微分

数学側の話なので、物理で出てくることはほとんどない内容です。具体的な話もしてません。
R は実数全体の集合です。
ここでの ϵ, δ や ϵ_1, δ_1 のように添え字がついているものは極限の定義に使われるもので、極限と連続の定義は式を書くだけですませています。

[A1] 関数 f が区間 I での点 a で微分可能なら、f は連続。

[A2] 微分の規則

[A3] 区間 I において、$a \in I$ で連続で、$f(x) - f(a) = \phi(x)(x-a)$ となる関数 ϕ が存在するなら、関数 f は a で微分可能。

[A4] 関数 f は a で微分可能、関数 g は $f(a)$ で微分可能なら、その合成関数 $g \circ f$ は微分可能で、$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$。

[A5] 関数 f が a で微分可能で $f'(a) \neq 0$ であり、f の逆関数 g が $c = f(a)$ で微分可能なら、$g'(c) = \dfrac{1}{f'(a)}$。

[A6] 関数 f が区間 I において狭義単調増加、連続、$f'(a) \neq 0$ となっているとき、$J = \{f(x)|\ x \in I\}$ において f の逆関数 g は $c = f(a)$ で微分可能となり、$g'(c) = \dfrac{1}{f'(a)}$。

[A7] 区間 I で連続な関数 f が I の端点を除いた点 c で極値を持ち、f が c で微分可能なら、$f'(c) = 0$。

[A8] ロルの定理

[A9] 平均値の定理

[A10] コーシーの平均値の定理

[A11] 関数 f が c で微分可能なとき、$f'(c) > 0$ なら $c < x < c + r$ であるとき $f(x) > f(c)$ となる r が存在し、$f'(c) < 0$ なら $c - r < x < c$ であるとき $f(x) > f(c)$ となる r が存在する。

[A12] ロピタルの規則:0/0 の場合

[A13] ロピタルの規則:∞/∞ の場合

単語の定義を与えていきます。

- 微分係数

  区間 I があり (右微分、左微分の項も参照)、関数 f は $f: I \to \mathrm{R}$ とします。$a \in I$ として、任意の正の実数 $\epsilon > 0$ に対応する $\delta(\epsilon) > 0$ があり、$0 < |x-a| < \delta(\epsilon)$ $(x \in I)$ であるなら

$$|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha| < \epsilon$$

  となるとき、a で f は微分可能 (differentiable) と言い、α を a での f の微分係数 (differential coefficient, derivative) と言います。lim で書けば、f に対して

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

となっていれば微分可能で、$f'(a)$ が $x=a$ での f の微分係数です。この式は、$x=a+h$ として

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と書かれることも多いです。

f が I の各点で微分可能なら、f は I で微分可能と言われ、$f'(x)$ と書かれます。このときの f' は I での関数になるので、$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数 (derivative function) と呼びます。導関数を求めることを微分すると言います (微分の項も参照)。

関数 $f'(x)$ が $x=a$ で微分可能なら、$f'(x)$ の微分係数が求まり、それは $f''(a)$ として「$'$」の数を増やして表記します。f' は f でない別の関数とすることも多いので、紛らわしくないように使う必要があります。ここでは「$'$」は微分係数の意味で使います。

表記の仕方として、「$'$」が増えると見づらいので、f' を $f^{(1)}$、f'' を $f^{(2)}$ と表記した $f^{(n)}$ がよく使われます。$f^{(0)}$ と書かれているときは f です。

微分可能な関数を表す表記として C^n $(n\geq 0)$ があり、これは n 回微分が可能な関数という意味です。全ての n で微分可能なら C^∞ と表記されます。C^∞ に含まれる関数は無限微分可能 (infinity differentiable) と言われます。ただし、C とだけ書いているときは連続な関数の意味です。

- ライプニッツの記法

導関数 $f'(x)$ に対してライプニッツ (Leibniz) の記法と呼ばれる表記が使われます。ライプニッツの記法は微分の回数に合わせて

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}\ ,\ f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}\ ,\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

