フーリエ変換

数学的なうるさいことを言わずにフーリエ変換を作ります。特に積分に関連する細かいことは無視しています (積分順序の入れ替えが本当に出来るのかとか)。

区間 $[-T, T]$ $(-T \leq t \leq T)$ で周期 $2T$ の関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[i\frac{n\pi}{T}t] \ , \ c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt \ f(t)\exp[-i\frac{n\pi}{T}t]$$

で与えられます。不連続点を含む場合では、左側極限と右側極限

$$f(t^-) = \lim_{t\to t^-} f(t) \ , \ f(t^+) = \lim_{t\to t^+} f(t)$$

によって

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[i\frac{n\pi}{T}t]$$

となります。ここで $\omega_n = n/2T$ として

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[i2\pi\omega_n t] \ , \ c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt \ f(t)\exp[-i2\pi\omega_n t]$$

と書き換え、c_n から $1/2T$ を外した

$$\hat{f}(\omega_n) = \int_{-T}^{T} dt \ f(t)\exp[-i2\pi\omega_n t]$$

というのを定義します。$\Delta\omega = 1/2T$ $(\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n)$ とすれば

$$\begin{aligned} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[i2\pi\omega_n t] &= \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n)\exp[i2\pi\omega_n t] \\ &= \Delta\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n)\exp[i2\pi\omega_n t] \end{aligned}$$

ここで T の無限大を考えます。T を無限大に取ることで、$f(x)$ の周期性はなくなります。$\omega_n = n/2T$ は T の無限大で連続値 ω と見なせるので (ω_n の間隔 $\Delta\omega$ が $\Delta\omega \to 0$)、和は

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \ \Rightarrow \ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$$

として積分に書き換えられます。そして、$\hat{f}(\omega_n)$ の極限は

$$\lim_{T\to\infty} \hat{f}(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)\exp[-i2\pi\omega t]$$

となります。よって、フーリエ級数は

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)\exp[-i2\pi\omega t] \quad (-\infty < \omega < \infty) \tag{1a}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(\omega)\exp[i2\pi\omega t] \quad (-\infty < t < \infty) \tag{1b}$$

という積分になります。$f(t)$ に対して (1a) によって与えられる $\hat{f}(\omega)$ をフーリエ変換 (Fourier transformation)、その逆の (1b) を逆フーリエ変換 (inverse Fourier transformation) と言います。もし、$f(t)$ がある t で不連続点を持つなら

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(\omega)\exp[i2\pi\omega t]$$

となります。

フーリエ変換の定義として別の形が使われることもあります。exp 内の 2π をなくすために、$\omega_n = n\pi/T, \Delta\omega = \pi/T$ として

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[i\omega_n t]\ ,\ c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\ f(t)\exp[-i\omega_n t] = \frac{1}{2T}\hat{f}(\omega_n)$$

これから

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n)\exp[i\omega_n t] &= \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n)\exp[i\omega_n t] \\ &= \frac{1}{2\pi}\Delta\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n)\exp[i\omega_n t] \end{aligned}$$

そうすると、T の無限大において

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)\exp[-i\omega t] \tag{2a}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(\omega)\exp[i\omega t] \tag{2b}$$

となります。(2b) の $1/2\pi$ は $\hat{f}(\omega)$ に含めてしまえば (2a) の右辺に $1/2\pi$ を移せるので、どちらかに $1/2\pi$ がいればいいです。$1/2\pi$ が片方にしかいないのがすっきりしないなら、両方で同じ係数がかかるように変更することも出来ます。そのためには、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[i\omega_n t]\ ,\ c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\ f(t)\exp[-i\omega_n t] = \frac{1}{2T}\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega_n)$$

として、$\hat{f}(\omega_n)$ に $1/\sqrt{2\pi}$ を含ませれば

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2T}\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega_n)\exp[i\omega_n t] = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{T}\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega_n)\exp[i\omega_n t] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Delta\omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega_n)\exp[i\omega_n t]
\end{aligned}
$$

よって

$$
\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\ f(t)\exp[-i\omega t] \tag{3a}
$$

$$
f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ \hat{f}(\omega)\exp[i\omega t] \tag{3b}
$$

