フーリエ級数

フーリエ級数のよくある話をしていきます。
フーリエ級数は見た目は単純なんですが、数学の構造はかなり厄介です。なので、そういった部分は省いた話をします (補足 2 で少し触れています)。

関数を別の形で書けると便利なことがあるので、展開形で書けないか考えます。展開形は

$$\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$$

$$\ldots, f_{-2}(x), f_{-1}(x), f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$$

によって

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{1}$$

のような級数で書けるとします (和の範囲が無限大になっていることに注意)。c_n は展開の係数で複素数の定数、$f_n(x)$ は展開に使われる関数です。関数 $F(x)$ は実数 x の区間 $[-\pi, \pi]$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ で与えられているとします ($F(x)$ は実数、複素数どちらでもいい)。そして、関数 $F(x)$ は周期性を持っているとして、2π で元の関数に戻るとします。つまり、$[-\pi, \pi]$ 以外は $F(x) = F(x + 2\pi)$ で与えられる場合を考えます。これは当たり前ですが、n を整数とすれば

$$F(x) = F(x + 2\pi) = F(x + 4\pi) = \cdots = F(x + 2\pi n)$$

となっています。

先に言っておきますが、区間を $[-\pi, \pi]$ としますが、$F(x)$ が他の区間で与えられている場合 (例えば $[0, 2\pi]$) でも積分範囲が変わるだけで、展開の形自体は同じになります。理由は単純で、周期関数の積分には、周期 T の関数 $g(x)$ として ($g(x) = g(x + T)$)、a を任意の実数としたとき

$$\int_0^T dx\ g(x) = \int_a^{a+T} dx\ g(x) \tag{2}$$

となる性質があるからです。単純に言えば、周期関数ならその周期の幅 T 内での積分はどこの区間でも同じということです (ただし積分が可能な区間において)。証明は簡単です。$g(x) = g(x + T)$ から

$$\begin{aligned}
G(a) &= \int_a^{a+T} dx\ g(x) \\
\frac{dG}{da} &= \frac{d}{da}\int_a^{a+T} dx\ g(x) \\
&= g(a + T) - g(a) \\
&= g(a) - g(a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

このため、$G(a)$ は a に依存しない定数です。よって、$G(a)=G(0)$ なので

$$\int_a^{a+T} dx\ g(x) = \int_0^T dx\ g(x)$$

となります。もしくは

$$\begin{aligned}\int_0^T dx\ g(x) = \int_0^a dx\ g(x) + \int_a^T dx\ g(x) =& \int_0^a dx\ g(x+T) + \int_a^T dx\ g(x)\\ =& \int_T^{a+T} dx\ g(x) + \int_a^T dx\ g(x)\\ =& \int_a^{a+T} dx\ g(x)\end{aligned}$$

からも分かります。

このように積分範囲を動かせるので、与えられた区間に対応させられます。例えば、この後の話は周期関数 $F(x)$ $(F(x)=F(x+2\pi))$ を区間 $[-\pi,\pi]$ で与えているために、積分の範囲を

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx$$

としますが、これは

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = \int_0^{2\pi} dx$$

と変えられるので、この変更だけで区間 $[0,2\pi]$ で与えられている $F(x)$ に適用できます (他の部分は変更されない)。

展開の形を決めていきます。$F(x)$ が 2π の周期性を持っているので、展開形 (1) での $f_n(x)$ も同じ周期性を持っているとして、$f_n(x)$ を

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{3}$$

と選びます。e^{inx} はオイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

から、整数 n に対して

$$e^{in(x+2\pi)} = e^{inx}e^{2i\pi n} = e^{inx} \quad (e^{2i\pi n} = \cos 2\pi n + i\sin 2\pi n = 1)$$

となるからです。この展開

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$$

において、c_0 は有限の値で、残りは

$$|c_n e^{inx}| = |c_n| = M_n \ , \ |c_{-n} e^{-inx}| = |c_{-n}| = M_{-n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} M_{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}| < \infty$$

となっているとして、展開が一様収束するようにします (ワイエルシュトラスの M 判定法)。収束についてはこれだけですませます。

また、この展開の複素共役を取ると

$$F^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-inx} = \sum_{n=\infty}^{-\infty} c_{-n}^* e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{inx}$$

なので、$F(x)$ が実数なら $c_{-n}^* = c_n$ です。

展開係数を求めます。そのために exp の積分が、0 以外の整数 n に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{inx} = \int_{-\pi}^{\pi} dx\ (\cos nx + i \sin nx) = \frac{1}{n}\big[\sin nx - i\cos nx\big]_{-\pi}^{\pi} = 0 \tag{4}$$
$$\Big(\int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{inx} = \frac{1}{in}\big[e^{inx}\big]_{-\pi}^{\pi} \Big)$$