となっています。(x) を省いて df/dx とも書かれます。注意ですが、これは表記であって、df という量を dx という量で割るという意味を持っていません (そもそも df, dx が何か定義していない)。ただし、微分係数の定義から

$$df\ \Leftrightarrow\ f(x)-f(a)\ ,\ dx\ \Leftrightarrow\ x-a$$

として、差が微小になっている場合として定義されていることもあります。このように定義すると具体的な計算が分かりやすくなるので、物理での微分の表記はほぼこの意味になっています。

ライプニッツの記法は

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)$$

といった書き方もされます。$x=a$ のときでは

$$f'(a)=\frac{df(x)}{dx}|_{x=a}$$

と表記されます。微分は本によっていろいろな表記が使われているので、紛らわしいときは確認する必要があります。

ライプニッツの記法を使って規則をまとめると

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df(x)}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}\frac{df(x)}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{1}{(g(x))^2}\frac{dg(x)}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(g(x))^2}(\frac{df(x)}{dx}g(x) - f(x)\frac{dg(x)}{dx})$$
$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{dg(f(x))}{dx}\frac{df(x)}{dx}$$

これらは [A2] と [A5] で示しています。

- 微分

大抵の場合で導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を微分すると言いますが、厄介なことに、微分は別の意味で定義されています。物理の感覚で使っている微分は differentiation（微分法、微分演算）で、これは導関数を求めるという意味です (ライプニッツの記法はこの意味で使われる)。これに対して differential は、$f(x)$ が a で微分可能として

$$df = f'(a)x$$

と与えた関数 df のことで、df を微分 (differential) と呼びます。より一般的には、偏微分を使って全微分 (total differential) として定義されているものです。そして、f を x とすれば $x' = 1$ から $dx = x'x = x$ となるので（微分係数の定義から $(x-a)/(x-a) - 1 = 0 < \epsilon$)、微分は

$$df = f'(a)dx$$

と表記されます。いちいち単語を区別するのも面倒なので、ここでは区別する必要性がない場合では微分という単語だけですませます。

注意すべきなのは df, dx は微小量とはしていないことです。物理でよく出てくる f の微小変化 Δf と x の微小変化 Δx を使って

$$\Delta f = f'(a)\Delta x$$

と書いたものは 1 次近似ですが、微分 df は近似ではないです。

- 右微分、左微分

微分を区間として定義しましたが、例えば閉区間 $[a, b]$ で微分可能な場合、その端点での極限は右極限か左極限となります。このため、a, b では

$$D^+ f(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$D^- f(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

として片側極限で定義され、$D^+ f(a)$ では右微分係数 (right differential coefficient)、$D^- f(b)$ では左微分係数（left differential coefficient）と呼ばれ、a で右微分可能、左微分可能と言います。a, b 以外の $c \in (a, b)$ では

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = D^+ f(c) = D^- f(c)$$

となっており、このときが微分可能です。

このように区間の端点を含んだ定義域では右微分、左微分のみしか与えられない状況が出てくるので、開区間として微分を定義することが多いです。しかし、ここでは、右微分係数、左微分係数のどちらも微分係数と呼んでしまうために、区間を開区間に限定していません。なので、ここで区間で微分可能と言っているときは、例えば $[a, b]$ での a, b では $D^\pm f$ の意味、端点を除いては f' の意味としています。ただし、端点でも $f'(a)$ と表記します。

