2 階線形微分方程式

n 階への発展性は考えずに 2 階線形微分方程式での話をします。細かい部分での数学的な厳密さは無視しています。
いくつかの具体例は使っていますが、基本的には一般的な話をしています。
解く方法については、同次での階数低減法、非同次での未定係数法と定数変化法に触れています。
「$'$」は x での微分です ($y' = dy/dx,\ y'(x_0) = dy/dx|_{x=x_0}$)

　最初に「1 階線形微分方程式」では省いた初期値問題に触れておきます。単純な例として 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x$$

を使います。これを積分すれば、定数を C として

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

と一般解が求まります。このとき任意定数 C の値によって無数の解があります。しかし、一般解に $y(x)$ の条件を与えれば任意定数 C は決まり、解が 1 つに決まります（無数の解の中から条件を満たす解を取り出す）。これは解の一意性と呼ばれます。例えば $x = 0$ で $y(x = 0) = 0$ になるとすれば $C = 0$ となり、条件のもとで $y(x) = x^2/2$ に解が決まります。一般的な初期条件の形は、$x = x_0$ で $y(x_0) = y_0$ のように与えられます (y_0 は定数)。このときは $C = -x_0^2/2 + y_0$ です。
　このように、任意定数を決めるための条件を初期条件と言い、初期条件を満たす解 (特解、特殊解) を見つけることを初期値問題 (initial value problem) やコーシー問題と言います。この意味で、一般解は任意定数を含み、適当な初期条件によって任意の解（任意定数が決まった解）が求まるものと言えます。また、線形微分方程式での初期値問題では解は存在し一意的に決まります (「解の存在と一意性」参照)。簡単に言えば、線形微分方程式に初期条件を与えれば解が 1 つ求まるということです。
　今度は 2 階微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \tag{1}$$

としてみます。a は定数です。これは 2 回積分すればいいので、一般解は

$$\frac{dy}{dx} = ax + C_1 \tag{2a}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + C_1x + C_2 \tag{2b}$$

と求まります。今は任意定数が 2 つあるので、$y(x)$ に条件を与えても C_1, C_2 は決まりません。実際に、$x = x_0$ で $y(x_0) = y_0$ としても C_1, C_2 の関係式が出てくるだけです ($x_0 = 0, y_0 = 0$ としても C_2 しか決まらない)。一方で、(2a) は 1 階微分方程式なので、$Y(x) = dy/dx$ に条件を与えれば C_1 が決まります。そうすれば、(2b) での条件による C_1, C_2 の関係式にその結果を入れれば C_2 が決まります。というわけで、2 階微分方程式の任意定数を決めるためには $y(x)$ と dy/dx に条件を与える必要があります。これは 2 つの未知数 α, β を決めるには 2 つの方程式 (連立方程式) が必要というのと同じです。
　というわけで、n 階微分方程式に対する初期条件は $x = x_0$ において

$$y(x_0) = y_0\ ,\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = y_1\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=x_0} = y_2\ ,\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0} = y_{n-1}$$

となります。$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ は定数です。ここからは、簡単のために微分の表記に

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}\ ,\ y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ y'(x_0) = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$$

も使っていきます。

条件に初期とついているのは、運動方程式を見ればわかります。(1) で文字を付け替えて、y を位置 x、x を時間 t とすれば、定数 a で加速している物体の運動の式になります。そうすると、速度 $dx/dt = v(x)$ として、条件を $t = 0$ で $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ とすれば、時間 $t = 0$ での物体の位置と速度を与えることになるので、初期の条件です。そして、この 2 つの条件によって、物体の運動（軌道）が 1 つに決まり（(2b) では任意定数ごとに異なる軌道を描く）、欲しい運動を取り出せます。

2 階線形微分方程式の話に移ります。2 階線形微分方程式の一般形は

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = f(x) \tag{3}$$

y が未知関数、a, b, f は与えられている連続な関数です。見ての通り、未知関数 y とその導関数がすべて 1 次までなので、線形方程式です。$f(t) = 0$ で同次 (斉次)、$f(t) \neq 0$ で非同次 (非斉次) となります。先に同次の場合を扱います。

