解の存在と一意性

1 階微分方程式の解の存在と一意性を示します。ここではピカールの逐次近似法を使っています。
連立での話は最後に付け足す程度でしかしません。
解析学の入門的な知識はあるとして話を進めています。

使う関係を先に並べておきます。証明は省くので、気になる人は解析学の本を見てください。

- ある区間で連続な関数 F には正の定数 M による $|F(x)| \leq M$ という制限があります。これは $|F(x)|$ は無限大にならずに有限の値までしか持たないことを意味します。数学用語では $F(x)$ は有界 (bounded) と言います。

- $F(x)$ が閉区間 $[a,b]$ $(a \leq x \leq b)$ で連続、開区間 (a,b) $(a < x < b)$ で微分可能なとき

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{dF}{dx}|_{x=c} \tag{1}$$

  となる、閉区間 $[a,b]$ に含まれる c がいます。これは平均値の定理と呼ばれます。

- ある連続な関数による数列 $\{F_1, F_2, \ldots\}$ があるとします。これが、x のある区間において、$\epsilon > 0$ と、ϵ に依存する正の整数 $N(\epsilon)$ があったとき

$$|F(x) - F_n(x)| < \epsilon \quad (n > N(\epsilon)) \tag{2}$$

  となるなら、$F_n(x)$ は $F(x)$ に一様収束すると言います。x の区間で一様収束しているとき、区間に含まれる範囲の積分に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b dxF_n(x) = \int_a^b dx \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \int_a^b dxF(x) \tag{3}$$

  のように、極限と積分を交換できます。これはルベーグの収束定理を使っても同様の結果になります。

- 閉区間 $[a,b]$ の積分の絶対値には

$$\Big|\int_a^b dx\ F(x)\Big| \leq \int_a^b dx\ |F(x)| \tag{4}$$

  という不等式があります。これは三角不等式です

例えば単振動の微分方程式が与えられたとき、初期条件を与えれば解が 1 つ出てくるのが当たり前だとして計算します (知りたい現実の運動に対応する解が 1 つ出てくるはずだから)。この当たり前な感覚が数学において正しいことを示します。これは数学では、解の存在 (existence) と一意性 (uniqueness) と呼ばれます。解の存在は解があること、一意性は初期条件によって解が 1 つに決まることです。

一意性がない場合の例を示しておきます。微分方程式として

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

とし、初期条件を $y(0)=0$ とします。これを満たす解は

$$y(x) = (x-C)^2 \quad x > C$$

と出来ます。C は定数で、$x \leq C$ では $y(x)=0$ です。これで初期条件を満たしています。しかし、初期条件を決めているのに定数 C が任意のまま残っています。このため、初期条件 $y(0)=0$ を満たす解が 1 つに決まっていません。なので、解の存在はあっても、一意性はないです。一意性がないのは、$\sqrt{y}$ の導関数 $y^{-1/2}/2$ は後で出てくるリプシッツ条件を満たさないからです。ちなみに、右辺を $\sqrt{|y|}$ として解いても、同じように解は 1 つに決まりません。

ここから解の存在と一意性について見ていきます。未知関数 $y(x)$ による 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{5}$$

を考えます。このとき、初期条件は $y(x_0)=y_0$ と与えられているとします。$f(x,y)$ は定数 a,b による領域 $|x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b$ で連続とし、この長方形の領域を R と書くことにします。さらに、y による偏微分 $\partial f/\partial y$ もこの領域 R で連続とします。そうすると、R において正の定数 M,N によって

$$|f(x,y)| \leq M \tag{6a}$$

$$|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}| \leq N \tag{6b}$$

となっています ($f(x,y)$ と $\partial f/\partial y$ は R において有界)。$\partial f/\partial y$ を連続にしていることが大事です。(6b) と平均値の定理 (1) から、R 内の $(x,Y_1),(x,Y_2)$ に対して

$$|f(x,Y_1)-f(x,Y_2)| \leq N|Y_1-Y_2|$$

というリプシッツ条件 (Lipschitz condition) と呼ばれるものが与えられます。(6b) であれば $f(x,y)$ はリプシッツ条件を満たすので、後の話では (6b) しか使いません。

この設定のもとで (5) の解が存在することを示します。まず (5) を変形させます。x_0 を含む区間 I で積分して (I の範囲は後で与えます)、初期条件を満たすように