$n = 0$ では

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{0} = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi \tag{5}$$

となることを利用します。この積分はクロネッカーデルタを使うと

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{i(m-n)x} = 2\pi\delta_{mn} \tag{6}$$

と書けます (m は整数)。クロネッカーデルタ δ_{mn} は、$m = n$ のとき 1、$m \neq n$ のとき 0 です。

m を整数として

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x) e^{-imx} \tag{7}$$

という積分を作ります。そうすると

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x) e^{-imx} = \int_{-\pi}^{\pi} dx \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-imx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{i(n-m)x}$$

最右辺への変形の注意は補足 2 で簡単にしているので、気になる人はそっちを見てください。(4),(5) もしくは (6) から

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)e^{-imx} &= c_m \int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{i(m-m)x} + \sum_{n\neq m} c_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{i(n-m)x} \\
&= c_m \int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= 2\pi c_m \\
c_m &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)e^{-imx}
\end{aligned}
$$

となるので、展開係数 c_m が元の関数 $F(x)$ と exp による積分 (7) から求まります (1 行目の第二項の $n \neq m$ は m 以外の和という意味)。また、$F(x)e^{-imx}$ は 2π の周期関数なので (2) から、任意の実数 a によって

$$
c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)e^{-inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2\pi} dx\ F(x)e^{-inx}
$$

となるので、a を適当に選ぶことで区間は $[-\pi, \pi]$ から変えられます。実際にこれでいいことは、exp の積分 (6) の結果が変わらないことからも確かめられます。

このように、2π の周期を持つ関数 $F(x)$ を

$$
F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{8}
$$

と展開したとき、その展開係数 c_n を積分

$$
c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)e^{-inx}
$$

によって決める級数をフーリエ級数 (Fourier series) と呼びます。他にもフーリエ展開, フーリエ級数展開とも呼ばれます (関数 $F(x)$ をフーリエ級数で展開する)。また、後で出てくる三角関数を使った形との見た目の差から、複素フーリエ級数とも呼ばれます。

ちなみに、c_n には n とは無関係な上限があることが、積分の絶対値による不等式

$$
\Big|\int_a^b dx\ G(x)\Big| \leq \int_a^b dx\ |G(x)|
$$

による

$$
|c_n| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)e^{-inx}\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ |F(x)||e^{-inx}| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ |F(x)|
$$

から分かります (最右辺の積分が n に依存していないので、$|c_n|$ の上限は n に依存しない定数)。これはベッセル不等式と呼ばれ、フーリエ級数の収束性を見るときに必要になります。

今求めた形は e^{inx} によって展開されていますが、オイラーの公式によって三角関数にできます。まず、和の範囲を 1 から ∞ になるように

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_{-n}e^{-inx}+c_ne^{inx})$$

と変形します。これの第二項と第三項はオイラーの公式から

$$\begin{aligned}c_{-n}e^{-inx}+c_ne^{inx}&=c_{-n}(\cos nx-i\sin nx)+c_n(\cos nx+i\sin nx)\\&=(c_n+c_{-n})\cos nx+i(c_n-c_{-n})\sin nx\end{aligned}$$

なので、係数を新しく

$$c_n+c_{-n}=a_n\ ,\ i(c_n-c_{-n})=b_n$$

とすれば

$$F(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

記号をあわせるために c_0 は a_0 と書き直しています ($\cos nx$ が $n=0$ のとき 1 だから)。このとき係数を求める積分は、a_n に対しては $(n>0)$

$$\begin{aligned}a_n=c_n+c_{-n}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)e^{-inx}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)e^{inx}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)(e^{-inx}+e^{inx})\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)\cos nx\end{aligned}$$

b_n に対しては $(n>0)$

$$\begin{aligned}b_n=i(c_n-c_{-n})&=\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)e^{-inx}-\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)e^{inx}\\&=\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)(e^{-inx}-e^{inx})\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)\sin nx\end{aligned}$$

となります。a_0 は素直に

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)e^0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)$$

で求まります。

というわけで三角関数を使ったときは

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{9}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\ ,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\cos nx\ ,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\sin nx$$

となります。おそらく、フーリエ級数と言ったときはこの形を見ることが多いと思います (a_0 だけ $1/2\pi$ なので、$1/2$ を外に出して、展開の第一項を $a_0/2$ とすることが多い)。$F(x)\cos nx$、$F(x)\sin nx$ は 2π の周期関数なので、e^{inx} のときと同じように (2) によって区間を変更できます。

