1 のときよりよくなったということです。後は、$g(p_1)$ の正負に合わせて I_2 もしくは I_2' での p_2 を作って、$g(p_2) = 0$ でなかったら $g(p_2)$ の正負に合わせて I_3 か I_3' を作る、ということをどこまでも繰り返したときに、必ず $g(c) = 0$ となる c が現れることが分かればいいです、

$I_1 \supset I_2, I_2' \supset \cdots$ なので、どちらの場合でも $I_k = [a_k, b_k]$ と書くことにします。k 回繰り返して $g(p_k) = 0$ でなかったとき

$$g(a_{k+1}) < 0 < g(b_{k+1})$$

$$p_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

$$g(p_k) > 0 :\ \ I_{k+1} = [a_k, p_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}]$$

$$g(p_k) < 0 :\ \ I_{k+1} = [p_k, b_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}]$$

閉区間 I_k の長さ $l_k = b_k - a_k$ は、I_1 から半分にし続けたものになっていて

$$l_1 = b - a \ \Rightarrow\ l_2 = \frac{b-a}{2} \ \Rightarrow\ l_3 = \frac{b-a}{2^2} \ \Rightarrow\ \cdots \ \Rightarrow\ l_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

そうすると、a_k, b_k は

$$\lim_{k\to\infty}\{b_k - a_k\} = \lim_{k\to\infty}\frac{b-a}{2^{k-1}} = 0$$

このため、区間縮小法から $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ となる区間に共通する実数が 1 つあり、それは極限によって

$$\lim_{k\to\infty}\{a_k\} = \lim_{k\to\infty}\{b_k\} = c$$

c は I 上にあり、関数 g は I で連続なので

$$\lim_{k\to\infty}\{g(a_k)\} = g(c) \le 0 \quad (g(a_k) < 0)$$

$$\lim_{k\to\infty}\{g(b_k)\} = g(c) \ge 0 \quad (g(b_k) > 0)$$

よって、$g(c) = 0$ となります。

このように区間を小さくすることを繰り返せば $g(c) = 0$ となる c が求まるので、数値計算ではこの方法で $g(x) = 0$ の解を求められます。

[A6] 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数による $\{f(x)|\ x \in I\}$ は閉区間になる。

閉区間で連続な関数は有界なので、$f(I) = \{f(x)|\ x \in I\}$ は下限 l と上限 u を持ちます。

最大値・最小値の定理から、$f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ となる $c_1, c_2 \in I$ が存在し、$f(c_1)$ は下限 l、$f(c_2)$ は上限 u です。l, u で閉区間 $[l, u]$ ($[f(a), f(b)]$ とは言っていない) を作ったとすれば、$f(I)$ は $[l, u]$ の部分集合 $f(I) \subset [l, u]$ です。部分集合となっただけなので、まだ閉区間になっているとは言えないです (上限と下限で挟まれているだけなので $f(I)$ が区間なのかは分からない)。

l と u の間の任意の実数を α としたとき、中間値の定理から $f(c) = \alpha$ となる c が I にいます。よって、$[l, u]$ の値は $\alpha \in f(I)$ なので、$[l, u] \subset f(I)$ が言えます。そうすると、$f(I) \subset [l, u],\ f(I) \supset [l, u]$ から $f(I)$ は $[l, u]$ と等しいので、$f(I)$ は閉区間となります。

[A7] 区間 I において連続な関数 f による $f(I) = \{f(x)|\ x \in I\}$ は区間になる。

$f(a)=\alpha,\ f(b)=\beta$ とし、$\alpha<\beta$ とします。中間値の定理から、$\gamma=f(c)\ (\alpha<\gamma<\beta)$ となる c が I にいます。γ は $f(I)$ にいて、α,β も $f(I)$ にいるので、$[\alpha,\beta]\subset f(I)$ です。よって、$f(I)$ は 2 点以上を含み、$\alpha<\beta$ で $[\alpha,\beta]\subset f(I)$ となっているので、$f(I)$ は区間です (「区間」の [A1] 参照)。

[A8] 区間 I において連続な狭義単調関数 f の逆関数は $f(I)=\{f(x)|\ x\in I\}$ において連続な狭義単調増加になる。

f を狭義単調増加とします。$f(I)$ は [A7] から区間なので、それを J とします。I において狭義単調増加では値が重複することはないので f は単射です。単射なので J において f の逆関数 g が存在します。

狭義単調増加なのはすぐに分かります。$y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)\ (x_1,x_2\in I,\ y_1,y_2\in J)$ としたとき $y_1<y_2$ なら、狭義単調増加なので $x_1<x_2$ です。これを逆関数で書けば、$g(y_1)=x_1, g(y_2)=x_2$ から

$$g(y_1)<g(y_2)\quad (y_1<y_2)$$

よって、g は J で狭義単調増加です。

g が連続でないと仮定してみます。連続でないなら左極限と右極限が一致しないので、その一致しない地点を c とすれば、g は狭義単調増加なので

$$\lim_{y\to c-}g(y)<\lim_{y\to c+}g(y)$$

このため、2 つの極限の間には適当な x_c がいて、x_c は $g(y)$ からは求まらないものです (極限として繋がっていないから)。$g(y)\in I$ なので、これは x_c が I にいないことを意味します。一方で、$g(y)=x$ は増加していくので、x_c の付近で

$$x_-<x_c<x_+\ \Leftrightarrow\ \lim_{y\to c-}g(y)<x_c<\lim_{y\to c+}g(y)\quad (x_-,x_+\in I)$$

しかし、x_c が I にいないために x_- と x_+ の間に飛びが生じます。区間には実数の飛びは存在しないので、I が閉区間であることと矛盾します。よって、g は連続です。

[A9] 閉区間 I において連続な関数は I において一様連続。

関数 f は閉区間 I において一様連続でないとします。一様連続でないなら、任意の $\delta>0$ に対して

$$|x-a|<\delta\ ,\ |f(x)-f(a)|\geq\epsilon$$

となる $x,a\in I$ がいます。これを I の数列 $\{x_n\},\{a_n\}$ によって

$$|x_n-a_n|<\frac{1}{n}\ ,\ f(x_n)-f(a_n)|\geq\epsilon \tag{1}$$

と与えてみます。閉区間なので $\{x_n\}$ は有界で、収束します。そして、$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ も I において収束します (ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理)。$\{x_{n_k}\}$ が c に収束するとして、$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ でも (1) なので

$$|a_{n_k}-c|=|a_{n_k}-x_{n_k}+x_{n_k}-c|\leq|a_{n_k}-x_{n_k}|+|x_{n_k}-c|<\frac{1}{n_k}+|x_{n_k}-c|$$

$n_k \to \infty$ で最右辺は消えるので、$\{a_{n_k}\}$ は c に収束します。

部分列がこのように収束するので、もし f が c で連続であるなら、$\{f(x_{n_k})\}, \{f(a_{n_k})\}$ は $f(c)$ に収束します。しかし、これは (1) と矛盾するので、閉区間 I で f が一様連続でないなら、f は c で連続でないです。よって、f が c で連続なら、閉区間 I で f は一様連続となり、c は I の適当な点なので、f が I で連続なら I で f は一様連続となります。