となり、両方に $1/\sqrt{2\pi}$ がいる形になります。また、(2),(3) は (1) の変数変換でしかなく、(2) は (1) から $\omega' = 2\pi\omega$、(3) は (1) から $\omega' = \sqrt{2\pi}\omega, t' = \sqrt{2\pi}t$ によって行くことが出来ます。このように、フーリエ変換の定義には 3 パターン (1)～(3) があり、どれを使っているかで結果が変わる場合があります。

また、

$$
\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}dt\ f(t)\exp[+i2\pi\omega t]\ ,\ f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ \hat{f}(\omega)\exp[-i2\pi\omega t]
$$

として、exp 部分の符号を反転して定義している場合もあります。これはフーリエ変換と逆フーリエ変換は exp 部分の符号の違いだけで区別しているために、その区別さえ出来ればどちらの符号でもいいというだけです ((2) では $1/2\pi$ が片方だけにいますが同様に符号を反転させて定義できる)。乱暴に言ってしまえば、どの定義であっても最初にフーリエ変換と言ったものがフーリエ変換で、その exp 部分の符号を反転させたものが逆フーリエ変換になるということです。

複素フーリエ級数の形から始めましたが、三角関数の形からも求めることが出来ます。三角関数の形では

$$
f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{n\pi x}{T})
$$

$$
a_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dx\ f(x)\ ,\ a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}dx\ f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\ ,\ b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}dx\ f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}
$$

なので、$\omega_n = n\pi/T$ とすれば

$$
f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n x + b_n\sin\omega_n x)
$$

$$
a_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dx\ f(x)
$$

$$
a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}dx\ f(x)\cos\omega_n x = \frac{1}{T}A(\omega_n)\ ,\ b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}dx\ f(x)\sin\omega_n x = \frac{1}{T}B(\omega_n)
$$

$\Delta\omega = \pi/T$ として

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_n x) \\
&= a_0 + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\big(A(\omega_n)\cos\omega_n x + B(\omega_n)\sin\omega_n x\big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{T}\int_{-T}^{T} dx\ f(x) + \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\big(A(\omega_n)\cos\omega_n x + B(\omega_n)\sin\omega_n x\big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Delta\omega\int_{-T}^{T} dx\ f(x) + \frac{1}{\pi}\Delta\omega\sum_{n=1}^{\infty}\big(A(\omega_n)\cos\omega_n x + B(\omega_n)\sin\omega_n x\big)
\end{aligned}
$$

ここで T の無限大を取ります。第一項は積分が

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) = C
$$

という何かしらの有限の値 C になっているなら、$\Delta\omega \to 0$ で 0 になります。第二項はそのまま積分に書き換えて

$$
f(x) = \int_0^{\infty} d\omega(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)
$$

$$
A = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\cos\omega x\ ,\ B = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\sin\omega x
$$

となります。A, B に $1/\pi$ を含めるように再定義しています。積分範囲が 0 から ∞ なのは今の ω_n は負の値を持っていないからです。これをフーリエ積分公式と呼んだりします。

　これは式変形によって

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^\infty d\omega(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\big(\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)\cos\omega t\cos\omega x + \int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)\sin\omega t\sin\omega x\big)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)(\cos\omega t\cos\omega x + \sin\omega t\sin\omega x)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)\cos\omega(x-t)\qquad(\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)\frac{1}{2}(e^{i\omega(x-t)}+e^{-i\omega(x-t)})\qquad(e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta)\\
&= \frac{1}{2\pi}\big(\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{i\omega(x-t)} + \int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{-i\omega(x-t)}\big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\big(\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{i\omega(x-t)} - \int_0^{-\infty} d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{i\omega(x-t)}\big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\big(\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{i\omega(x-t)} + \int_{-\infty}^0 d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{i\omega(x-t)}\big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{i\omega(x-t)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega\ e^{i\omega x}\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{-i\omega t}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty d\omega\ e^{i\omega x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{-i\omega t}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty d\omega\ e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)
\end{aligned}
$$

となるので、フーリエ変換 (3) の式になります。

フーリエ変換の性質を見ていきますが、(1)〜(3) の定義のどれを使っているかで結果が変わるものがあります。なので、結果よりも導出の仕方を覚えた方が混乱が起きないと思います。ここでは (1) の定義を使っていきます (他の場合は下の補足 2 にまとめています)。