同次での一般形は

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0 \tag{4}$$

この形から、同次での解の性質が分かります。1 つは任意の解の定数倍も解ということです。実際に、定数を C、解を $Y(x)$ として、$CY(x)$ を入れてみると

$$\frac{d^2}{dx^2}(CY) + a(x)\frac{d}{dx}(CY) + b(x)(CY) = C(\frac{d^2}{dx^2}Y + a(x)\frac{d}{dx}Y + b(x)Y)$$

Y は解としているので (4) から、最右辺の括弧部分は 0 です。よって

$$\frac{d^2}{dx^2}(CY) + a(x)\frac{d}{dx}(CY) + b(x)(CY) = 0$$

となり、$CY(x)$ も解になっています。もう 1 つの性質は 2 つの解 $Y_1(x), Y_2(x)$ を足した $Y_1(x) + Y_2(x)$ も解というものです。この場合も

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}(Y_1 + Y_2) + a(x)\frac{d}{dx}(Y_1 + Y_2) + b(x)(Y_1 + Y_2) \\
&\quad = \frac{d^2}{dx^2}Y_1 + a(x)\frac{d}{dx}Y_1 + b(x)Y_1 + \frac{d^2}{dx^2}Y_2 + a(x)\frac{d}{dx}Y_2 + b(x)Y_2
\end{aligned}$$

において、Y_1, Y_2 の項は (4) からそれぞれが 0 になるので

$$\frac{d^2}{dx^2}(Y_1 + Y_2) + a(x)\frac{d}{dx}(Y_1 + Y_2) + b(x)(Y_1 + Y_2) = 0$$

となり、$Y_1 + Y_2$ は解になっています。

そして、この 2 つの性質を合わせれば $C_1Y_1 + C_2Y_2$ も解になっていることがすぐに分かります。「1 階線形微分方程式」で触れたように、解を定数倍して足したものも解になることを重ね合わせの原理と言います。このように、同次では 2 つの解から新しい解を作れ、これを利用することで一般解を求められます。

同次の 2 階線形微分方程式の解が 2 つ分かっているとき、一般解が作れることを示します。単純に言ってしまえば、2 階微分方程式は一般解は任意定数を 2 つ持つので、定数倍でない 2 つの解 Y_1, Y_2 に重ね合わせの原理を

使った、$C_1Y_1+C_2Y_2$ が一般解として使えるということです。ただし、一般解であるなら、初期条件を与えることで任意の解が作れる必要があります。これを確かめます。
　確かめることは、$y(x)=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)$ に初期条件として $x=x_0$ で $y(x_0)=\alpha,\ y'(x_0)=\beta$ (α,β は定数) と与えたとき

$$C_1Y_1(x_0)+C_2Y_2(x_0)=\alpha$$

$$C_1Y_1'(x_0)+C_2Y_2'(x_0)=\beta \quad (Y'(x_0)=\frac{dY}{dx}|_{x=x_0})$$

これらが成立する C_1,C_2 がいるかどうかです。細かく言えば、線形微分方程式の解の存在と一意性から与えられた初期条件を満たす解は存在し 1 つに決まっているので、初期条件に対する C_1,C_2 を確かめればいいということです。
　ただの連立方程式なので C_2 を消すようにすれば、C_1 は

$$C_1=\frac{\alpha Y_2'-\beta Y_2}{Y_1Y_2'-Y_1'Y_2}=\frac{y(x_0)Y_2'(x_0)-y'(x_0)Y_2(x_0)}{Y_1(x_0)Y_2'(x_0)-Y_1'(x_0)Y_2(x_0)}=\frac{y(x_0)Y_2'(x_0)-y'(x_0)Y_2(x_0)}{W}$$