三角関数によるフーリエ級数を導くとき、$F(x)$ は実数だと最初に仮定することが多いと思いますが (展開係数 a_n, b_n が実数)、今見てきたように複素数でも実数でもフーリエ級数は同じ形になります。実際に、$F(x)$ を $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$ のように分解し、$F_1(x), F_2(x)$ は実数なので、実数の関数に対するフーリエ級数だとした (9) に入れて足せば、係数が複素数になるだけでフーリエ級数の形自体は変わりません ($F_2(x)$ の展開係数に $iF_2(x)$ の i がつくだけ)。また、$F(x)$ が実数なら、$c_n = c^*_{-n}$ から

$$c_n + c_{-n} = c_n + c^*_n = 2\mathrm{Re}c_n\ ,\ c_n - c_{-n} = c_n - c^*_n = 2i\mathrm{Im}c_n \quad (z = x + iy\ ,\ z + z^* = 2x\ ,\ z - z^* = 2iy)$$

となり ($\mathrm{Re}c_n$ は c_n の実部、$\mathrm{Im}c_n$ は c_n の虚部)、a_n, b_n が実数になることが分かります。

cos は偶関数、sin は奇関数なので、関数 $F(x)$ が偶関数か奇関数か積分の形を変えられます。偶関数、奇関数には、$G(x)$ が偶関数なら

$$G(x) = G(-x)\ ,\ \int_{-a}^{a} dx\ G(x) = 2\int_{0}^{a} dx\ G(x)$$

奇関数なら

$$G(x) = -G(-x)\ ,\ \int_{-a}^{a} dx\ G(x) = 0$$

という性質があります。そして、符号の関係から分かるように、偶関数と偶関数の積は偶関数、奇関数と奇関数の積は偶関数となります。例えば、偶関数 $B(x)$、奇関数 $C(x)$、積を $A(x) = B(x)C(x)$ とすれば

$$A(-x) = B(-x)C(-x) = -B(x)C(x) = -A(x)$$

となるので、$A(x)$ は奇関数です。このような性質から、$F(x)$ が奇関数なら

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x) a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\ F(x)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\cos nx\ = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\ F(x)\cos nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\sin nx = 0$$

これはフーリエ余弦級数 (Fourier cosine series) と呼ばれます。$F(x)$ が奇関数なら

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\cos nx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\sin nx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\ F(x)\sin nx$$

となり、フーリエ正弦級数 (Fourier sine series) と呼ばれます。

フーリエ級数は当然、先に三角関数による展開形から始めても同じ結果になりますが、指数関数で行うより若干面倒です。理由は簡単で、係数を決める積分を求めるのが三角関数の方が面倒だからです。三角関数の積分が

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \sin mx \sin nx = \pi \quad (m = n \neq 0) \tag{10a}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \sin mx \sin nx = 0 \quad (m \neq n) \tag{10b}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \cos mx \cos nx = \pi \quad (m = n \neq 0) \tag{10c}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \cos mx \cos nx = 0 \quad (m \neq n) \tag{10d}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \cos mx \sin nx = 0 \tag{10e}$$

となることを求める必要があります (下の補足 1 で求めています)。これらの積分が必要になるのは

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\cos mx = & \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \Big(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\Big)\cos mx \\
= & \int_{-\pi}^{\pi} dx\ a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \cos nx \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \sin nx \cos mx \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \cos nx \cos mx \\
= & \ a_m \pi
\end{aligned}$$

として、展開係数 a_m が求まるからです。同様に b_n も

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\sin mx &= \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \big(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\big)\sin mx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dx\ a_0\sin mx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}dx\ \cos nx\sin mx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}dx\ \sin nx\sin mx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}dx\ \sin nx\sin mx\\ &= b_m\pi\end{aligned}$$

として求まります。

まとめておくと、区間 $[-\pi,\pi]$ で与えられている周期 2π の関数 $F(x)$ のフーリエ級数は

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\ ,\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)e^{-inx}$$

もしくは

$$F(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)\ ,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)\cos nx\ ,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)\sin nx$$

特に、$F(x)$ が実数であれば、$n>0$ の整数に対して

$$c_n=c_{-n}^*\ ,\ c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\ ,\ c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$$

となります。

ここまで展開する関数 $F(x)$ の周期を 2π としましたが、周期を一般化して $2T$ とし ($F(x)=F(x+2T)$)、区間を $[-T,T]$ にします。一般化したといっても、2π のときに exp 部分が e^{inx} でよかったことを考えれば

$$e^{inx}\ \Rightarrow\ e^{i\pi nx/T}\qquad (e^{i\pi n(x+2T)/T}=e^{i\pi nx/T}e^{2i\pi n}=e^{i\pi nx/T})$$

とすれば上手くいくことが分かります。これは変数変換 $x\to\pi x/T$ でしかないです。なので、積分をこの変数変換によって書き換えることで、展開の形は

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\pi x/T}\ ,\ c_n=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dx\ F(x)e^{-in\pi x/T}$$

となります。三角関数で書いた場合も、単純な置き換えから

$$F(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dx\ F(x)\ ,\ a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}dx\ F(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\ ,\ b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}dx\ F(x)\sin\frac{n\pi x}{T}$$