見ていく前にフーリエ変換と逆フーリエ変換を表す記号として

$$
\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)\exp[-i2\pi\omega t]
$$
$$
f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = \int_{-\infty}^\infty d\omega\ \hat{f}(\omega)\exp[i2\pi\omega t]
$$

というのを与えておきます。ついでに、ここで出てくる関数 $f(t)$ には

$$
\int_{-\infty}^\infty dt\ |f(t)| < \infty
$$

という性質があることを要求します。このとき関数 $f(t)$ は絶対可積分 (absolutely integrable) と言います。この性質を持っている関数 $f(t)$ ならフーリエ変換を定義できます (補足 1 参照)。しかし、絶対可積分の関数とするより、m, n を負でない整数 $(m, n \geq 0)$ として、$f(x)$ とその導関数 $f^{(n)}(x)$ (n 回微分したもの) が

$$\lim_{x\to\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0 \tag{4}$$

となる関数だとしたほうが分かりやすいので、これを満たす関数だとします (これも絶対可積分の関数)。これは急減少関数と呼ばれ (シュワルツ空間の関数)、関数と導関数が $x \to \pm\infty$ で $1/|x|^n$ よりも早く 0 に近づくものです。例えば、

$$e^{-x^2}\ ,\ \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$$

みたいなものです。

基本的な性質として、フーリエ変換には a, b を定数として

$$\mathcal{F}[af] = a\mathcal{F}[f]$$
$$\mathcal{F}[af+bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

という線形性があります。これは積分の性質から

$$\mathcal{F}[af](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ af(t)e^{-i2\pi\omega t} = a\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^{-i2\pi\omega t} = a\mathcal{F}[f](\omega)$$

となることと

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[af+bg](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ (af(t)+bg(t))e^{-i2\pi\omega t}\\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^{-i2\pi\omega t} + b\int_{-\infty}^{\infty} dt\ g(t)e^{-i2\pi\omega t}\\ &= a\mathcal{F}[f](\omega) + b\mathcal{F}[g](\omega)\end{aligned}$$

となることから確かめられます。

- $f(t-a)$
  a を実数として $f(t-a)$ をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t-a)e^{-i2\pi\omega t}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ f(t')e^{-i2\pi\omega(t'+a)} \qquad (t' = t-a)\\ &= e^{-i2\pi\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ f(t')e^{-i2\pi\omega t'}\\ &= e^{-i2\pi\omega a}\hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

- $f(at)$
  $a > 0$ では

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(at)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(at)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ f(t')e^{-i2\pi\omega t'/a} \qquad (t' = at) \\
&= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ f(t')e^{-i2\pi(\omega/|a|)t'} \\
&= \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{|a|})
\end{aligned}
$$

$a < 0$ では

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(at)](\omega) &= \mathcal{F}[f(-|a|t)](\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(-|a|t)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= -\frac{1}{|a|}\int_{\infty}^{-\infty} dt'\ f(t')e^{i2\pi(\omega/|a|)t'} \qquad (t' = -|a|t) \\
&= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ f(t')e^{-i2\pi(-\omega/|a|)t'} \\
&= \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{-|a|})
\end{aligned}
$$

よって、$a > 0, a < 0$ の両方に対して

$$
\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})
$$

となります。

- $\hat{f}(-\omega)$

  $f(t)$ のフーリエ変換が $\hat{f}(\omega)$ になるとき、$\hat{f}(-\omega)$ のフーリエ変換は $f(t)$ となります。逆フーリエ変換の変数の符号を反転させて、$\hat{f}(-\omega)$ のフーリエ変換と見ることで

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(\omega)\exp[i2\pi\omega t] \\
&= -\int_{\infty}^{-\infty} d\omega\ \hat{f}(-\omega)\exp[-i2\pi\omega t] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(-\omega)\exp[-i2\pi\omega t] \\
&= \mathcal{F}[\hat{f}(-\omega)](t)
\end{aligned}
$$