同様に C_2 は

$$C_2=\frac{\beta Y_1-\alpha Y_1'}{Y_1Y_2'-Y_1'Y_2}=\frac{y'(x_0)Y_1(x_0)-y(x_0)Y_1'(x_0)}{Y_1(x_0)Y_2'(x_0)-Y_1'(x_0)Y_2(x_0)}=\frac{y'(x_0)Y_1(x_0)-y(x_0)Y_1'(x_0)}{W}$$

よって、$W\neq 0$ のとき、C_1,C_2 は存在し求めることが出来ます。この結果から、$W\neq 0$ であれば、$y(x)=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)$ は一般解となります。ここで出てきた W はロンスキアン (Wronskian) と呼ばれ

$$W(Y_1,Y_2)=Y_1(x)Y_2'(x)-Y_1'(x)Y_2(x)$$

と定義されます。
　しかし、ロンスキアン $W(Y_1,Y_2)$ は、$Y_1(x),Y_2(x)$ から x に依存しているために、ある初期条件での $x=\eta$ で $W\neq 0$ でも、異なる初期条件での $x=\xi$ では $W=0$ になる可能性があります。そうすると、初期条件によっては C_1,C_2 が存在しない (解がない) ことになり、$C_1Y_1+C_2Y_2$ は一般解とは言えなくなります（解の存在と一意性から、初期条件を与えれば解が存在するから)。
　なので、W の x 依存性を調べます。ある x の範囲内で与えられている解 Y_1,Y_2 は、(4) の解なので

$$Y_1''(x)+a(x)Y_1'(x)+b(x)Y_1(x)=0$$

$$Y_2''(x)+a(x)Y_2'(x)+b(x)Y_2(x)=0$$

これらから

$$Y_1Y_2''-Y_2Y_1''+a(Y_1Y_2'-Y_2Y_1')=0$$

ロンスキアン W に書き換えると

$$\frac{d}{dx}W+aW=0 \quad (\frac{d}{dx}W=\frac{d}{dx}(Y_1Y_2'-Y_2Y_1')=Y_1Y_2''-Y_2Y_1'')$$

変数分離で解ける典型的な 1 階微分方程式なので

$$\frac{d}{dx}W = -aW$$

$$\int \frac{dW}{W} = -\int dx\ a(x)$$

$$W = C\exp\big[-\int dx\ a(x)\big]$$

C は定数です。そうすると、exp 部分は任意なので、$C=0$ のとき $W(x)=0$、$C\neq 0$ のとき $W(x)\neq 0$ となり、x とは無関係に $W=0$ か $W\neq 0$ が決まっています。よって、解 Y_1, Y_2 が与えられている x の範囲内で、$W=0$ なら $C=0$、$W\neq 0$ なら $C\neq 0$ です。これで、$W\neq 0$ のとき、$C_1Y_1+C_2Y_2$ は Y_1, Y_2 が与えられている x の範囲内で一般解と出来ます。

Y_1, Y_2 の関係をはっきりさせるために、$W=0$ のとき Y_1 と Y_2 の関係がどうなっているかを見ます。$W=0$ なら

$$Y_1(x)Y_2'(x) - Y_1'(x)Y_2(x) = 0$$

ここで

$$\frac{d}{dx}\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Y_1'}{Y_2} - \frac{Y_1Y_2'}{Y_2^2} = \frac{Y_1'Y_2 - Y_1Y_2'}{Y_2^2}$$

を使えば

$$\begin{aligned}
0 &= Y_1(x)Y_2'(x) - Y_1'(x)Y_2(x) \\
&= \frac{1}{Y_2^2}(Y_1(x)Y_2'(x) - Y_1'(x)Y_2(x)) \\
&= -\frac{d}{dx}\frac{Y_1}{Y_2}
\end{aligned}$$

なので、積分して、C を定数として

$$\frac{Y_1}{Y_2} = C$$

となり、$W=0$ のとき Y_1 は Y_2 の定数倍です。逆に、Y_1 は Y_2 の定数倍として、$Y_1 = CY_2$ としてロンスキアンに入れれば

$$W(Y_1, Y_2) = Y_1(x)Y_2'(x) - Y_1'(x)Y_2(x) = CY_1(x)Y_1'(x) - CY_1'(x)Y_1(x) = 0$$