となるだけです。

$F(x)$ の範囲を $[-T,T]$ に取っているために積分範囲を $-T$ から T としていますが、これは (2) から、

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}dx\ F(x)\cos\frac{n\pi x}{T}=\frac{1}{T}\int_{a}^{a+2T}dx\ F(x)\cos\frac{n\pi x}{T}$$

とすることで別の区間にできます ($F(x)\cos n\pi x/T, F(x)\sin n\pi x/T$ は両方とも $2T$ の周期関数)。例えば、F が $[0,2T]$ で与えられているときは

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}dx\ F(x)\cos\frac{n\pi x}{T}$$

のようにすればいいです。

フーリエ級数は N 次元 (N 個の変数) に拡張することが出来ます。2 変数を持つ周期関数 $F(x_1,x_2)=F(x+2T_1,x_2)=F(x_1,x_2+2T_2)$ を用意します。これを x_2 を固定してフーリエ級数に展開すれば

$$F(x_1,x_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m(x_2)f_m(x_1)$$

x_2 の値で展開係数は変わるべきなので $c_m(x_2)$ としています。$c_m(x_2)$ は x_2 を変数にする周期関数でなければいけないので、同じように展開して (展開係数を c_{mn} とする)

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{mn}f_n(x_2)\big)f_m(x_1)\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{mn}f_m(x_1)f_n(x_2)\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{mn}e^{im\pi x_1/T_1}e^{in\pi x_2/T_2}\end{aligned}$$

と書けて、これが 2 変数でのフーリエ級数となります。c_{mn} は exp 部分からクロネッカーデルタが出てくるようにすればいいだけなので

$$c_{mn}=\frac{1}{2T_1}\frac{1}{2T_2}\int_{-T_1}^{T_1}dx_1\int_{-T_2}^{T_2}dx_2\ F(x,y)e^{-im\pi x_1/T_1}e^{-in\pi x_2/T_2}$$

とすればいいです。これを繰り返していけば、N 次元になります。

フーリエ級数の性質を直接 (証明なしで) 見るために具体的な例を使います。まず、区間 $[0,2\pi]$ において

$$F(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)\ ,\ 0<x<2\pi$$

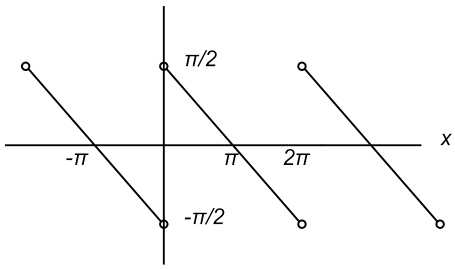

図 1: $F(x) = (\pi - x)/2$

という関数を作ります。これだけだと周期なんかないので、これ以外の領域では

$$F(x) = F(x + 2\pi)$$

として 2π の周期を与えます。図にすれば、図 1 の形になります。この設定では周期の変わり目である $0, 2\pi$ の値を与えていません。これは $x = 0, 2\pi$ で関数が連続でなくなるからで、$x = 0$ もしくは $x = 2\pi$ の極限で $F(x)$ は $\pm\pi/2$ の 2 つの値を持ちます。この不連続点 (跳躍のある不連続点) においてフーリエ級数がどうなっているのかを見ます。

素直にフーリエ級数に展開します。今の $F(x)$ は $0 < x < 2\pi$ で与えられていますが、積分は $0 < x < 2\pi$ と $0 \le x \le 2\pi$ で同じ結果になるので、積分は 0 から 2π の範囲で行えばいいです (積分はある 1 点での $F(x)$ からの寄与を受けない)。そして、今の $F(x)$ は実数なので三角関数によるフーリエ級数 (9) を使います。そうすると、a_0 は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\ F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\frac{1}{2}(\pi - x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}(2\pi^2 - \frac{1}{2}4\pi^2) = 0$$

a_n は

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\ F(x)\cos nx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx(\pi - x)\cos nx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} dx\ \pi\cos nx - \int_0^{2\pi} dx\ x\cos nx\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi n}\Big(\big[x\sin nx\big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} dx\ \sin nx\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

b_n は

$$
\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\ F(x)\sin nx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\ (\pi - x)\sin nx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} dx\ \pi\sin nx - \int_0^{2\pi} dx\ x\sin nx\Big) \\
&= \ -\frac{1}{2\pi n}\Big(-\big[x\cos nx\big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} dx\ \ \cos nx\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi n}2\pi \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