となるので、$\hat{f}(-\omega)$ のフーリエ変換は $f(t)$ となります。

- $t^n f(t)$

  $\hat{f}(\omega)$ を ω で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^{-i2\pi\omega t} =& \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)(-i2\pi t)e^{-i2\pi\omega t} \\ =& -i2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dt\ tf(t)e^{-i2\pi\omega t} \\ =& -i2\pi\mathcal{F}[tf](\omega)\end{aligned}$$

  となるので ($tf(t)$ は (4) を満たすとする)、$tf(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[tf](\omega) = \frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$$

  さらに ω で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{i}{2\pi}\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{f}(\omega) =& \frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[tf](\omega) \\ =& \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ tf(t)e^{-i2\pi\omega t} \\ =& -i2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dt\ t^2 f(t)e^{-i2\pi\omega t} \\ =& -i2\pi\mathcal{F}[t^2 f](\omega) \\ \mathcal{F}[t^2 f](\omega) =& (\frac{i}{2\pi})^2\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

  なので、これを繰り返していくことで

$$\mathcal{F}[t^n f](\omega) = (\frac{i}{2\pi})^n \hat{f}^{(n)}(\omega) \tag{5}$$

  左辺の $\hat{f}^{(n)}$ は $\hat{f}$ を n 回微分したもので、$t^n f(t)$ は (4) を満たすとします。

- $f^{(n)}(t)$

  $f(t)$ を微分した $f'(t) = df/dt$ をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\omega) =& \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f'(t)e^{-i2\pi\omega t} \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \frac{df}{dt}e^{-i2\pi\omega t} \\ =& \left[f(t)e^{-i2\pi\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)\frac{d}{dt}e^{-i2\pi\omega t}\end{aligned}$$

このとき、急減少関数という条件から $f(t)$ は

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$$

であること (これは絶対可積分という条件だけからも示せる。補足 1 参照) を使えば

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f'](\omega) &= -\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)\frac{d}{dt}e^{-i2\pi\omega t} \\
&= i2\pi\omega\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= i2\pi\omega\mathcal{F}[f](\omega)
\end{aligned}$$

となります。これをもう一度行えば

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f''](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f''(t)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \big(\frac{d}{dt}f'(t)\big)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f'(t)e^{-i2\pi\omega t} - \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f'(t)\frac{d}{dt}e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \big[f'(t)e^{-i2\pi\omega t}\big]_{-\infty}^{\infty} + i2\pi\omega\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f'(t)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= i2\pi\omega\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f'(t)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= i2\pi\omega\mathcal{F}[f'](\omega) \\
&= (i2\pi\omega)^2\mathcal{F}[f](\omega)
\end{aligned}$$

途中で $f'(t)$ は t の $\pm\infty$ で 0 になることを使っています。同じことを繰り返していくことで

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i2\pi\omega)^n\mathcal{F}[f](\omega) \tag{6}$$

となります。

- 畳み込み
関数 f, g の畳み込み (convolution)、もしくは合成積と呼ばれるものがあり

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ f(x-y)g(y)$$

と定義されています。畳み込みは $f*g(x)$ とも書かれます。右辺の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\ f(x-y)g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy'\ f(y')g(x-y') \quad (y' = x-y)$$

となるために

$$(f*g)(x) = (g*f)(x)$$

という性質を持ちます。

f, g が絶対可積分なら、それらによる畳み込みも絶対可積分になるので、畳み込みはフーリエ変換できます (一般的には絶対可積分同士の積は絶対可積分にならない)。簡単に示せば、畳み込みの絶対値の積分が

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |(f*g)(x)| &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Big| \int_{-\infty}^{\infty} dy\ f(x-y)g(y) \Big| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\ |f(x-y)g(y)| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy\ |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |f(x-y)| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy\ |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} dx'\ |f(x')|
\end{aligned}$$

となり、f, g が絶対可積分であることから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |(f*g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dy\ |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} dx'\ |f(x')| < \infty$$

と言えるので、$(f*g)(x)$ は絶対可積分となります。

畳み込みのフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[f*g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega)$$

となる性質があり、畳み込みの定理と呼ばれたりします。実際に、畳み込みのフーリエ変換は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ (f*g)(t)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(t-x)g(x)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(t')g(x)e^{-i2\pi\omega(t'+x)} \quad (t' = t-x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t')e^{-i2\pi\omega t'} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x)e^{-i2\pi\omega} \\
&= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \\
&= \mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega)
\end{aligned}$$