- 極値

　関数 $f : X \to \mathrm{R}$ $(X \subset \mathrm{R})$ が $c \in X$ で

$$f(x) \le f(c) \quad (x \in X)$$

となっているとき、f は c で最大値を持つと言い、$f(c)$ が最大値となります。同様に

$$f(x) \ge f(c) \quad (x \in X)$$

となっているとき、f は c で最小値を持つと言い、$f(c)$ が最小値となります。

　X と c の ϵ-近傍 $V_\epsilon(c)$ (開区間 $(c - \epsilon, c + \epsilon)$) による共通部分 $X \cap V_\epsilon(c)$ において、$f(c)$ が最大値となるなら極大値 (local maximum, relative maximum)、最小値となるなら極小値 (local minimum, relative minimum) と呼ばれます。なので、c で極大値もしくは極小値であることは

$$f(x) \le f(c)\ ,\ f(x) \ge f(c) \quad (x \in X \cap V_\epsilon(c))$$

と書けます。極大値か極小値を持つとき、f は極値 (extremum) を持つと言われます。

- 滑らかな関数

　区間 I において $f'(x)$ $(x \in I)$ があり、$f'(x)$ が連続であるなら、$f(x)$ は I で滑らか (smooth) と定義され、滑らかな関数と呼ばれます。I で $f(x)$ と $f'(x)$ が部分的に連続なら、$f(x)$ は部分的に滑らかとされます。

定理を求めていきます。

[A1] 関数 f が区間 I での点 a で微分可能なら、f は連続。

$x \neq a$ とすると

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

これの極限は

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

微分可能なので $f'(a)$ は存在し、$x - a$ の極限はあるので

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\lim_{x \to a}(x - a) = f'(a)(a - a) = 0$$

よって、連続の定義そのものになり、微分可能なら連続です。
しかし、連続なら微分可能とはならないです。これは反例をいくつでも作れるからで、例えば $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

となるので連続ですが、$x = 0$ での微分係数は

$$\lim_{x \to 0}\frac{|x| - 0}{x - 0}$$

となるために定義できないです。

[A2] 微分の規則
関数 f, g は区間 I の点 a で微分可能とし

(A2-1) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(A2-2) 実数 c に対して $(cf)'(a) = cf'(a)$

(A2-3) $(fg)'(a) = f'(a)g'(a)$

(A2-4) $g(x) \neq 0$ なら、$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

(A2-1)：関数の和からそのまま示せます。関数の和は

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

となっているので

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

f, g は微分可能なので、極限を取れば

$$(f+g)'(a) = \lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a)$$

となります。

(A2-2)：$(cf)(x)$ は $cf(x)$ なので

$$\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} = c\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

後は極限を取れば、$(cf)'(a) = cf'(a)$ です。

(A2-3)：関数の積を $h(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$ と表記します。h が微分可能なとき

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\end{aligned}$$

第 1 項の極限は、微分可能なら連続なので

$$\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x) = g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

よって

$$h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

と求まります。

また、$f = g$ のとき

$$(f^2)'(a) = f'(a)f(a) + f(a)f'(a) = 2f'(a)f(a)$$

これは n 個のときも同じように繰り返せば

$$(f^n)'(a) = n(f(a))^{n-1}f'(a)$$

となります。

(A2-4)：$g(x) \neq 0$ として、$h(x) = (f/g)(x) = f(x)/g(x)$ とします。そうすると

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{1}{x-a}(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}) &= \frac{1}{x-a}\frac{g(x)g(a)}{g(x)g(a)}(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}) \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}\frac{1}{x-a}(f(x)g(a) - f(a)g(x)) \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}\frac{1}{x-a}(f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)) \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a})\end{aligned}$$

よって、極限を取れば

$$\frac{1}{g(a)}\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a})=\frac{1}{(g(a))^2}(f'(a)g(a)-f(a)g'(a))$$

なので

$$h'(a)=(\frac{f}{g})'(a)=\frac{1}{(g(a))^2}(f'(a)g(a)-f(a)g'(a))$$

また、f が 1 なら

$$h'(a)=(\frac{1}{g})'(a)=-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$$

となります。

[A3] 関数 f が区間 I で定義されているとする。I において、$a\in I$ で連続で

$$f(x)-f(a)=\phi(x)(x-a)$$

となる関数 ϕ が存在するなら、f は a で微分可能。これは必要十分条件。

f は $a\in I$ で微分可能と仮定します。微分可能なら

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ,\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

