1 階線形微分方程式

最初に微分方程式の簡単な話をしてから、基本的な線形 1 階微分方程式の解き方を示します。後半で、いくつかの具体的な微分方程式を使って解き方を見ていきます。
初期値問題については触れていません。
ここでは y' のように「$'$」がついているものは x での微分とします (dy/dx のこと)。

微分方程式に関する大まかな話をしておきます。微分方程式は微分（導関数）を含んでいる方程式です。例えば、x に依存する y に対する

$$\frac{dy(x)}{dx} + y(x) = 0$$

といったものです。「$'$」を使えば、$y' + y = 0$ となります。また、n 回微分を行っているものは $dy^n/dx^n = y^{(n)}$ とも書かれます。微分方程式は含まれている導関数 $y^{(n)}$ の階数によって区別されていて、最も高い階数によって n 階微分方程式となります。例えば、2 階微分方程式は

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$$

といったものです。
例の形を見て分かるように、一般的に微分方程式は形式的に

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0\ ,\ \ \frac{d^ny}{dx^n} = G(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$$

と書けます。F は $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$、$G$ は $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ を変数に持つ関数です。具体的な微分方程式の形に触れない話をするときはこのように書かれることが多いです。
重要な微分方程式の分類として線形 (linear) と非線形 (non-linear) があります。線形は微分方程式において、$y, y', \ldots, y^{(n)}$ が 1 次であり ($y^2, (y'')^5, (y'''')^3$ とかがない)、それらの係数が x にのみ依存している場合です。つまり、微分方程式が

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = Q(x)$$

このような形に書けるなら、n 階線形微分方程式となります。P, Q は適当な関数です。そして、線形でないものが非線形となります。非線形微分方程式には一般的な解法がありません。
解 (solution) は微分方程式を満たすもので、その解に分類があります。微分方程式を解くと通常、任意定数が現れ、それを含むかどうかで分類されます。任意定数が出てくることは積分と対応させると分かりやすいです。例えば、1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

の解 $y(x)$ を求めることは、x で 1 回積分することと同じです。そうすると、積分定数が任意定数となり、任意定数を c とすれば解は $y = c$ となります。2 階微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

では

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}Y=0$$

から 2 回積分することに対応するので、任意定数を c_1, c_2 として $y=c_1x+c_2$ となります。今のように、不定積分によって微分方程式を解く方法を求積法と言います。

このように n 階微分方程式の解には n 個の任意定数が含まれています。その任意定数を含む関数形を一般解 (general solution) と言い、一般解の任意定数に適当な値を入れたもの（任意定数を含まないもの）を特解 (特殊解、particular solution) と言います。一般解は任意定数の値の区別による無数の解の集まりです ($y=c$ での $c=1,5,6$ などは全て別の解)。

また、解を図で書いたときの曲線 (任意定数に適当な値を与えることで描ける曲線) を解曲線 (solution curve) と言いますが、微分方程式を解くことは積分に対応することから、積分曲線 (integral curve) とも呼ばれます。

他に、一般解の任意定数を与えても得られない解が存在することもあり、そのような解は特異解 (singular solution) と呼ばれます。これの例は後で示します。

一般解の任意定数は、条件を与えることで決められます。その条件は初期条件と呼ばれ、与えられた初期条件のもとで微分方程式の解を見つけることを初期値問題 (initial value problem) やコーシー問題と言います（初期条件を満たす特解を求める問題）。初期条件の話は「2 階線形微分方程式」でします。また、任意定数を決めるための条件として境界条件と呼ばれるものもありますが、任意定数を決める条件という意味では初期条件と同じです。違うのは条件の与え方だけです。

n 階線形微分方程式には同次 (斉次、homogeneous) と非同次 (非斉次、nonhomogeneous) による区別があります。同次と非同次の区別は単純です。n 階線形微分方程式が

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+P_n(x)y=Q(x)$$

となっていれば非同次と呼ばれ

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+P_n(x)y=0$$

なら同次と呼ばれます。また、同次のときは常に $y=0$ の解を持っています。

同次のときには重要な性質があります。同次のときは

$$(\frac{d^n}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+P_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+P_n(x))y=0$$