となるので、$Y_1 = CY_2$ のとき $W=0$ になります。よって、$W=0$ は Y_1 と Y_2 が定数倍の関係であることを意味し、$W\neq 0$ は定数倍の関係でない場合です。

というわけで、まとめれば、(4) の定数倍の関係でない（ロンスキアンが 0 でない）2 つの解 Y_1, Y_2 が求まっているなら、同次の 2 階線形微分方程式 (4) の一般解は

$$y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) \tag{5}$$

と与えられます。なので、実際に同次の 2 階線形微分方程式を解くとき、2 つ解を見つければそれの重ね合わせによって一般解が求まります。

同次は終わりにして、非同次での (3) に移ります。(3) の一般解の形を与えます。これは 1 階線形微分方程式の場合と同じです。非同次の 2 階線形微分方程式の特解を $y_p(x)$ とし、同次での解 $y_h(x)$ を足して

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{6}$$

とします。(3) の左辺に (6) を入れれば

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}(y_h + y_p) + a(x)\frac{d}{dx}(y_h + y_p) + b(x)(y_h + y_p)\\&\qquad = \frac{d^2}{dx^2}y_h + a(x)\frac{d}{dx}y_h + b(x)y_h + \frac{d^2}{dx^2}y_p + a(x)\frac{d}{dx}y_p + b(x)y_p\end{aligned}$$

y_h は同次、y_p は非同次での解なので、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}y_h + a(x)\frac{d}{dx}y_h + b(x)y_h = 0\\\frac{d^2}{dx^2}y_p + a(x)\frac{d}{dx}y_p + b(x)y_p = f(x)\end{aligned}$$

から

$$\frac{d^2}{dx^2}(y_h + y_p) + a(x)\frac{d}{dx}(y_h + y_p) + b(x)(y_h + y_p) = f(x)$$

よって、$y = y_h + y_p$ は非同次の解となります。このとき、y_p は固定されているとすれば、非同次の解 y は y_h によって変わります。言い換えれば、全ての y_h によって全ての y が決まります。全ての y_h は一般解のことなので、y_h を同次での一般解 y_c とすれば全ての y、つまり非同次の一般解になります。よって、非同次の一般解は、同次としたときの一般解 y_c と非同次の何かしらの特解 y_p によって

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

と与えられます。y_c が 2 つの定数を含むために一般解の条件も満たしています。

初期条件の視点からも見ておきます。$y(x)$ を一般解として、$y(x)$ の初期条件が $x = x_0$ で与えられているなら

$$\begin{aligned}y(x_0) &= y_c(x_0) + y_p(x_0)\\y_c(x_0) &= y(x_0) - y_p(x_0) \qquad (7)\end{aligned}$$

2 階微分方程式なので y' にも条件がありますが省いています。特解 $y_p(x)$ は、一般解 $y(x)$ の特解としか言っていないので任意です。そうすると、任意の特解に対して、(7) を満たすように $y_c(x_0)$ を選ぶ必要があります。つまり、初期条件に合うように $y_c(x)$ をうまく選ばなくてはならないので、$y_c(x)$ は同次での一般解の必要があります (初期条件に合うように同次の一般解の任意定数を決める)。

というわけで、非同次の (3) での一般解は

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

となり、同次の一般解の形 (5) を使えば

$$y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + y_p(x)$$

この手順は同次での一般解が求まらなければどうにもなりませんし、特解を見つけるのも面倒です。また、当たり前ですが、積分するだけで求まるような場合では今の話は意味がなく、積分した結果がそのまま一般解です。

ここから 2 階線形微分方程式を解く方法を示します。解く方法は与えられた微分方程式によって異なりますが、ある程度の有効範囲で使える方法はあるので、それを見ていきます。

同次の 2 階線形微分方程式を解く方法の 1 つとして階数低減法 (reduction of order) を示します。まずは、分かりやすい例で先に実際に行います。同次の 2 階線形微分方程式として