これらから、$x=a$ では

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & (x\neq a)\\ f'(a) & (x=a)\end{cases}\tag{1}$$

となるように関数 ϕ が作れるので

$$f(x)-f(a)=\phi(x)(x-a)$$

$x=a$ でも両辺が 0 になるので式は成立します。また

$$\lim_{x\to a}\phi(x)=f'(a)=\phi(a)$$

となるので、ϕ は a で連続です。よって、f が a で微分可能なら a で連続な関数 ϕ は存在します。

逆を示します。このときは、連続で (1) とすればいいので

$$\lim_{x\to a}\phi(x)=\phi(a)$$

$$\phi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\qquad(x\neq a)$$

これはそのまま

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\phi(a)=f'(a)$$

となるので、f は a で微分可能です。

同じことを $\phi(x)$ を $f'(a)+\eta(x)$ として言っている場合もあります。η は a を含む区間で定義される関数です。このときは

$$f(x)=f(a)+(f'(a)+\eta(x))(x-a)$$

となり、η を

$$\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a) & (x\neq a)\\ 0 & (x=a)\end{cases}$$

と与えることで同じ話になります。実際に、f が微分可能なら

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+\eta(x)\ ,\ f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

なので

$$\lim_{x\to a}\eta(x)=\eta(a)=0\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to a}\phi(x)=\phi(a)=f'(a)$$

となります。

[A4] 区間 I_f, I_g があり、関数 f, g を $f: I_f\to\mathrm{R},\ g: I_g\to\mathrm{R}$ とし、$f(I_f)=\{f(x)|x\in I_f\}$ を I_g の部分集合とする。f が a で微分可能、g は $f(a)$ で微分可能なら、その合成関数 $g\circ f$ は微分可能で、$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$。

合成関数は $f(x)$ を変数とする g の意味なので、$(g\circ f)(x)=g(f(x))$ です。

f は微分可能なので、[A3] から

$$f(x)-f(a)=\phi(x)(x-a)\ ,\ \phi(a)=f'(a)$$

となる関数 ϕ がいます。$f(I_f)$ が I_g の部分集合で、g は微分可能なので $g'(f(a))$ はいるので、[A3] から $y\in I_g$ として

$$g(y)-g(f(a))=\chi(y)(y-f(a))\ ,\ \chi(f(a))=g'(f(a))$$

となる関数 χ もいます。そうすると、$y=f(x)\in I_g$ と書くことにすれば

$$g(f(x))-g(f(a))=\chi(f(x))(f(x)-f(a))=\chi(f(x))\phi(x)(x-a)=(\chi\circ f)(x)\phi(x)(x-a)$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}&=(\chi\circ f)(x)\phi(x)\\ \lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}&=\lim_{x\to a}(\chi\circ f)(x)\lim_{x\to a}\phi(x)\end{aligned}$$

左辺の分子は $(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)$ なので左辺は $(g\circ f)'(a)$ ($f(x)$ は連続なので $g(f(x))=h(x)$ と見ればいい)、右辺は

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}(\chi\circ f)(x)=\chi(f(a))=g'(f(a))\\ &\lim_{x\to a}\phi(x)=\phi(a)=f'(a)\end{aligned}$$

なので

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$$

と求まります。合成関数の微分は連鎖律 (chain rule) と呼ばれます。
　厳密さがなくなる代わりに、実用上では困らない単純な示し方もあります。まず

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

と書き換えて

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}f'(a)$$

g は微分可能で、$f(x)=y,\ f(a)=b$ と置くと $x\to a$ で $y\to b$ なので

$$\lim_{y\to b}\frac{g(y)-g(b)}{y-b}=g'(b)=g'(f(a))$$

よって

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'(f(a))f'(a)$$

となって同じ結果になります。これが厳密でないのは、最初の変形は $f(x)-f(a)=0$ では行えないからです。

[A5] 関数 f が a で微分可能で $f'(a) \neq 0$ であり、f の逆関数 g が $c = f(a)$ で微分可能なら、$g'(c) = \dfrac{1}{f'(a)}$。