と求まります。よって、この関数のフーリエ級数は

$$
F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \tag{11}
$$

これは、excel かなんかで実際に右辺を計算してみると n の上限を増やしていくことで、$0 < x < 2\pi$ において元の関数と一致していきます。しかし、周期の変わり目である $x = 0$ では、元の関数 $F(x)$ は $x = 0$ の極限において 2 つの値 $\pm\pi/2$ を持ち ($x = 0$ は跳躍のある不連続点)、フーリエ級数 (11) は $x = 0$ で 0 です。つまり、元の関数とそのフーリエ級数は不連続点で対応していません。これがフーリエ級数の特徴で、不連続点 x_c でフーリエ級数 (11) は元の関数 $F(x)$ でなく、

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx_c}{n} = \frac{F(x_c^-) + F(x_c^+)}{2}
$$

となります。$F(x_c^-)$ は $F(x)$ を不連続点 x_c に左側から近づけたとき (左側極限) の値、$F(x_c^+)$ は右側から近づけたとき (右側極限) の値です。今の場合では $x_c = 0$ とすれば

$$
F(0^-) = -\frac{\pi}{2}\ ,\ F(0^+) = \frac{\pi}{2}
$$

となります (他の不連続点 $x = 2\pi, 4\pi, \ldots$ でも同様)。これは不連続点での値は、不連続点の左側極限と右側極限による平均値になることを言っています (証明は省きます)。このようなフーリエ級数の収束性の問題からフーリエ級数を $F(x) =$ と等号でなく $F(x) \sim$ と書かれることがあります。上で見てきたフーリエ級数の導出は区間 $[-\pi, \pi]$ において不連続点がなく $F(x)$ に展開が一様収束する場合です (補足 2 参照)。

これはフーリエ級数の一般的な性質です。このため、不連続点を含む周期関数のフーリエ級数は

$$
\frac{F(x^-) + F(x^+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{n\pi x}{T})
$$

と書けます (不連続点でなければ $F(x^-) = F(x^+) = F(x)$ なので左辺は $F(x)$ になる)。右辺は e^{inx} で書いても同じです。これから、$F(x)$ が不連続点を持たない周期関数なら、フーリエ級数で $F(x)$ を再現できるとも言えます。今の例でも連続な $0 < x < 2\pi$ では元の関数を再現できています。また、フーリエ級数はテイラー展開と違い、不連続な関数に対しても使えるという利点があることも分かります (このため電気信号のように不連続な関数を使う話でフーリエ級数が出てくる)。

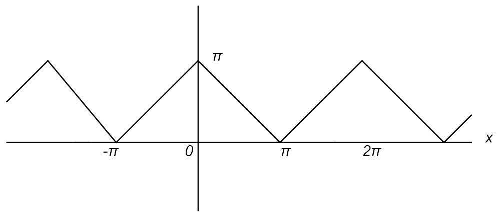

図 2: $F(x) = \pi \pm x$

不連続点のない例も見ておきます。関数 $F(x)$ を $[-\pi.\pi]$ において

$$F(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

とし、他の領域を $F(x) = F(x + 2\pi)$ として周期 2π を持たせます (図 2)。この関数 $F(x)$ には左側極限と右側極限が一致しない不連続点はありません (ただし、$x = n\pi$ で dF/dx は与えられない)。
このときの a_0 は

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} dx(\pi + x) + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} dx(\pi - x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi x + \frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi} \left[\pi x - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

a_n は

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\cos nx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx(\pi + x)\cos nx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx(\pi - x)\cos nx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} dx(\pi - x)\cos(-nx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx(\pi - x)\cos nx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx(\pi - x)\cos nx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx(\pi - x)\cos nx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx(\pi - x)\cos nx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\ \pi\cos nx - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\ x\cos nx \\
&= -\frac{2}{\pi}\Big(\Big[\frac{x}{n}\sin nx\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} dx\ \ \sin nx\Big) \\
&= -\frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n^2}\cos nx\Big]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{2}{\pi}(\frac{1}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n^2})
\end{aligned}$$

b_n は

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\sin nx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx\ (\pi + x)\sin nx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx(\pi - x)\sin nx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} dx\ (\pi - x)\sin(-nx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx(\pi - x)\sin nx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\ (\pi - x)\sin nx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx(\pi - x)\sin nx \\
&= 0
\end{aligned}$$

となります。これは $F(x)\sin nx$ が奇関数であるためです。
　求まった a_0, a_n を入れることで $F(x)$ のフーリエ級数は

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(\frac{1}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n^2})\cos nx$$

第二項の括弧内の $\cos n\pi$ は n に対して

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

なので、n が偶数、奇数のときに

$$\sum_{n=even}\frac{2}{\pi}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2})\cos nx=0$$
$$\sum_{n=odd}\frac{2}{\pi}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2})\cos nx=\frac{4}{\pi}\sum_{n=odd}\frac{1}{n^2}\cos nx$$