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

を使います。見た目から、$y = e^x$ は解とすぐに分かります。そうすると、e^x の定数倍でないもう 1 つの解が分かれば (5) から、一般解は求まります。これも見た目からすぐに e^{-x} と分かりますが、一般的に使える方法でもう 1 つの解を求めます。

(5) での 2 つの解 $Y_1(x), Y_2(x)$ は定数倍でないので、$Y_2(x)/Y_1(x) = u(x)$ となる関数 $u(x)$ がいます。今は $Y_1(x) = e^x$ なので

$$Y_2(x) = u(x)e^x$$

これを微分方程式の左辺に入れれば

$$\begin{aligned}\frac{d^2Y_2}{dx^2} - Y_2 = \frac{d^2}{dx^2}(u(x)e^x) - u(x)e^x &= \frac{d}{dx}(\frac{du}{dx}e^x + ue^x) - ue^x \\ &= (\frac{d^2u}{dx^2}e^x + \frac{du}{dx}e^x + \frac{du}{dx}e^x + ue^x) - ue^x \\ &= e^x(\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx})\end{aligned}$$

よって、微分方程式は、$e^x \neq 0$ から

$$\begin{aligned}0 &= e^x(\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}) \\ &= \frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

となります。ここで、$w = du/dx$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dx}+2w&=0\\
\int\frac{dw}{w}&=\,-2\int dx\\
w(x)&=A_1e^{-2x}\\
\frac{du}{dx}&=A_1e^{-2x}\\
u&=A_1\int dx\ e^{-2x}\\
&=\,-\frac{1}{2}A_1e^{-2x}+A_2
\end{aligned}
$$

A_1, A_2 は定数です。これから Y_2 は

$$
Y_2=u(x)e^x=(-\frac{1}{2}A_1e^{-2x}+A_2)e^x=-\frac{1}{2}A_1e^{-x}+A_2e^x
$$

Y_2 に任意定数はいらないので、A_1, A_2 を

$$
A_1=-2\ ,\ A_2=0
$$

と決めてしまいます。そうすると、重ね合わせの原理から

$$
C_1Y_1+C_2Y_2=C_1e^x+C_2e^{-x}
$$

e^x, e^{-x} のロンスキアンは

$$
W(e^x,e^{-x})=-e^xe^{-x}-e^xe^{-x}\neq 0
$$

から $W\neq 0$ なので、一般解は

$$
y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}
$$

となります。

これが階数低減法と呼ばれる解き方です。見てきたように、階数低減法は同次の場合で解が 1 つ分かっているときに使われます。今の話を一般化するために、一般的な同次の 2 階線形微分方程式で同様のことを行います。

(4) での解として $Y_1(x)$ が分かっているとします。このとき、Y_2 が Y_1 の定数倍でないなら

$$
Y_2(x)=u(x)Y_1(x)
$$

となる $u(x)$ がいます。これの微分

$$
\begin{aligned}
\frac{dY_2}{dx}&=\frac{du}{dx}Y_1+u\frac{dY_1}{dx}\\
\frac{d^2Y_2}{dx^2}&=\frac{d}{dx}(\frac{du}{dx}Y_1+u\frac{dY_1}{dx})=\frac{d^2u}{dx^2}Y_1+2\frac{du}{dx}\frac{dY_1}{dx}+u\frac{d^2Y_1}{dx^2}
\end{aligned}
$$

から、Y_2 を (4) に入れれば

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2Y_2}{dx^2} + a(x)\frac{dY_2}{dx} + b(x)Y_2 \\
&= \frac{d^2u}{dx^2}Y_1 + 2\frac{du}{dx}\frac{dY_1}{dx} + u\frac{d^2Y_1}{dx^2} + a(\frac{du}{dx}Y_1 + u\frac{dY_1}{dx}) + buY_1 \\
&= u(\frac{d^2Y_1}{dx^2} + a\frac{dY_1}{dx} + bY_1) + \frac{d^2u}{dx^2}Y_1 + 2\frac{du}{dx}\frac{dY_1}{dx} + a\frac{du}{dx}Y_1
\end{aligned}$$