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} ds\ f(s,y(s)) \tag{7}$$

とします ($y(x_0)=y_0$)。これは微分と積分の関係

$$\int_{x_0}^{x} ds\ \frac{dy}{ds}=y(x)-y_0$$

から確かめられます。(7) の解 $y(x)$ は (5) と初期条件 $y(x_0)=y_0$ を満たす解です。なので、(7) を扱います。

解が存在することを調べるために、連続的な関数 $y_k(x)$ による数列 $\{y_1,y_2,\ldots,y_k,\ldots\}$ を用意します。この数列が

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} ds\ f(s,y_0),\ y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} ds\ f(s,y_1(s)),\ \ldots,y_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} ds\ f(s,y_{k-1}(s),\ldots \tag{8}$$

とし、$y_0=y(x_0)$ です。そして、式から分かるように $y_k(x_0)=y_0$ となっており、初期条件を満たすようになっています。これらの式の構造から、y_1 は y_0 から、y_2 は y_1 からのようにして、次々に y_k が求まります。このようなものは逐次近似法と呼ばれ、今の場合はピカール (Picard) の逐次近似法と呼ばれます。発想は、(7) での $f(s,y)$ に正体が分からない $y(x)$ がいるから、最初は分かっている y_0 を使うことで計算し、次に求まった y_1 を y_0 の代わりに $f(s,y)$ に入れていくというものです。そして、これの繰り返しで近似の精度が上がり、無限回の極限で (7) の解 $\lim_{k\to\infty} y_k(x)=y(x)$ となることを期待します。

というわけで、まず目標とするのは

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = y_0 + \lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^x ds\ f(s, y_{k-1}(s)) \ \Rightarrow\ y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x ds\ f(s, y(s))$$

を示すことです。これが示せれば、ピカールの逐次近似法による収束先が (7) の解 $y(x)$ となります。よって、(5) とその初期条件による解が存在することになります。

与えられている $f(x,y)$ の領域 R に対して、数列 $\{y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots\}$ が x のどの区間で与えられるかを求めます。まず y_0 は初期条件そのものなので、R にいます。y_1 では、R にいるためには $|y_1 - y_0| \leq b$ なので、$|y_1 - y_0|$ を見ます。これは積分の絶対値の不等式 (4) から

$$|y_1(x) - y_0| = \Big|\int_{x_0}^x ds\ f(s, y_0)\Big| \leq \int_{x_0}^x ds\ |f(s, y_0)|$$

$f(x,y)$ は R で連続としているので、(6a) から $|f(x,y)| \leq M$ です。そうすると、$|f(s,y_0)|$ を $f(x,y)$ の最大である正の定数 M に置き換えて積分したものは、必ず元の積分より大きくなるので

$$\int_{x_0}^x ds\ |f(s, y_0)| \leq M|x - x_0|$$

右辺の絶対値は負にならないようにするためです ($|y_1(x) - y_0|$ より大きいので $x < x_0$ のときも正になる必要がある)。これから、$|y_1 - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b$ となっていれば R にいることになります。よって、x の区間は

$$|x - x_0| \leq \frac{b}{M}$$

であればいいことになります。一方で、$|x - x_0| \leq a$ です。なので、b/M より a が小さければ $|x - x_0| \leq a$ で R にいます。よって、$a,\ b/M$ のより小さい方を選んでいれば、R にいると言えます。$a,\ b/M$ の小さい方を選んだものを α とします。数学記号で書けば $\alpha = \min(a, b/M)$ です。$X = \min(A, B)$ は A, B の小さい方が X という意味です。また、これによって積分の区間 I は $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$ として与えられます。

というわけで、y_1 が R にいるためには

$$|x - x_0| \leq \alpha$$

であればいいです。後は y_{k+1} で同様のことが言えれば帰納法で証明できます。y_{k+1} も同様のことからすぐに

$$|y_{k+1} - y_0| = \Big|\int_{x_0}^x ds\ f(s, y_k)\Big| \leq \int_{x_0}^x ds\ |f(s, y_k)| \leq M|x - x_0| \leq b$$

となるので、区間 $|x - x_0| \leq \alpha$ での x に対して、$y_k(x)$ は R にいます。

ピカールの逐次近似法の数列 $\{y_1, y_2, \ldots\}$ は区間 I $(x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha)$ で定義できることが分かったので、後は収束先がどこか分かればいいです。まず、$|y_{k+1} - y_k|$ を見てみると