逆関数 g は f が区間 I で与えられているなら、$g(f(x)) = x$ $(x \in I)$ の意味です。$g(f(x))$ は合成関数 $(g \circ f)$ のことなので、[A4] から

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

x' は

$$x' = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

よって、$g(f(x)) = x$ から

$$g'(f(a))f'(a) = 1$$

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

と求まります。

ライプニッツの記法では $y = f(x)$、$x = g(y)$ として

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

と書かれます。

[A6] 関数 f は区間 I において狭義単調増加で連続とし、f は $a \in I$ で微分可能で $f'(a) \neq 0$ とする。このとき、$J = \{f(x)|\ x \in I\}$ において f の逆関数 g は $c = f(a)$ で微分可能となり、$g'(c) = \dfrac{1}{f'(a)}$。

「連続関数」の [A7],[A8] から、区間 I において f が狭義単調増加で連続な関数のとき、J は区間になり、その逆関数 g は J において狭義単調増加で連続な関数になります。このことから

$$y = f(x)\ ,\ x = g(y) \quad (x \in I,\ y \in J)$$

とし、$c = g(t) \in I,\ t = f(c) \in J$ とします。

逆関数が微分可能になるのか求めます。すでに逆関数が微分可能なら $1/f'$ になることは分かっているので、極限の定義から、$\epsilon > 0, \delta > 0$ として

$$g'(t) = \lim_{y \to t} \frac{g(y) - g(t)}{y - t} \ \Rightarrow\ |\frac{g(y) - g(t)}{y - t} - \frac{1}{f'(c)}| < \epsilon \quad (0 < |y - t| < \delta)$$

となることを示すことにします。

g は J で連続なので

$$|g(y) - g(t)| = |g(y) - c| < \epsilon_g \quad (|y - t| < \delta_g) \tag{2}$$

$f'(c)$ は

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{\lim_{x\to a}(f(x)-f(c))}{\lim_{x\to c}(x-c)}$$

$f'(c)\neq 0$ なので

$$\frac{1}{f'(c)} = \lim_{x\to c}\frac{x-c}{f(x)-f(c)} \ \Rightarrow\ |\frac{x-c}{f(x)-f(c)} - \frac{1}{f'(c)}| < \epsilon_f \quad (|x-c|<\delta_f)$$

このとき、$|x-c|<\delta_f$ は g が連続 (2) なので

$$|x-c| = |g(y)-c| < \epsilon_g \quad (|y-t|<\delta_g)$$

となり、ϵ_f に対して $|y-t|<\delta_g$ となる δ_g がいることになります。そうすると

$$|\frac{x-c}{f(x)-f(c)} - \frac{1}{f'(c)}| < \epsilon_f \quad (|y-t|<\delta_g)$$

書き換えれば

$$|\frac{x-c}{f(x)-f(c)} - \frac{1}{f'(c)}| = |\frac{g(y)-g(t)}{y-t} - \frac{1}{f'(c)}| < \epsilon_f \quad (|y-t|<\delta_g)$$

よって、ϵ_f に対して $|y-t|<\delta_g$ となる δ_g が存在するので、極限は

$$g'(t) = \lim_{y\to t}\frac{g(y)-g(t)}{y-t} = \frac{1}{f'(c)}$$

となります。

[A7] 区間 I で連続な関数 f が I の端点を除いた点 c で極値を持つとする。f が c で微分可能なら、$f'(c)=0$。

最大値・最小値の定理から、閉区間 I で連続な関数は最大値と最小値を持ちます (「連続関数」の [A4])。しかし、もし区間の端点で最大値 (もしくは最小値)$f(c)$ を持つ関数の場合、$f'(c)=0$ とならない例が簡単に作れます。例えば、閉区間 $[0,1]$ での $f(x)=x^2+2x$ は $x=0$ で最小値となりますが、$f'(x)=2x+2$ なので $f'(0)\neq 0$ です。このため、端点を除いたとしています (c は区間の内点)。