となることから確かめられます。

　畳み込みの定理はいろいろな書き方があります。例えば

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)](\omega) = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

とも書けます。これは

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t)g(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)g(t)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)\big(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\ \hat{g}(\omega_1)e^{i2\pi\omega_1 t}\big)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\ \hat{g}(\omega_1)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^{-i2\pi(\omega-\omega_1)t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\ \hat{g}(\omega_1)\hat{f}(\omega-\omega_1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\ \hat{f}(\omega_1)\hat{g}(\omega-\omega_1) \\
&= (\hat{f} * \hat{g})(\omega) \\
&= \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]
\end{aligned}$$

となるからです。ただし、この場合はフーリエ変換と逆フーリエ変換の両方を使って変形しているので (2) の定義だと $1/2\pi$ が右辺につきます。

- n 次元の場合

  2 次元 (2 変数) でのフーリエ級数は周期関数 $f(x_1, x_2) = f(x_1 + 2T_1, x_2) = f(x_1, x_2 + 2T_2)$ に対して

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}e^{i\pi m x_1/T_1}e^{i\pi n x_2/T_2}$$

$$c_{mn} = \frac{1}{2T_1}\frac{1}{2T_2}\int_{-T_1}^{T_1} dx_1\int_{-T_2}^{T_2} dx_2\ f(x_1, x_2)e^{-i\pi m x_1/T_1}e^{-i\pi n x_2/T_2}$$

と与えられます。これは x_1, x_2 による部分それぞれに対して最初に見た手順が使えるので、2 次元でのフーリエ変換は

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ f(x_1, x_2)e^{-i2\pi\omega_1 x_1}e^{-i2\pi\omega_2 x_2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ f(x_1, x_2)e^{-i2\pi(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}
\end{aligned}$$

となります。逆フーリエ変換は

$$f(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_2\ \hat{f}(\omega_1,\omega_2)e^{i2\pi(\omega_1x_1+\omega_2x_2)}$$

これから n 次元に一般化できます。変数を $x_1,x_2,\ldots,x_n$ とする関数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(\boldsymbol{x})$ とし、変数を $p_1,p_2,\ldots,p_n$ として $\hat{f}(p_1,p_2,\ldots,p_n)=\hat{f}(\boldsymbol{p})$ とします。n 次元での内積

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$$

を使うことで、n 次元でのフーリエ変換と逆フーリエ変換は

$$\hat{f}(\boldsymbol{p})=\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_n\ f(\boldsymbol{x})e^{-i2\pi\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}=\int d^nx\ f(\boldsymbol{x})e^{-i2\pi\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$
$$f(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}dp_1\int_{-\infty}^{\infty}dp_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dp_n\ \hat{f}(p)e^{i2\pi\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}=\int d^np\ \hat{f}(p)e^{i2\pi\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

となります。

最後にフーリエ変換の代表的な例を見ておきます。$a>0$ として

$$f(t)=e^{-at^2/2}$$

という関数のフーリエ変換を行います。フーリエ変換の定義に入れて

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\ e^{-at^2/2}e^{-i2\pi\omega t}$$

後は積分を計算すればいいですが、そのためには複素積分の知識が必要になるので、直接積分せずに求めます (積分を実行する場合は下の補足 3 参照)。

$f(t)$ を微分してみると

$$\frac{d}{dt}f(t)=-ate^{-at^2/2}=-atf(t)$$

これから

$$\frac{d}{dt}f(t)+atf(t)=0$$

という微分方程式を作れます。これをフーリエ変換すると左辺は、(5) と (6) から

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}dt(\frac{d}{dt}f(t)+atf(t))e^{-i2\pi\omega t}=&\int_{-\infty}^{\infty}dt\ f'(t)e^{-i2\pi\omega t}+a\int_{-\infty}^{\infty}dt\ tf(t)e^{-i2\pi\omega t}\\&=\mathcal{F}[f'](\omega)+a\mathcal{F}[tf](\omega)\\&=i2\pi\omega\hat{f}(\omega)+\frac{i}{2\pi}a\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) + \frac{4\pi^2\omega}{a}\hat{f}(\omega) = 0$$