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| = \Big|\int_{x_0}^x ds\ (f(s, y_k) - f(s, y_{k-1}))\Big| \leq \int_{x_0}^x ds\ |f(s, y_k) - f(s, y_{k-1})|$$

$f(s, y_k)$ に対して平均値の定理 (1) を使うと

$$\frac{f(s, y_k) - f(s, y_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} = \frac{\partial f(s,y)}{\partial y}\Big|_{y=\eta}$$

f は 2 変数なので y による偏微分にしています。η は y_k と y_{k-1} の間にいます。さらに、(6b) から $|\partial f/\partial y| \leq N$ なので、これらを使うことで

$$|f(s,y_k)-f(s,y_{k-1})|=\big|(y_k(s)-y_{k-1}(s))\frac{\partial f}{\partial y}|_{y=\eta}\big|\leq N|y_k(s)-y_{k-1}(s)|$$

よって

$$|y_{k+1}-y_k|\leq\int_{x_0}^{x}ds\ |f(s,y_k)-f(s,y_{k-1})|\leq N\int_{x_0}^{x}ds\ |(y_k(s)-y_{k-1}(s)|$$

ここで、y_1 と y_0 での $|y_1-y_0|\leq M|x-x_0|$ を使えば、$|y_2-y_1|$ は

$$|y_2-y_1|\leq N\int_{x_0}^{x}ds\ |y_1(s)-y_0(s)|\leq NM\int_{x_0}^{x}ds\ |s-x_0|=\frac{1}{2}NM|x-x_0|^2$$

s の範囲は x_0 から x なので普通に積分できます。そして、$|x-x_0|\leq\alpha$ から

$$|y_2-y_1|\leq\frac{1}{2}NM\alpha^2$$

となり、$|y_3-y_2|$ では

$$|y_3-y_2|\leq N\int_{x_0}^{x}ds\ |(y_2(s)-y_1(s)|\leq\frac{1}{2}N^2M\int_{x_0}^{x}ds\ |s-x_0|^2=\frac{1}{3!}N^2M|x-x_0|^3\leq\frac{1}{3!}N^2M\alpha^3$$

となります。このように、毎回 N と、$|s-x_0|^n$ の積分から $1/n$ と $|s-x_0|^{n+1}$ が出てくるので、法則性が見えてきて

$$|y_{k+1}-y_k|\leq\frac{M}{(k+1)!}N^k\alpha^{k+1}\tag{9}$$

これを利用して収束性を見ます。

y_k を無理やり数列による和の形

$$\begin{aligned}y_k(x)&=y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\cdots+(y_{k-1}-y_{k-2})+(y_k-y_{k-1})\\&=y_0+\sum_{n=0}^{k-1}(y_{n+1}(x)-y_n(x))\end{aligned}\tag{10}$$

にします。そして、(9) の和を考えて

$$\sum_{n=0}^{\infty}|y_{n+1}-y_n|\leq M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}N^k\alpha^{k+1}\tag{11}$$

右辺が収束していれば、左辺も収束します。収束を見るために、指数関数のテーラー展開

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

と比べてみます。右辺を変形させれば

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{N^{k+1}\alpha^{k+1}}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(N\alpha)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(N\alpha)^k}{k!}-1=e^{N\alpha}-1$$

よって、(11) は収束し、

$$\sum_{k=0}^{\infty}(y_{k+1}-y_k)$$

の級数は絶対収束します。そうすると、(10) は

$$\lim_{k\to\infty}y_k(x)=y_0+\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k-1}(y_{n+1}(x)-y_n(x))=y(x)$$

のように、適当な $y(x)$ に収束します。

これでピカールの逐次近似法から求められる $y_k(x)$ は区間 I $(x_0-\alpha\leq x\leq x_0+\alpha)$ において何かに収束することが確かめられました。この $y(x)$ が (7) を満たせば、解が存在することになります。

(8) は

$$y_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}ds\ f(s,y_{k-1})$$

これの k が無限大の極限を取ると

$$\lim_{k\to\infty}y_k(x)=y_0+\lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x}ds\ f(s,y_{k-1}) \tag{12}$$