$f(c)$ が極大値を持ち、$f'(c)>0$ になっていると仮定します。c で微分可能なので、定義から

$$|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)| < \epsilon \quad (0<|x-c|<\delta) \tag{3}$$

$V_\delta(c)$ は $|x-c|<\delta$ なので、このときの x は $x\in V_\delta(c),\ x\neq c$ のことです。これは不等式にすれば

$$f'(c)-\epsilon < \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

これに対して $\epsilon = f'(c)/2 > 0$ と選べば

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{1}{2}f'(c) > 0$$

x ($x \neq c$) は $V_\delta(c)$ において任意なので、$x > c$ と選ぶと

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) > 0 \tag{4}$$

$f(c)$ は $V_\delta(c)$ での極大値としているので $f(x) \leq f(c)$ ですが、$f(x) > f(c)$ のため矛盾します。なので、$f'(c) > 0$ は成立しません。

今度は $f'(c) < 0$ と仮定してみると、(3) の不等式から

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \epsilon$$

$\epsilon = -f'(c)/2 > 0$ と選べば

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < \frac{1}{2}f'(c) < 0$$

となるので、$x < c$ として

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) > 0$$

これから $f(x) > f(c)$ なので、$f'(c) < 0$ でも成立しません。

よって、極大値を持つなら $f'(c) = 0$ となります。極小値のときも同様です。

[A8] ロル (Rolle) の定理

閉区間 $[a, b]$ で関数 f は連続、開区間 (a, b) で f は微分可能、$f(a) = f(b) = 0$ であるとき、$f'(c) = 0$ となる c が (a, b) に少なくとも 1 つ存在する。

f が閉区間 $[a, b]$ で 0 ならそのまま成立するので、0 でないとします。

連続関数の最大値・最小値の定理から $[a, b]$ において最大値、最小値が存在します。$f(a) = f(b) = 0$ なので、f が正の値を持つなら最大値は正、f が負の値を持つなら最小値は負です。そして、端点 a, b で 0 なので、最大値もしくは最小値となる c は (a, b) にいます。よって、(a, b) で微分可能なので、$f'(c)$ は存在します。

極大値は最大値を区間内の c の δ-近傍で与えればよく、(a, b) に c はいるので c の δ-近傍は作れます。よって、[A7] から $f'(c) = 0$ です。

[A9] 平均値の定理 (mean value theorem)

閉区間 $[a, b]$ で関数 f は連続、開区間 (a, b) で f は微分可能なとき

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

となる c が (a, b) に少なくとも 1 つ存在する。

x, y 軸による 2 次元のグラフを考えます。$f(a)$ と $f(b)$ を繋ぐ直線の傾きは

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

これが x 軸上の $[a,b]$ 内にいる x での y の値は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

これと $f(x)$ との差は

$$g(x)=f(x)-(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a))$$

f は $[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能なので、$g(x)$ も $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能です。そして、a, b で

$$g(a)=g(b)=0$$

となっているので、ロルの定理から $g'(c)=0$ となる c が (a,b) にいます。よって、g の微分は

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

となるので

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

となります。

平均値の定理から $f'=0$ のとき f は定数という当たり前のように使う性質が示せます。$a<x$ として $[a,x]$ に平均値の定理を使うと

$$f(x)-f(a)=f'(x)(x-a)$$

$f'(x)=0$ なら右辺は消えるので、$f(x)=f(a)$ となり $x\in[a,b]$ において定数になります。

[A10] コーシーの平均値の定理

関数 f, g が閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能、(a,b) において g' は 0 でないとき、$g(a)\neq g(b)$ となり