となります ($n=even$ は n が偶数、$n=odd$ は n が奇数の和)。よって、フーリエ級数は

$$F(x)=\frac{1}{2}\pi+\frac{4}{\pi}\sum_{n=odd}\frac{1}{n^2}\cos nx$$

n を $n=1,3,\ldots$ から $0,1,2,\ldots$ に変更するには、整数 m によって奇数は $2m+1$ とできることから

$$F(x)=\frac{1}{2}\pi+\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x$$

とすればいいです。このフーリエ級数は元の関数 $F(x)$ と全ての点で一致します。

物理でフーリエ級数の導入をするときによくされる話もついでにしておきます。原点を O として、その直線上で点 P_1 が

$$x_1=a_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$$

と単振動しているとし、同じ直線上の他の点 P_2 は P_1 を原点として

$$x_2=a_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

と単振動させます (a は振幅、ω は角振動数、t は時間、α は初期位相)。このとき、P_2 の O に対する振動は

$$x=a_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+a_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

となります。これは単振動の合成で、どんどん単振動の数を増やしていけます。これを逆から見て、合成された振動は単振動に分解できると考えます。つまり、合成された振動を表す関数 $F(t)$ を、無数の単振動の和によって

$$F(t)=a_0+a_1\cos t+a_2\cos 2t+\cdots+b_1\sin t+b_2\sin 2t+\cdots$$

と書けるとします (単振動は $\cos,\sin$ の両方で書ける)。ただし、$F(t)$ は右辺から 2π の周期を持たなければいけないです。そうすると、これを無限個の単振動の和だとすれば、今までの話からフーリエ級数になります。このようなことから、物理ではフーリエ級数は周期関数を無数の単振動に分解することと表現されたりします。

最後にフーリエ級数を一般化します。そのために言葉の定義を与えておきます。実数 x のある区間 $[a,b]$ において連続な関数 $A(x)$ と $B(x)$ があるとします (両方とも複素数)。この 2 つの関数による積分が

$$\int_a^b dx\ A(x)B^*(x)=0$$

となっているとき (「$*$」は複素共役)、$A(x)$ と $B(x)$ は区間 $[a,b]$ で直交すると言います。これはベクトルの内積が 0 になるときを直交するというのと同じ言い方です。なので、この形の積分は内積と呼ばれます。定義によっては

$$\int_a^b dx\ A^*(x)B(x)$$

と書くこともありますが、好きなほうを使えばいいです。同じ関数での内積は、積分の性質から

$$\int_a^b dx\ A(x)A^*(x)=\int_a^b dx\ |A(x)|^2\geq 0$$

となっています ($|A(x)|^2$ は必ず正だから。$A(x)=0$ のときが 0)。そうすると、同じ関数での内積は何かしらの正の定数になるということから、それを C とすれば

$$\begin{aligned}
C&=\int_a^b dx\ A(x)A^*(x)\\
1&=\frac{1}{C}\int_a^b dx\ A(x)A^*(x)\\
&=\int_a^b dx\ \frac{A(x)}{\sqrt{C}}\frac{A^*(x)}{\sqrt{C}}\\
&=\int_a^b dx\ A'(x)A'^*(x)
\end{aligned}$$

として、内積が 1 になるように $A(x)$ を再定義できます。このように、自分との内積が 1 になるように再定義することを規格化と言います (ベクトルの言葉で言えば、ノルムを 1 にすること)。

規格化された関数の集まり $A_0(x), A_1(x), A_2(x), \ldots$ が

$$\int_a^b dx\ A_m(x)A_n^*(x)=\delta_{mn}\qquad (m,n=0,1,2,\ldots)$$

となっているとき、A_n を正規直交系 (規格直交系) と呼びます ($A_0(x), A_1(x), A_2(x), \ldots$ の集まりが正規直交系)。規格化されていなければ直交系と呼ばれます。

この話を踏まえてフーリエ級数を見てみます。フーリエ級数であるためには展開と展開係数が

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\ ,\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)e^{-inx}$$

となっていればいいです。これは e^{inx} を $f_n(x)$ とすれば

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nf_n(x)\ ,\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\ F(x)f_n^*(x)$$

と書けます。つまり、区間 $[-\pi,\pi]$ でこれが成立する関数の集まり $f_n(x)$ (n で区別される関数の集まり。$\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots$ という関数の集まり) であればフーリエ級数になると言えます。そして、c_n は $F(x)$ に展開形を入れれば

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f_m(x) f_n^*(x)$$

なので、右辺はクロネッカーデルタを使えば

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f_m(x) f_n^*(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \delta_{mn} = c_n$$

となっていればいいです。よって

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f_m(x) f_n^*(x) = \delta_{mn}$$

これは明らかに正規直交系の関数による内積の形をしています (係数の $1/2\pi$ は規格化でなくせばいい)。よって、フーリエ級数は正規直交系の関数で書けることが分かります。