この微分方程式の解は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{f}(\omega)}\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) =& \ -\frac{4\pi^2}{a}\omega \\
\frac{d}{d\omega}\log\hat{f}(\omega) =& \ -\frac{4\pi^2}{a}\omega \\
\int d\omega\frac{d}{d\omega}\log\hat{f}(\omega) =& \ -\frac{4\pi^2}{a}\int d\omega\ \omega \\
\log\hat{f}(\omega) =& \ -\frac{4\pi^2}{2a}\omega^2 + C \\
\hat{f}(\omega) =& \ C'\exp[-\frac{2\pi^2\omega^2}{a}]
\end{aligned}$$

となります (C, C' は定数)。C' は

$$\hat{f}(0) = C'$$

から

$$\begin{aligned}
C' = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^0 =& \ \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-at^2/2} \\
=& \ \sqrt{\frac{2}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ e^{-t'^2} \qquad (t' = \sqrt{\frac{a}{2}}t) \\
=& \ \sqrt{\frac{2\pi}{a}}
\end{aligned}$$

途中でガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を使っています。よって $e^{-at^2/2}$ のフーリエ変換は

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\exp[-\frac{2\pi^2\omega^2}{a}]$$

となります。この結果はフーリエ変換の定義として (1) を使った場合であることに注意してください。例えば、(3) の定義を使えば、(9) と (10) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt(\frac{d}{dt}f(t)+atf(t))e^{-i2\pi\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f'(t)e^{-i\omega t} + a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ tf(t)e^{-i\omega t}$$
$$= i\omega\hat{f}(\omega) + ia\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$$

となるために

$$\hat{f}(\omega) = C'\exp[-\frac{\omega^2}{2a}]$$

C' は

$$C' = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-at^2/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ e^{-t'^2} \quad (t' = \sqrt{\frac{a}{2}}t)$$
$$= \sqrt{\frac{1}{a}}$$

となります。どの定義を使っても共通なのは、$f(t) = e^{-at^2}$ のフーリエ変換は同じ形の関数 $\hat{f}(\omega) \sim e^{-\omega^2/a}$ になるということです。

・補足 1

絶対可積分の話を少ししておきます。複素数の値を持つ関数 $f(t)$ が積分可能で

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ |f(t)| < \infty$$

のとき (積分の結果が有限の値)、$f(t)$ は絶対可積分と呼ばれ、そのような関数の集まりは $L^1(R)$ の記号で表されます (R は変数 t が実数であることに対応)。

絶対可積分であればフーリエ変換が定義できる理由は簡単です。絶対可積分の関数に対しての積分

$$\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b dt\ f(t) \tag{7}$$

は収束することが分かります。そうすると、$f(t)$ が絶対可積分なら

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ |f(t)e^{-i\omega t}| = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ |f(t)| < \infty$$

と

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^{-i\omega t} = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} dt\ f(t)e^{-i\omega t} \tag{8}$$

から、フーリエ変換の積分は収束します (極限の取り方の注意ですが、(7) であれば (8) の極限の取り方が出来ますが、(8) であっても (7) であることは言えません)。なので、絶対可積分とすることでフーリエ変換を定義できます。

$f(x)$ が絶対可積分であれば

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

であることを示せます。$f(x), f'(x) = df/dx$ は絶対可積分で区分的に連続だとします。$f(x)$ を微分と積分の関係から

$$f(x) = f(0) + \int_0^x dt\ f'(t)$$

と書きます。このとき、f' は絶対可積分としているので $x \to \pm\infty$ で右辺第二項は有限の値を持てます。右辺に極限値が存在するので、$f(x)$ の極限も存在します。その極限値が 0 でなく $c \neq 0$ だとして

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

とすると、広義積分の話から

$$\int_a^\infty dx\ |f(x)| \quad (a > 0)$$

は発散します。そうすると、$f(x)$ が絶対可積分という条件を満たせなくなります。よって、極限値が 0 でないと矛盾してしまうので $x \to +\infty$ の極限としては 0 しか選べなくなり、$-\infty$ でも同様なので ($-\infty$ から b の範囲で同様のことが言える)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