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が (a,b) に存在する。

$x\in(a,b)$ とします。平均値の定理を g に使えば

$$g(b) - g(a) = g'(x)(b-a)$$

$g'(x) \neq 0$ なので $g(b) - g(a) \neq 0$ となり、$g(b) \neq g(a)$ です。

$[a, b]$ において、平均値の定理のときを真似て

$$h(x) = f(x) - (\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) + f(a))$$

という関数を作ってみます。f, g は $[a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能なので、h も同様です。そうすると、ロルの定理から

$$h'(c) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) = 0$$

となる c が (a, b) にいます。よって、$g'(x) \neq 0$ なので

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となります。

[A11] 区間 I での関数 f が $c \in I$ で微分可能なとき、$f'(c) > 0$ なら $c < x < c + r$ であるとき $f(x) > f(c)$ となる r が存在し、$f'(c) < 0$ なら $c - r < x < c$ であるとき $f(x) > f(c)$ となる r が存在する。

[A7] の (4) で示しているように、$f'(c) > 0,\ x > c$ なら

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) > 0 \quad (0 < x - c < \delta)$$

よって、$f'(c) > 0$ では $c < x < c + \delta$ において $f(x) > f(c)$ です。

同様に、$f'(c) < 0,\ x < c$ なら

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) > 0 \quad (-\delta < x - c < 0)$$

よって、$f'(c) < 0$ では $c - \delta < x < c$ において $f(x) > f(c)$ です。

[A12] ロピタルの規則 (L'Hôpital's rule):0/0 の場合

関数 f, g は (a, b) で微分可能で、g' が 0 でないとする。γ を実数もしくは $\pm\infty$ として、右極限が

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0\ ,\ \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \quad (x \in (a, b))$$

であるとき

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

左極限でも同様に成立する。また、$-\infty \le a < b \le \infty$ でも成立する。

a, b を実数としますが、$-\infty \le a < b \le \infty$ でも同じ話です。
γ が実数の場合から示します。f'/g' の a での右極限がいるので

$$|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \gamma| < \epsilon \quad (a < x < a + \delta) \tag{5}$$

$c = a + \delta$ とします。
(a, b) において、$a_1 < b_1$ とします。微分可能としているので、g は $[a_1, b_1]$ で連続です。なので、$[a_1, b_1]$ での平均値の定理から

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{g(b_1) - g(a_1)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (g(a_1) \neq g(b_1)) \tag{6}$$

となる x が (a_1, b_1) にいます。(5) では $a < x < c$ なので、(a_1, c) としても同じように成立します。
f, g は $a+$ の極限で 0 になるので、$a_1 \to a$ での極限で

$$\frac{f(c) - f(a)}{g(c) - g(a)} = \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$c \to a$ での極限を取ると、これは $x \to a$ にもなることから

$$\lim_{c \to a+} \frac{f(c)}{g(c)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma$$

と求まります。
次に、γ が無限大の場合を見ます。関数 $f : X \to \mathrm{R}$ の極限が $+\infty$ であることは、ある定数 $s > 0$ と $\delta > 0$ があり、$0 < |x - a| < \delta$ のとき $f(x) > s$ $(x \in X)$ となることです。$-\infty$ では $f(x) < s$ です。
(6) は成立しているので

$$\frac{f(c) - f(a_1)}{g(c) - g(a_1)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (x \in (a, c))$$

$a_1 \to a$ にすれば、$\gamma = +\infty$ ならある定数 $s > 0$ に対して

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} > s$$

となるので、$c \to a$ で

$$\lim_{c \to a+} \frac{f(c)}{g(c)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$$

$\gamma = -\infty$ なら $< s$ になるだけです。よって、極限 γ は無限大になります。

[A13] ロピタルの規則 (L'Hôpital's rule):∞/∞ の場合
関数 f, g は (a, b) で微分可能で、g' が 0 でないとする。γ を実数もしくは $\pm\infty$ として、右極限が

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty\ ,\ \lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty\ ,\ \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \quad (x \in (a, b))$$