$y_k(x)$ が $y(x)$ に一様収束していれば、(3) のように右辺で極限と積分を交換できます。なので、一様収束しているかを確かめます。

$y_k(x)$ と $y(x)$ は

$$y_k(x)=y_0+\sum_{n=0}^{k-1}(y_{n+1}(x)-y_n(x))$$

$$y(x)=y_0+\sum_{n=0}^{\infty}(y_{n+1}(x)-y_n(x))$$

なので、差を取って絶対値を取れば三角不等式から

$$|y-y_k|=\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(y_{n+1}-y_n)-\sum_{n=0}^{k-1}(y_{n+1}-y_n)\Big|=\Big|\sum_{n=k}^{\infty}(y_{n+1}-y_n)\Big|\leq\sum_{n=k}^{\infty}|y_{n+1}-y_n|$$

これは (11) から

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty}|y_{n+1}-y_n| &\le M\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}N^k\alpha^{k+1} \\
&= \frac{M}{N}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}(N\alpha)^{k+1} \\
&= \frac{M}{N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k+1)!}(N\alpha)^{k+n+1} \\
&= \frac{M}{N}(N\alpha)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1+k)!}(N\alpha)^{n}
\end{aligned}
$$

階乗は

$$
\begin{aligned}
(n+1+k)! &= (n+1+k)(n+k)(n-1+k)\cdots(1+k)k(k-1)\cdots \\
&= (n+1+k)(n+k)(n-1+k)\cdots(1+k)k!
\end{aligned}
$$

なので

$$
\frac{M}{N}(N\alpha)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1+k)!}(N\alpha)^{n} = \frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{k+1}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1+k)(n+k)(n-1+k)\cdots(1+k)}(N\alpha)^{n}
$$

分母が小さければこれより大きくなるので、分母で $k=0$ として

$$
\frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{k+1}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1+k)(n+k)(n-1+k)\cdots(1+k)}(N\alpha)^{n} \le \frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{k+1}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(N\alpha)^{n}
$$

さらに 1 もなくして

$$
\frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{k+1}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(N\alpha)^{n} \le \frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{k+1}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(N\alpha)^{n} = \frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{k+1}}{k!}e^{N\alpha}
$$

よって

$$
|y(x)-y_k(x)| \le \frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{k+1}}{k!}e^{N\alpha}
$$

これの右辺は

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0
$$

から、k の無限大の極限で 0 です。よって、$\epsilon>0$ とそれによる正の整数 $N(\epsilon)$ に対して

$$
|y(x)-y_k(x)| \le \frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{k+1}}{k!}e^{N\alpha} < \epsilon \quad (k>N(\epsilon))
$$

が言えるので、一様収束しています。

$y_k(x)$ が一様収束していることが確認できたので、(12) の積分と極限を入れ替えて

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = y_0 + \lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x} ds\ f(s, y_{k-1})$$
$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} ds\ \lim_{k\to\infty} f(s, y_{k-1})$$

そして、$f(x, y)$ は連続としていることから、変数 y_{k-1} に対する極限に出来るので

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} ds\ f(s, y)$$

よって、$y(x)$ は (8) の解です。なので、微分方程式 (5) と初期条件 $y(x_0) = y_0$ は、$f(x, y)$ と $\partial f/\partial y$ が R において連続のとき、区間 I において解を持ちます。

これで解の存在は示されました。次に一意性を見ます。一意性は初期条件に対して解が 1 つに定まることです。なので、確かめるためには 2 つの解 Y_1, Y_2 を用意して、差が 0 になることを示せばいいです。Y_1, Y_2 を区間 I での解として

$$Y_2 - Y_1 = \int_{x_0}^{x} ds\ f(s, Y_2) - \int_{x_0}^{x} ds\ f(s, Y_1)$$

絶対値を取って

$$|Y_2 - Y_1| = \Big|\int_{x_0}^{x} ds\ (f(s, Y_2) - f(s, Y_1))\Big| \le \int_{x_0}^{x} ds\ |f(s, Y_2) - f(s, Y_1)|$$

f に対して Y_1, Y_2 による平均値の定理を使えば

$$\frac{f(s, Y_2) - f(s, Y_1)}{Y_2 - Y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\eta}$$