が言えます。

ついでの話をかなり雑にしておきます。数学用語を何の説明もなしに使い、話の流れだけを言います。L^1 の他に重要な関数の集まりとして L^2 というのがあります。これは

$$\int_{-\infty}^\infty dt\ |f(t)|^2 < \infty$$

となる関数の集まりで、二乗可積分 (square integrable) と呼ばれます（正確には、積分はルベーグ積分によって与えられますが、ここではそれを気にする必要がないので触れずに進めます)。この L^2 においてフーリエ変換したい場合が出てきます。しかし、一般的には L^2 であっても L^1 ではないので、そのままフーリエ変換を L^2 に適用することは出来ません。なので、L^2 でのフーリエ変換を定義する必要があります。

L^1 から L^2 に持って行くときに急減少関数が出てきます (急減少関数は L^2 において稠密)。急減少関数を数列 f_n として用意したとき (f_n はコーシー列)、L^2 の関数 f を

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

によって与えられます。つまり、L^2 でのフーリエ変換を $\overline{\mathcal{F}}$、急減少関数のフーリエ変換を $\mathcal{F}$ とすれば、L^2 の関数 f のフーリエ変換は

$$\overline{\mathcal{F}}[f] = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}[f_n]$$

として定義できます。さらに $L^1 \cap L^2$ の関数の場合に進めていくことで L^2 の一般の関数に対するフーリエ変換が与えられ、そのときのフーリエ変換 $\overline{\mathcal{F}}$ の見た目上の形はフーリエ変換 $\mathcal{F}$ と同じになります。かなり雑な話でしたが、このようにして L^2 でのフーリエ変換を作ることが出来ます。

L^2 と関連した関係も出しておきます。$f(t)$ を二乗可積分として、$|f(t)|^2$ の積分を変形していくと

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dt\ |f(t)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)f^*(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(\omega)e^{i2\pi\omega t})^* \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}^*(\omega)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}^*(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^{-i2\pi\omega t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}^*(\omega)\hat{f}(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega|\hat{f}(\omega)|^2
\end{aligned}$$

この関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega|\hat{f}(\omega)|^2$$

をプランシュレル (Plancherel) の定理と言います。もしくは、パーセバル (Parseval) の定理と言う場合もあります。(2) の定義だと

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega|\hat{f}(\omega)|^2$$

となります。プランシュレルの定理は畳み込みの定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)g(t)e^{-i2\pi\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\ \hat{f}(\omega_1)\hat{g}(\omega-\omega_1)$$

において $\omega=0$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\ \hat{f}(\omega_1)\hat{g}(-\omega_1)$$

としても求まります ($g(t)$ を $f^*(t)$ として $f^*(t)$ のフーリエ変換と $\hat{f}(\omega)$ の複素共役の関係を見ればいい)。

・補足 2

上で見たフーリエ変換の性質で、(2),(3) の定義を使ったときに変更される部分を見ます。

- $f(t-a)$

  (1) と (2) の exp 部分の違いから

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t-a)e^{-i\omega t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ f(t')e^{-i\omega(t'+a)} \qquad (t' = t-a) \\
&= e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ f(t')e^{-i\omega t'} \\
&= e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

(3) でも同様です。

- $\hat{f}(-\omega)$
  (2) の定義では

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(\omega)\exp[i\omega t] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(-\omega)\exp[-i\omega t] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\hat{f}(-\omega)](t)$$

となります。

- $t^n f(t)$
  これも exp 部分の差から、フーリエ変換を (2) で定義すれば

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) &= \frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega) \\
&= \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t)e^{-i\omega t} \\
&= -i\int_{-\infty}^{\infty} dt\ tf(t)e^{-i\omega t} \\
&= -i\mathcal{F}[tf](\omega) \\
i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) &= \mathcal{F}[tf](\omega)
\end{aligned}$$

となり、$1/2\pi$ が出てきません。これを繰り返すので

$$\mathcal{F}[t^n f](\omega) = i^n \hat{f}^{(n)}(\omega) \tag{9}$$

となります。(3) でも同じです。

- $f^{(n)}(t)$
  これも exp 部分の微分によって出てくる 2π の差でしかなく、(2),(3) では $\mathcal{F}[f'](\omega)$ の計算時に 2π が前に出てこないことから