であるとき

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

左極限でも同様に成立する。また $-\infty \leq a < b \leq \infty$ でも成立する。

a, b を実数としますが、$-\infty \leq a < b \leq \infty$ でも同じ話です。
最初の設定は 0/0 のときと同じにします。f'/g' の a での右極限はいるので

$$|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \gamma| = |\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - \gamma| < \epsilon \quad (a < x < a+\delta) \tag{7}$$

$c = a + \delta$ とします。$a < a_1 < b_1 < b$ として、コーシーの平均値の定理から

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b_1)-f(a_1)}{g(b_1)-g(a_1)} \tag{8}$$

となる x が (a_1, b_1) にいます。$a_1 < x < c$ として、(a_1, c) でコーシーの平均値の定理が成立しているとします。
(8) の右辺を $f(a_1)/g(a_1)$ を分離させるように変形すると

$$\frac{f(c)-f(a_1)}{g(c)-g(a_1)} = -\frac{1}{g(a_1)}\frac{f(c)-f(a_1)}{1-g(c)/g(a_1)} = (\frac{f(a_1)}{g(a_1)} - \frac{f(c)}{g(a_1)})\frac{1}{1-g(c)/g(a_1)}$$

となるので

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}(1 - \frac{g(c)}{g(a_1)}) = \frac{f(a_1)}{g(a_1)} - \frac{f(c)}{g(a_1)}$$
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(a_1)}{g(a_1)} - \frac{f(c)}{g(a_1)} + \frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(c)}{g(a_1)}$$

これの右辺は、左辺の $x \to a+$ の極限 (7) での不等式から

$$\gamma - \epsilon < \frac{f(a_1)}{g(a_1)} - \frac{f(c)}{g(a_1)} + \frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(c)}{g(a_1)} < \gamma + \epsilon \tag{9}$$

$g(a_1)$ は $a_1 \to a$ で $\pm\infty$ なので、第 2 項と第 3 項での極限は 0 です。つまり、$\epsilon_1 > 0,\ \delta_1 > 0$ として

$$|\frac{f(c)}{g(a_1)} - \frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(c)}{g(a_1)} - 0| = |\frac{f(c)}{g(a_1)} - \frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(c)}{g(a_1)}| < \epsilon_1 \quad (a < a_1 < a+\delta_1)$$

となっていて、不等式で書けば

$$-\epsilon_1 < \frac{f(c)}{g(a_1)} - \frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(c)}{g(a_1)} < \epsilon_1$$

(9) と合わせれば

$$\gamma - \epsilon - \epsilon_1 < \frac{f(a_1)}{g(a_1)} < \gamma + \epsilon + \epsilon_1$$

$\epsilon + \epsilon_1$ を ϵ と置きなおして

$$\gamma - \epsilon < \frac{f(a_1)}{g(a_1)} < \gamma + \epsilon \quad (a < a_1 < a + \delta_1)$$

よって、$a_1 < x < c$ から $x \to a+$ は $a_1 \to a+$ なので

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{a_1 \to a+} \frac{f(a_1)}{g(a_1)} = \gamma$$

となります。

　γ が無限大の場合を見ます。$\gamma = +\infty$ として、このときの極限は、$s > 0$ に対して

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > s \quad (a < x < a + \delta)$$

そうすると

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(a_1)}{g(a_1)} - \frac{f(c)}{g(a_1)} + \frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(c)}{g(a_1)} > s$$

第 2 項と第 3 項が $a_1 \to a$ で消えるのは同じなので

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(a_1)}{g(a_1)} > s - \epsilon_1 \quad (a < a_1 < a + \delta_1)$$

$\epsilon_1 = s/2$ と選ぶことにすれば

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(a_1)}{g(a_1)} > \frac{1}{2}s$$

となるので

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{a_1 \to a+} \frac{f(a_1)}{g(a_1)} = +\infty$$

$-\infty$ でも同様です。