であるために、解として $y=f_1(x),\ f_2(x)$ があったとき、$f_1(x)+f_2(x)$ も解となります。これは

$$\begin{aligned}
&\big(\frac{d^n}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+P_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+P_n(x)\big)f_1(x)=0\\
&\big(\frac{d^n}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+P_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+P_n(x)\big)f_2(x)=0\\
&\big(\frac{d^n}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+P_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+P_n(x)\big)(f_1(x)+f_2(x))=0
\end{aligned}$$

となっているためです。なので、y の解として $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ があったとき、定数 $c_1, c_2, \ldots c_m$ による

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x)$$

も解になります ($n = m$ である必要はない)。これは重ね合わせの原理 (superposition principle) と呼ばれます。微分は定数に作用しないので、定数倍したものも解です。

微分方程式の基本的な解法として変数分離という方法があります。変数分離は

$$\frac{dy}{dx} = A(x)B(y)$$

という微分方程式があったとき (A, B は適当な関数)、これを

$$\frac{1}{B(y)}\frac{dy}{dx} = A(x)$$
$$\frac{dy}{B(y)} = A(x)dx$$

として、左辺と右辺に同じ変数だけがあるように変形することです。この変形は、微分の定義での極限を取る前として、$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ によって

$$\frac{1}{B(y)}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x)$$

と書くと分かりやすいです。このように変形できれば、積分によって

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx$$
$$F(y) + c_1 = G(x) + c_2$$
$$F(y) = G(x) + c$$

として解が求まります。F, G は積分後の関数、c_1, c_2 は積分定数で、$c = c_2 - c_1$ としています。

非同次の 1 階線形微分方程式の解法を示します。1 階線形微分方程式の形は一般的に

$$\frac{dy(x)}{dx} + A(x)y(x) = B(x) \tag{1}$$

と書けます。A, B は与えられている連続な関数で、未知関数は y です。非同次での特解を $p(x)$、同次での一般解を $q(x)$ とします。この時、q が 0 でないなら、非同次微分方程式の一般解は

$$y(x) = p(x) + Cq(x) \tag{2}$$

と与えられます (C は定数)。このことを確かめます。

(2) を x で微分して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} + C\frac{dq}{dx} \tag{3}$$

そして、p は元の微分方程式の特解なので

$$\frac{dp}{dx} + A(x)p = B(x) \tag{4}$$

として (1) を満たします。(2)〜(4) を (1) の左辺

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y$$

に適用してみると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + A(x)y &= \frac{dp}{dx} + C\frac{dq}{dx} + A(x)(p + Cq)\\ &= B(x) - A(x)p + C\frac{dq}{dx} + A(x)(p + Cq)\\ &= B(x) + C(\frac{dq}{dx} + A(x)q)\\ &= B(x)\end{aligned}$$

最後に行くときに、q は同次方程式

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = 0$$

の解であるために

$$\frac{dq}{dx} + A(x)q = 0$$

となることを使っています。このように、解 $y(x) = p(x) + Cq(x)$ は非同次の 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x)$$

を満たすことが確かめられます。よって、非同次方程式の解を求めるには、同次方程式での一般解と非同次方程式の特解が分かればいいことになります (一般解と言える理由は「2 階線形微分方程式」参照)。

次に、非同次での一般解を求める方法に移ります。そのためには同次での一般解と非同次での特解が必要になります。なので、同次での一般解を求める方法も必要なので、一緒に説明します。

まずは同次での一般解から求めます。同次の式として、非同次での (1) の右辺を 0 にして

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = 0$$

これの一般解は、変数分離によって

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y} =& -A(x)dx \\
\log y =& -\int A(x)dx + C' \\
y =& \exp[-F(x) + C'] \quad (\int A(x)dx = F(x)) \\
=& C\exp[-F(x)] \quad (C = e^{C'})
\end{aligned}
$$