これの絶対値を取れば

$$|f(s, Y_2) - f(s, Y_1)| = \Big|\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\eta}\Big||Y_2 - Y_1| \le N|Y_2 - Y_1|$$

となり、リプシッツ条件になります。これを入れて

$$|Y_2 - Y_1| \le \int_{x_0}^{x} ds\ |f(s, Y_2) - f(s, Y_1)| \le N\int_{x_0}^{x} ds\ |Y_2(s) - Y_1(s)| \tag{13}$$

ここで

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} ds\ |Y_2(s) - Y_1(s)| \ge 0$$
$$\frac{dG}{dx} = |Y_2(x) - Y_1(x)|$$

とおきます。x と x_0 の大小によって符号が反転しますが、ここでは $x > x_0$ で行います。$x < x_0$ では符号を逆にして同じことをすればいいです。そうすると、(13) は

$$\frac{dG}{dx} \leq NG(x)$$

$$\frac{dG}{dx} - NG(x) \leq 0$$

e^{-Nx} をかければ

$$e^{-Nx}\frac{dG}{dx} - e^{-Nx}NG(x) = \frac{d}{dx}(e^{-Nx}G(x))$$

となるので

$$\frac{d}{dx}(e^{-Nx}G(x)) \leq 0$$

これを x で積分して

$$e^{-Nx}G(x) \leq C$$

C は定数です。$G(x)$ には定義から $G(x) \geq 0$ と $G(x_0) = 0$ の条件があるので、$C = 0$ でなくてはならなく

$$e^{-Nx}G(x) \leq 0$$

$$G(x) \leq 0$$

そうすると、$G(x) \geq 0,\ G(x) \leq 0$ であるためには $G(x) = 0$ となります。なので

$$|Y_2 - Y_1| = 0$$

となり

$$Y_1 = Y_2$$

が言えます。よって、解は 1 つに決まるので、一意性が示されたことになります。

結果をまとめます。関数 $f(x, y)$ と $\partial f/\partial y$ は $|x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b$ において連続とします (a, b は定数)。そのとき、区間 $|x - x_0| \leq \alpha$ ($\alpha = \min(a, b/M),\ |f(x, y)| \leq M$) においてピカールの逐次近似法による収束先は、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

と初期条件 $y(x_0) = y_0$ に対する解であり、1 つに決まります。よって、この微分方程式と初期条件に対する解は一意的に存在します。

今の話は n 個の未知関数による連立方程式に拡張できます。具体的に証明せずに雰囲気だけ言っておきます。例えば、2 個のときの連立方程式として

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2)\ ,\ \frac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2)$$

があり、それぞれの初期条件が $y_1(x_0)=c_1,\ y_2(x_0)=c_2$ となっていたとします。これは変数が 1 つ増えた状況です。$f_{1,2},\partial f_{1,2}/\partial y$ の連続な領域を $|x-x_0|\leq a,\ |y_i-c_i|\leq b\ (i=1,2)$ とし

$$|\frac{\partial f}{\partial y_1}|\leq N\ ,\ |\frac{\partial f}{\partial y_2}|\leq N$$

のように設定することになり、計算する対象が増えるだけで基本的には同じ状況です。このため計算の手間が増えますが同様のことから、n 個の連立に対しても解の存在と一意性が言えます。

これが重要なことです。理由は n 階微分方程式は 1 階微分方程式に変形させることが出来るからです。例えば、2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x)$$

では $(a(x),b(x),f(x)$ は与えられている連続な関数)、$y_1=y,\ y_2=dy/dx$ とすれば

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2\ ,\ \frac{dy_2}{dx}+a(x)y_2+b(x)y_1=f(x)$$

として連立の 1 階微分方程式になります。特に上での $f(x,y)$ に対応する部分は明らかに $\partial f/\partial y$ の性質 (リプシッツ条件) を満たすようになっています。このため、2 階線形微分方程式の解の存在と一意性がここでの話から証明されます (線形なら n 階でも成立しているので、n 階線形微分方程式の解の存在と一意性が証明される)。また、このように 1 階微分方程式の形にすると、2 階微分方程式では初期条件は $y_1=y$ と $y_2=dy/dx$ の 2 つに対して与える必要があることがはっきりします。これが 2 階微分方程式の一般解には任意定数が 2 つ含まれる理由です (2 つの初期条件に対応する 2 つの任意定数)。