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega) \tag{10}$$

となります。

- n 次元の場合
  (2) では

$$\hat{f}(\boldsymbol{p}) = \int d^n x\ f(\boldsymbol{x}) \exp[-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}]\ ,\ f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n p\ \hat{f}(\boldsymbol{p}) \exp[i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}]$$

  (3) では

$$\hat{f}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int d^n x\ f(\boldsymbol{x}) \exp[-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}]\ ,\ f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int d^n p\ \hat{f}(\boldsymbol{p}) \exp[i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}]$$

・補足 3

$e^{-at^2/2}$ のフーリエ変換

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-at^2/2} e^{-i2\pi\omega t}$$

を直接積分することで求めます。まず、exp 部分を

$$e^{-at^2/2}e^{-i2\pi\omega t} = \exp[-\frac{a}{2}(t+\frac{2i\pi\omega}{a})^2 - \frac{a}{2}\frac{4\pi^2\omega^2}{a^2}] = e^{-2\pi^2\omega^2/a}\exp[-\frac{a}{2}(t+\frac{2i\pi\omega}{a})^2]$$

と変形すると

$$\hat{f}(\omega) = e^{-2\pi^2\omega^2/a}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \ \exp[-\frac{a}{2}(t+\frac{2i\pi\omega}{a})^2]$$

この積分は虚数を含んでいるガウス積分で、複素積分の例題でよく出てくるものです。
求めたい積分の形を

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \ \exp[-\frac{a}{2}(x+i\alpha)^2]$$

とし、これとは別に

$$J = \int_C dz\ \ \exp[-\frac{a}{2}z^2]$$

という積分を考えます。積分経路 C は、$-R$ から R、R から $R+i\alpha$、$R+i\alpha$ から $-R+i\alpha$、$-R+i\alpha$ から $-R$ に行く閉じた経路だとします (長方形の経路)。積分経路を個別に書くと

$$
\begin{aligned}
J &= \int_C dz \ \exp[-\frac{a}{2}z^2] \\
&= \int_{-R}^{R} dz \ \exp[-\frac{a}{2}z^2] + \int_{R}^{R+i\alpha} dz \ \exp[-\frac{a}{2}z^2] + \int_{R+i\alpha}^{-R+i\alpha} dz \ \exp[-\frac{a}{2}z^2] + \int_{-R+i\alpha}^{-R} dz \ \exp[-\frac{a}{2}z^2] \\
&= \int_{-R}^{R} dx \ \exp[-\frac{a}{2}x^2] + i\int_{0}^{\alpha} dy \ \exp[-\frac{a}{2}(R+iy)^2] \\
&\quad + \int_{R}^{-R} dx \ \exp[-\frac{a}{2}(x+i\alpha)^2] + i\int_{\alpha}^{0} dy \ \exp[-\frac{a}{2}(-R+iy)^2]
\end{aligned}
$$

これの第二項と第四項は $R \to \infty$ で消えます。そして、$e^{-az^2/2}$ の極は経路 C の内部にないので、留数定理から

$$
J = \int_C dz \ \exp[-\frac{a}{2}z^2] = 0
$$

よって、$R \to \infty$ において

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \exp[-\frac{a}{2}x^2] + \int_{\infty}^{-\infty} dx \ \exp[-\frac{a}{2}(x+i\alpha)^2] \\
\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \exp[-\frac{a}{2}(x+i\alpha)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \exp[-\frac{a}{2}x^2]
\end{aligned}
$$

右辺でガウス積分を使うことで

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \exp[-\frac{a}{2}(x+i\alpha)^2] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}
$$

よって

$$
I = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}
$$

となります。この結果を入れることでフーリエ変換は

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= e^{-2\pi^2\omega^2/a} \int_{-\infty}^{\infty} dt \ \exp[-\frac{a}{2}(t+\frac{2i\pi\omega}{a})^2] \\
&= e^{-2\pi^2\omega^2/a} \int_{-\infty}^{\infty} dt \ \exp[-\frac{a}{2}(t+i\alpha)^2] \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-2\pi^2\omega^2/a}
\end{aligned}
$$

と求まります。