と求まります。C' は定数です。これが同次の 1 階線形微分方程式の一般解の形です。

次に非同次での特解を求めます。そのために、一般解での定数 C を $C(x)$ のように x に依存するとし、それが (1) の特解 $p(x)$ になっていると仮定し

$$
p(x) = C(x)\exp[-F(x)] \tag{5}
$$

後は、$C(x)$ がどうなっていれば (1) を満たすかを求めればいいです。$C(x)$ を求めるために、これを (1) に入れます。(1) の左辺は

$$
\frac{dp}{dx} + A(x)p = \frac{dC(x)}{dx}e^{-F(x)} - \frac{dF(x)}{dx}C(x)e^{-F(x)} + A(x)C(x)e^{-F(x)}
$$

ここでの $F(x)$ は

$$
F(x) = \int A(x)dx
$$

なので、

$$
\frac{dF(x)}{dx} = A(x)
$$

ということから

$$
\begin{aligned}
&\frac{dC(x)}{dx}e^{-F(x)} - \frac{dF(x)}{dx}C(x)e^{-F(x)} + A(x)C(x)e^{-F(x)} \\
&= \frac{dC(x)}{dx}e^{-F(x)} - A(x)C(x)e^{-F(x)} + A(x)C(x)e^{-F(x)} \\
&= \frac{dC(x)}{dx}e^{-F(x)}
\end{aligned}
$$

よって、(1) は

$$
\begin{aligned}
\frac{dC(x)}{dx}e^{-F(x)} &= B(x) \\
\frac{dC(x)}{dx} &= B(x)e^{F(x)}
\end{aligned}
$$

積分して

$$dC(x) = B(x)e^{F(x)}dx$$
$$C(x) = \int B(x)e^{F(x)}dx$$

これで $C(x)$ が求まったので、(5) に入れることで、(1) の特解として

$$p(x) = e^{-F(x)}\int B(x)e^{F(x)}dx$$

このようにして特解を求める方法を、定数変化法 (method of variation of parameters) と呼んでいます。具体的な場合は下のベルヌーイの微分方程式を見てください。

他に特解を求める方法として未定係数法 (method of undetermined coefficients) というのがあり、典型的な物理の問題に対しては未定係数法の方が簡単に求められます。これは非同次での方程式の形 ($B(x)$ がどうなっているか) から解の形を予想する方法です。力学の「減衰振動・強制振動」や、下での電気回路とかで使っています。

(1) の一般解を求める方法として、同次の一般解に特解を足す方法を見ましたが、積分だけで求めることもできます。ある関数 $f(x)$ を用意して、(1) にをかけて

$$f(x)\frac{dy(x)}{dx} + f(x)A(x)y(x) = f(x)B(x)$$

左辺で

$$f(x)\frac{dy(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)y(x)) - y(x)\frac{df(x)}{dx}$$

と変形すると、左辺は

$$\frac{d}{dx}(f(x)y(x)) - y(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)A(x)y(x)$$

このとき

$$-y(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)A(x)y(x) = 0$$

となるように $f(x)$ を選びます。そうすると、$f(x)$ は変数分離から

$$y(x)\frac{df(x)}{dx} = f(x)A(x)y(x)$$
$$\frac{df(x)}{f(x)} = A(x)dx$$
$$\log f(x) = \int A(x)dx + C'$$
$$f(x) = C\exp[\int A(x)dx]$$

と与えられます。この $f(x)$ によって (1) は

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x)y(x)) &= f(x)B(x) \\
f(x)y(x) &= \int f(x)B(x)dx + C \\
y(x) &= f^{-1}(x)\int f(x)B(x)dx + Cf^{-1}(x)
\end{aligned}
$$

となるので、$A(x)$ の積分と $f(x)B(x)$ の積分ができるなら、そのまま一般解になります。

微分方程式を実際に解いていきます。元の微分方程式は非線形でも変形することで線形になる例も扱います。

- 変数分離

  変数分離が使える形として

  $$\frac{dy}{dx} = y^2 - a^2$$

  とします (非線形)。a は定数です。これは左辺に y、右辺に x がくるように変形すれば

  $$\frac{dy}{y^2 - a^2} = dx$$

  なので、これを積分して

  $$
  \begin{aligned}
  \int \frac{dy}{y^2 - a^2} &= \int dx \\
  \int \frac{1}{(y-a)(y+a)}dy &= \int dx \\
  \frac{1}{2a}\int (\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y+a})dy &= \int dx \\
  \frac{1}{2a}(\log|y-a| - \log|y+a|) &= x + C \\
  \log|\frac{y-a}{y+a}| &= 2ax + C
  \end{aligned}
  $$