Y_1 は (4) の解なので第一項は消えて

$$\frac{d^2u}{dx^2}Y_1 + \frac{du}{dx}(2\frac{dY_1}{dx} + aY_1) = 0$$

ここで、$w = du/dx$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\frac{dw}{dx}Y_1 + w(2\frac{dY_1}{dx} + aY_1) = 0 \\
\int \frac{dw}{w} &= -\int dx(\frac{2}{Y_1}\frac{dY_1}{dx} + a) \\
&= -2\int dx\frac{1}{Y_1}\frac{dY_1}{dx} - \int dx\ a(x) \\
\log w &= -2\log Y_1 - \int dx\ a(x) + C \\
w &= \exp[-2\log Y_1 - \int dx\ a(x) + C] \\
&= A_1 Y_1^{-2}(x)\exp[-\int dx\ a(x)]
\end{aligned}$$

w を u に戻して

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= A_1 Y_1^{-2}(x)\exp\big[-\int dx\ a(x)\big] \\
u(x) &= A_1\int dx\ Y_1^{-2}(x)\exp\big[-\int dx\ a(x)\big] + A_2
\end{aligned}$$

A_1, A_2 は定数です。

よって、$Y_1(x)$ が分かっているとき

$$\begin{aligned}
Y_2(x) &= u(x)Y_1(x) \\
u(x) &= A_1\int dx\ Y_1^{-2}(x)\exp\big[-\int dx\ a(x)\big] + A_2
\end{aligned}$$

から、Y_2 が求まります（もしくは Y_1, Y_2 の関係が分かる）。A_2 は任意の値、A_1 は 0 以外の任意の値を入れることが出来ます。これが一般的な階数低減法の形です。

非同次の 2 階線形微分方程式での一般解を求めるときに問題になるのが、特解の求め方です。$a(x), b(x)$ が定数のときによく使われるのは「1 階線形微分方程式」でも触れた未定係数法 (method of undetermined coefficients) です。未定係数法は勝手に解の形を予想して、微分方程式を満たすように上手く作る方法です。物理で出てくる問題では、$a(x), b(x)$ が定数で、$f(x)$ が

$$e^x \ , \ \cos x + \sin x \ , \ x^n$$

という形や、これらの組み合わせで出てくることが多いです。このとき、特解も $f(x)$ に合わせて

$$Ae^{cx} \ , \ A\cos x + B\sin x \ , \ Ax^n$$

のように仮定し、微分方程式に入れて係数を特定することで、特解を求めます。

未定係数法では、基本的に $a(x), b(x)$ が定数のときに使えるという制限がありますが、制限がなく一般的に使える方法もあります。これも「1 階線形微分方程式」で出てきた定数変化法です。

まず、同次での解 Y_1, Y_2 が分かっているとし、同次での一般解 $y_c(x)$ を

$$y_c(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x)$$

とします。ここで、定数 C_1, C_2 を関数 $u_1(x), u_2(x)$ に置きかえたものが、非同次の 2 階線形微分方程式 (3) の特解

$$y_p(x) = u_1(x)Y_1(x) + u_2(x)Y_2(x) \tag{8}$$

になるとします。つまり、これで特解になるような $u_1(x), u_2(x)$ を求めることになります。

$y_p(x)$ を微分していけば

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= u_1'(x)Y_1(x) + u_1(x)Y_1'(x) + u_2'(x)Y_2(x) + u_2(x)Y_2'(x) \\
y_p''(x) &= u_1''(x)Y_1(x) + u_1'(x)Y_1'(x) + u_1'(x)Y_1'(x) + u_1(x)Y_1''(x) \\
&\quad + u_2''(x)Y_2(x) + u_2'(x)Y_2'(x) + u_2'(x)Y_2'(x) + u_2(x)Y_2''(x)
\end{aligned}$$