正規直交系であることと $F(x)$ の周期性は関係ないので、$F(x)$ の周期性も外します。というわけで、ある区間 $[a,b]$ で任意の関数 $F(x)$ が、正規直交系の関数 $f_n(x)$ によって

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n(x) \quad \Big(\int_a^b dx\ f_m(x) f_n^*(x) = \delta_{mn}\Big)$$

と展開でき、展開係数を

$$c_n = \int_a^b dx\ F(x) f_n^*(x)$$

と与えたものを一般化フーリエ級数 (generalized Fourier series) と言います。正規直交系として指数関数や三角関数を選んだのが上での話です。簡単に一般化フーリエ級数を作りましたが、数学的にはかなり面倒な話になります (無限個の関数による正規直交系によって書けるということから、ヒルベルト空間と関係する)。

指数関数 e^{inx} が正規直交系を作れることは (6) からすぐに分かり、区間 $[-\pi,\pi]$ において

$$\ldots, e^{-i2x}, e^{-ix}, 1, e^{ix}, e^{i2x}, \ldots$$

によって正規直交系は作られます (規格化は $e^{inx}/\sqrt{2\pi}$)。三角関数が正規直交系を作れることも (10a)〜(10d) から分かります。一応見ておきます。n を $n \geq 1$ の整数として、(9) の sin の部分を

$$f_n = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

cos の部分を

$$g_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$$

とし、定数部分は $a_0 = 1/\sqrt{2\pi}$ とします (規格化しています)。f_n の内積を見ると

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f_n(x)f_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \sin^2 nx = 1$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f_m(x)f_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \sin mx \sin nx = 0 \qquad (m \neq n)$$

となっているので、直交しています。g_n も同様で

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ g_n(x)g_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \cos^2 nx = 1$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ g_m(x)g_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \cos mx \cos nx = 0 \qquad (m \neq n)$$

というように直交しています。a_0 は

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ a_0a_0^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ a_0f_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \sin nx = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ a_0g_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \cos nx = 0$$

f_m と g_n では

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f_m(x)g_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \sin mx \cos nx = 0$$

よって、$a_0a_0^*, f_nf_n^*, g_ng_n^*$ のときが 1 で、他の組み合わせは 0 になるので、区間 $[-\pi, \pi]$ において

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\ ,\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\ ,\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}\ ,\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}\ ,\dots$$

は正規直交系となります。なので、フーリエ級数 (9) は (正規) 直交系によって展開されています。

・補足 1

三角関数の積分を求めます。加法定理を使えば簡単にもとまります。m, n は整数とします。
$\sin mx \sin nx$ は $m \neq n$ では加法定理から

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ \big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{m-n}\big[\sin(m-n)x\big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m+n}\big[\sin(m+n)x\big]_{-\pi}^{\pi}\Big) \\ &= 0\end{aligned}$$

$m = n$ では倍角の公式から

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \sin^2 nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ (1-\cos 2nx) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \cos 2nx$$
$$= \pi - \frac{1}{2}\frac{1}{2n}\big[\sin 2nx\big]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \pi$$

$\cos mx \cos nx$ は $m \neq n$ では

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\frac{1}{m+n}\big[\sin(m+n)x\big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m-n}\big[\sin(m-n)x\big]_{-\pi}^{\pi}\big)$$
$$= 0$$

$m = n$ では

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \cos^2 nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ (\cos 2nx + 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2n}\big[\sin 2nx\big]_{-\pi}^{\pi} + \pi = \pi$$

$\sin mx \cos nx$ は加法定理から

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{m+n}\big[\cos(m+n)x\big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\frac{1}{m-n}\big[\cos(m-n)x\big]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

もしくは、$\sin mx \cos nx$ は奇関数なので $-\pi$ から π で積分すれば 0 になります。

・補足 2

フーリエ級数の収束性の話を簡単にしておきます。といっても、具体的な証明はしないです。区分的に連続と区分的に滑らかという単語が出てくるので、これの話を最初にしておきます

まず、関数 $G(x)$ がある点 a で連続であるというのは、$G(x)$ を a の左側から点 a に近づいた場合 (左側極限) と、a の右側から点 a に近づけた場合 (右側極限) が $G(a)$ に一致することを指します。これは、左から点 a に近づける左側極限を

$$G(a^-) = \lim_{x\to a^-} G(x)$$

右から点 a に近づける右側極限を

$$G(a^+) = \lim_{x\to a^+} G(x)$$

と書いたとき、$G(a^-) = G(a^+) = G(a)$ なら点 a で連続ということです。例えば、点 a で $G(a^-) = 1, G(a^+) = -1$ のようになっていれば不連続です。