  C は積分定数で、最後に $2aC$ を C としています。これから、y は

  $$
  \begin{aligned}
  |\frac{y-a}{y+a}| &= e^C e^{2ax} \\
  \frac{y-a}{y+a} &= \pm e^C e^{2ax} \\
  \frac{y-a}{y+a} &= C' e^{2ax} \qquad (C = \pm e^C) \\
  y(1 - C'e^{2ax}) &= a + C'e^{2ax}a \\
  y &= a\frac{1 + C'e^{2ax}}{1 - C'e^{2ax}}
  \end{aligned}
  $$

となり、一般解となります。

もとの微分方程式の右辺は

$$\frac{dy}{dx} = (y+a)(y-a)$$

と変形できます。そうすると、$y = +a, -a$ もこの微分方程式の解です (a は定数なので左辺の微分は 0)。$C = 0$ に選べば $y = a$ となりますが、$y = -a$ は C をどう選んでも作れません。なので、$y = -a$ は特異解です。

- 落下運動

物理でよく出てくる例として落下運動の微分方程式を解きます。抵抗があるとしたときの落下に関する微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = g - kx^2$$

こんな格好をしており、これは非線形微分方程式です (物理で言えば、x は速度 v に対応し、落下による抵抗が速度の二乗に比例するというものです)。非線形ですが、変数分離の例として使えるので、これを解きます。

g と k は定数とします。この式を変形させると

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (\sqrt{g}+\sqrt{k}x)(\sqrt{g}-\sqrt{k}x) \\
\frac{dx}{(\sqrt{g}+\sqrt{k}x)(\sqrt{g}-\sqrt{k}x)} &= dt
\end{aligned}$$

このように変数分離した形で書けます。積分を実行するために、左辺を

$$\frac{1}{(\sqrt{g}+\sqrt{k}x)(\sqrt{g}-\sqrt{k}x)} = \frac{1}{2\sqrt{g}}(\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}x} + \frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}x})$$

と変形させます。積分を実行して

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{2\sqrt{g}}\int(\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}x} + \frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}x})dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g}}[\frac{1}{\sqrt{k}}\log(\sqrt{g}+\sqrt{k}x) - \frac{1}{\sqrt{k}}\log(\sqrt{g}-\sqrt{k}x)] + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{k}}\log\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}x}{\sqrt{g}-\sqrt{k}x} + C
\end{aligned}$$

後は初期条件を入れることで積分定数 C が決定されます。

- 電気回路

$$A\frac{dx}{dt} + Bx = V\sin\omega t$$

キルヒホッフの法則を使ったときに現れる方程式で、非同次の 1 階線形微分方程式です (A, B, V は定数)。ここでは、特解を見つけるのに定数変化法でなく、解の形を仮定してしまう方法を用います (未定係数法)。右辺は sin で、sin の微分は cos、cos の微分は sin ということから、x も三角関数になっていると考えて

$$x = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

と仮定します。これを入れて

$$A\omega(a\cos\omega t - b\sin\omega t) + B(a\sin\omega t + b\cos\omega t) = V\sin\omega t$$

$$(A\omega a + Bb)\cos\omega t + (Ba - A\omega b)\sin\omega t = V\sin\omega t$$

この方程式を成立させるためには

$$A\omega a + Bb = 0$$

$$Ba - A\omega b = V$$

となっていればいいので、この連立より

$$a = -\frac{Bb}{A\omega}$$

b は

$$-B\frac{Bb}{A\omega} - A\omega b = V$$

$$b = \frac{V}{(-\frac{B^2}{A\omega} - A\omega)} = \frac{-VA\omega}{B^2 + A\omega^2}$$

というわけで、a は

$$a = \frac{BV}{B^2 + A\omega^2}$$

よって

$$x = \frac{BV}{B^2 + A\omega^2}\sin\omega t + \frac{-VA\omega}{B^2 + A\omega^2}\cos\omega t$$