となりますが、このままでは明らかに元の微分方程式より複雑になります。なので、u_1, u_2 に条件を与えます。u_1, u_2 は勝手においた関数なので、勝手に条件をつけて問題ありません。条件を

$$u_1'(x)Y_1(x) + u_2'(x)Y_2(x) = 0 \tag{9}$$

と与えれば、u_1'', u_2'' が出てこなくなり

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= u_1(x)Y_1'(x) + u_2(x)Y_2'(x) \\
y_p''(x) &= u_1'(x)Y_1'(x) + u_1(x)Y_1''(x) + u_2'(x)Y_2'(x) + u_2(x)Y_2''(x)
\end{aligned}$$

(8) は (3) の特解としているので、(3) に入れて

$$\begin{aligned}
&u_1'Y_1' + u_1Y_1'' + u_2'Y_2' + u_2Y_2'' + a(u_1Y_1' + u_2Y_2') + b(u_1Y_1 + u_2Y_2) \\
&\quad = u_1(Y_1'' + aY_1' + Y_1) + u_2(Y_2'' + aY_2' + bY_2) + u_1'Y_1' + u_2'Y_2'
\end{aligned}$$

Y_1, Y_2 は同次での解なので括弧部分は 0 になり、(3) は

$$u_1'Y_1' + u_2'Y_2' = f$$

となります。よって、u_1, u_2 は条件 (9) とこれによる

$$\begin{aligned} u_1'(x)Y_1(x) + u_2'(x)Y_2(x) &= 0 \\ u_1'(x)Y_1'(x) + u_2'(x)Y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

という、連立の 1 階微分方程式から決定されます。
　連立方程式なので、u_1', u_2' を消すように変形すれば

$$u_1'(Y_1Y_2' - Y_1'Y_2) = fY_2\ ,\ u_2'(Y_1Y_2' - Y_1'Y_2) = fY_1$$

というわけで、ロンスキアン $W = Y_1Y_2' - Y_1'Y_2$ を使って

$$u_1'(x) = -\frac{Y_2(x)}{W}f(x)\ ,\ u_2'(x) = \frac{Y_1(x)}{W}f(x)$$

と書けて、積分することで u_1, u_2 は

$$u_1(x) = -\int dx\frac{Y_2(x)}{W}f(x)\ ,\ u_2(x) = \int dx\frac{Y_1(x)}{W}f(x)$$

と求まります。注意ですが、Y_1, Y_2 から同次の一般解を作っているので $W \neq 0$ です。このように、同次の一般解の定数を関数とし、その関数を求めることで特解を導出する方法を定数変化法 (method of variation of parameters) と言います。ただし、1 階線形微分方程式でもそうですが、定数変化法の方が未定係数法より面倒になる場合が多いです。特に $Y_1(x), Y_2(x)$ や $f(x)$ が変な関数だと積分を実行できなくなります。
　同じ微分方程式の特解を未定係数法と定数変化法で求めてみます。例としては抵抗と外力があるときの振動の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = F\cos\omega t \tag{10}$$

を使います (質量を 1 にしています)。これは未定係数法でも若干面倒ですが、定数変化法だとさらに面倒になります。まずは未定係数法を使ってみます。右辺が三角関数なので、特解を

$$x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

とします (A, B は定数)。微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{dx_p}{dt} &= -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \\ \frac{d^2x_p}{dt^2} &= -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t \end{aligned}$$

なので、(10) の左辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x_p}{dt^2}&+2k\frac{dx_p}{dt}+\omega_0^2x_p\\
&=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t+2k(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)+\omega_0^2(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\\
&=(A\omega_0^2-A\omega^2+2B\omega k)\cos\omega t+(B\omega_0^2-B\omega^2-2A\omega k)\sin\omega t
\end{aligned}
$$

(10) の右辺は $F\cos\omega t$ なので、比較して

$$
\begin{aligned}
A(\omega_0^2-\omega^2)+2B\omega k=F\\
B(\omega_0^2-\omega^2)-2A\omega k=0
\end{aligned}
$$