関数 $G(x)$ がある区間 $[a, b]$ $(a \le x \le b)$ において区分的に連続 (piecewise continuous) であるとは、区間 $[a, b]$ で定義される関数 $G(x)$ の $G(a^+)$ と $G(b^-)$ が存在して、(a, b) $(a < x < b)$ において有限個の点を除いて関数 $G(x)$ が連続であることを言います。ただし、その不連続な有限個の各点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ において左側極限と右側極限

$$G(x_i^-) = \lim_{x\to x_i^-} G(x)\ ,\ G(x_i^+) = \lim_{x\to x_i^+} G(x) \quad (1 \le i \le n)$$

が存在するとします。存在すると言っているのは、有限の値になるということです (その点で無限大に発散しない)。例えば、$1/x$ は $x = 0$ の右側極限で無限大に発散するので $[0, a]$ で区分的に連続な関数ではないです。実用上では、区分的に連続な関数は発散しない関数とでも思えばいいです。

関数 $G(x)$ が区間 $[a, b]$ で区分的に滑らか (piecewise smooth) であるとは、$[a, b]$ で $G(x)$ は区分的に連続で、導関数 $G'(x)$ の $G'(a^+)$ と $G'(b^-)$ が存在し、$G'(x)$ が (a, b) において不連続点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を除いて連続であることを言います ($G(x)$ は不連続点を除いて微分可能で、そこにおいて導関数 G' が作れる)。ただし、不連続な有限個の点 x_i において

$$G'(x_i^-) = \lim_{x\to x_i^-} G(x)\ ,\ G'(x_i^+) = \lim_{x\to x_i^+} G(x) \quad (1 \le i \le n)$$

は存在するとします。つまり、関数 $G(x)$ とその導関数 $G'(x)$ が $[a, b]$ で区分的に連続であるとき、関数 G は $[a, b]$ で区分的に滑らかとなります。

このような関数を踏まえて、リーマン・ルベーグの定理を使うことでフーリエ級数 (9) の収束性が示せます。証明は省いて結果だけ言えば、2π の周期を持つ区分的に滑らかな関数 $F(x)$ は、連続な点においてフーリエ級数がそのまま成立し、不連続点 x_c においては、三角関数で書けば

$$\frac{F(x_c^+) + F(x_c^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x_c}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x_c}{T}) \quad (F(x_c^+) \neq F(x_c^-))$$

が成立します。言い換えれば、区分的に滑らかな周期 2π の関数 $F(x)$ のフーリエ級数 (9) は収束し、不連続点を持たない連続な関数 $F(x)$ ならフーリエ級数は $F(x)$ に一様収束するということです。一様収束は雑に言えば、ある関数列 $f_N(x)$ において $(N = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$、それの極限

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x) \quad (\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \lim_{N\to\infty}(a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)) = F(x))$$

が x に関係なく決まることです (x によるときは各点収束)。不連続点があると一様収束ではなくなります。また、不連続点付近ではギブス現象と呼ばれるものがおきます。

一様収束と関連する話として項別積分可能なのかどうかというのがあります。上ではフーリエ級数した無限個の各項をそれぞれ積分できるという前提で行いました。これは

$$\int dx \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int dx\ f_n(x)$$

が可能だということで、これが成立するなら項別積分可能となります。しかし、一般的には無限和の項別積分は可能ではなく、項別積分可能なためには

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

が一様収束している必要があります (各点収束では可能と言えない)。

簡単に一様収束なら確かに (9) はフーリエ級数になっていることを示しておきます。まず、$F(x)$ の展開

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12}$$

は一様収束する、つまり

$$\lim_{N\to\infty} |F(x) - S_N(x)| = 0 \quad \left(S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) \tag{13}$$

となっているとします。この展開がフーリエ級数だと言えるためには a_n が

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F(x)\cos nx$$

で求まればいいです (b_n も同様なので a_n だけ見ます)。そのためには (12) に $\cos mx$ をかけて積分した

$$\int_{-\pi}^{\pi} dxF(x)\cos mx = \int_{-\pi}^{\pi} dx\ a_0 \cos mx + \int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\cos mx$$

の右辺第二項において項別積分可能でなくてはいけません (Σ を積分の外に出せないと (9) を出すときの a_n の計算ができない)。言い換えれば $F(x)\cos mx$ に一様収束している必要があります。一様収束しているためには

$$S_N \cos mx = a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\cos mx$$

と $F(x)\cos mx$ が、

$$\lim_{N\to\infty} |F(x)\cos mx - S_N \cos mx| = 0 \tag{14}$$

となっていればいいです。これはすぐに確かめられます。絶対値部分は

$$|F(x)\cos mx - S_N \cos mx| = |F(x) - S_N||\cos mx|$$

であるので、$|\cos mx|$ は 1 以下であることと (13) から、(14) は成立しています。なので、$F(x)\cos mx$ の展開は一様収束することから、項別積分が可能になり、a_n を積分によって求めることが出来ます。よって、$F(x)$ の展開 (12) が $F(x)$ に一様収束しているなら、フーリエ級数です。