となります。単純な連立方程式なので、A, B は

$$
A=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2k^2}F\ ,\ B=\frac{2\omega k}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2k^2}F
$$

よって、特解は

$$
x_p(t)=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)F}{D}\cos\omega t+\frac{2\omega kF}{D}\sin\omega t\quad (D=(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2k^2) \tag{11}
$$

もしくは

$$
\frac{(\omega_0^2-\omega^2)F}{D}\cos\omega t+\frac{2\omega kF}{D}\sin\omega t=\frac{F}{\sqrt{D}}(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{D}}\cos\omega t+\frac{2\omega k}{\sqrt{D}}\sin\omega t)
$$

と変形すれば、角度 θ による

$$
\cos\theta=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{D}}\ ,\ \sin\theta=\frac{2\omega k}{\sqrt{D}}\ ,\ \tan\theta=\frac{2\omega k}{\omega_0^2-\omega^2}\ ,\ \theta=\arctan\frac{2\omega k}{\omega_0^2-\omega^2}
$$

という三角関数を定義できるので

$$
x_p(t)=\frac{F}{\sqrt{D}}(\cos\theta\cos\omega t+\sin\theta\sin\omega t)=\frac{F}{\sqrt{D}}\cos(\omega t-\theta)
$$

とも書けます。最後は加法定理

$$
\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta
$$

を使っています。特解の形を $x_p=A\cos(\omega t-\theta)$ から始めれば、直接この形になります。

定数変化法で行います。この場合は同次での一般解が必要になり、これはすでに求められているとして

$$
x_c(t)=C_1Y_1(t)+C_2Y_2(t)=C_1e^{(\alpha-k)t}+C_2e^{-(\alpha+k)t}\quad (\alpha=\sqrt{k^2-\omega_0^2})
$$

と与えてしまいます。ロンスキアン W は

$$W = Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2 = -(\alpha + k)e^{-2kt} - (\alpha - k)e^{-2kt} = -2\alpha e^{-2kt}$$

なので、u_1 は

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= -\int dx \frac{Y_2(t)}{W} f(t) \\
&= -F \int dx \frac{e^{-(\alpha+k)t}}{-2\alpha e^{-2kt}} \cos\omega t \\
&= \frac{F}{2\alpha} \int dx\ e^{-(\alpha-k)t} \cos\omega t \\
&= \frac{F}{2\alpha} \frac{e^{-(\alpha-k)t}}{(\alpha-k)^2+\omega^2} (-(\alpha-k)\cos\omega t + \omega \sin\omega t)
\end{aligned}$$

積分は公式扱いして、途中計算を省いています (部分積分から求まる)。u_2 も同じで

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= \int dx \frac{e^{(\alpha-k)t}}{-2\alpha e^{-2kt}} \cos\omega t \\
&= \frac{F}{-2\alpha} \int dx e^{(\alpha+k)t} \cos\omega t \\
&= -\frac{F}{2\alpha} \frac{e^{(\alpha+k)t}}{(\alpha+k)^2+\omega^2} ((\alpha+k)\cos\omega t + \omega \sin\omega t)
\end{aligned}$$

そうすると特解は

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= u_1(t)e^{(\alpha-k)t} + u_2(t)e^{-(\alpha+k)t} \\
&= \frac{F}{2\alpha}(\frac{-(\alpha-k)}{(\alpha-k)^2+\omega^2} - \frac{\alpha+k}{(\alpha+k)^2+\omega^2})\cos\omega t + \frac{F\omega}{2\alpha}(\frac{1}{(\alpha-k)^2+\omega^2} - \frac{1}{(\alpha+k)^2+\omega^2})\sin\omega t
\end{aligned}$$

面倒なだけの計算なので省きますが、整理すれば (11) と同じになります。

今の例では未定係数法からすぐに求まったので定数変化法は面倒なだけで使う必要がないように思えます。しかし、特解の形の見当がつかなく、定数変化法の積分が実行できるようなら、定数変化法を使った方がいいです。