微分形式

数学にはあまり踏み込まないで微分形式を導入します。特に、本来は多様体によって抽象化されているものをユークリッド空間で扱っています。
定義を並べているだけなので具体的な計算や利用例にはほとんど触れていません。具体的な計算に向いた話は一般相対性理論の「多様体」でまとめています。
基本的に 3 次元で行っていますが、n 次元へはそのまま一般化できます。

数学ではベクトルを定義するために多様体の話から始めますが、無視して 3 次元ユークリッド空間上で行います。なので、数学的な定義としては曖昧な部分があります。

3 次元空間上の点 p でベクトルを作ります。これは点 p の座標 $(x(p), y(p), z(p))$ のことではないです。点 p を通る曲線を用意し、この曲線はパラメータ t によって $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と与えます。$\boldsymbol{x}(t)$ を t で微分すれば曲線の進行方向のベクトル、つまり接ベクトルが求まります。なので、点 p での曲線の接ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big|_p$$

となり、点 p でのベクトル $\boldsymbol{v}$ が作れました (点 p から伸びてるベクトル)。このようにして点 p を通るあらゆる曲線から作られる接ベクトルを集めたものを点 p での接ベクトル空間と呼びます。ここでのベクトルは点 p での接ベクトル空間のベクトルを指しますが、あまり気にしないでいいです。

次に $\boldsymbol{x}(t)$ を変数とする微分可能な関数 f を考えます。f を点 p で t 微分すれば

$$\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}(t))\Big|_p = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\Big|_p = \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z \quad (\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z))$$

となって、点 p の座標 $(x(p), y(p), z(p))$ におけるベクトルとして $\boldsymbol{v}$ が出てきます。これをベクトル $\boldsymbol{v}$ を変数に持つ関数による結果と見ることにします。つまり

$$\omega(\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}(t))|_p$$

となる関数 ω を定義します。そして、f の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

の形から、df, dx, dy, dz を $\boldsymbol{v}$ を変数とする関数と見て

$$df(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial f}{\partial x}dx(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial f}{\partial y}dy(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial f}{\partial z}dz(\boldsymbol{v})$$

とすれば、$df(\boldsymbol{v})$ と $\omega(\boldsymbol{v})$、$dx(\boldsymbol{v})$ と v_x、$dy(\boldsymbol{v})$ と v_y、$dz(\boldsymbol{v})$ と v_z がそれぞれ対応していることが分かります。例えば、2 次元として $f(x, y) = x,\ \boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ とすれば

$$df(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial f}{\partial x}dx(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial f}{\partial y}dy(\boldsymbol{v}) = dx(\boldsymbol{v}) = v_x$$

となります。このようなベクトルから数値を作る関数を 1-形式 (1-form) と言います (点 p での接ベクトル空間上の 1-形式)。今の話から分かるように、この 1-形式は微分可能であることが要求されているので、微分 1-形式 (differential 1-form) とも言います。ここでの関数 f は 0-形式と定義されます。1-形式だけでなく k-形式まで定義されていて (k は $0, 1, 2, \ldots$)、まとめて微分形式 (differential form) と呼ばれます。ちなみに、曲線の代わりに方向微分だけを使っても同じ話をすることができます (両方とも同じ話)。

ここから 1-形式を定義しなおして、k-形式までの定義を見ていきます。ベクトルを変数とする微分可能な関数 ω を作ります。関数 ω はベクトルを実数にし、線形性

$$\omega(\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2)=\alpha_1\omega(\boldsymbol{v}_1)+\alpha_2\omega(\boldsymbol{v}_2)$$

を持つとします。そして、ベクトル空間を作るとして、和とスカラー倍は

$$(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{v})=\omega_1(\boldsymbol{v})+\omega_2(\boldsymbol{v})$$

$$(\alpha\omega)(\boldsymbol{v})=\alpha\omega(\boldsymbol{v})$$

と与えます。α はスカラーです。この関数 ω が 1-形式 (1-form) と定義されます。

ベクトルを基底 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$(点 p での接ベクトル空間の基底) で書くと

$$\omega(\boldsymbol{v})=\omega(v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y+v_z\boldsymbol{e}_z)=v_x\omega(\boldsymbol{e}_x)+v_y\omega(\boldsymbol{e}_y)+v_z\omega(\boldsymbol{e}_z) \tag{1}$$

v_x,v_y,v_z は選んだ基底でのベクトルの成分です。これを見ると、$\omega(\boldsymbol{v})$ からベクトルの成分 $v_i\ (i=x,y,z)$ が取り出されているように見えます。なので、1-形式として

$$\omega_x(\boldsymbol{e}_x)=1\ ,\ \omega_x(\boldsymbol{e}_y)=0\ ,\ \omega_x(\boldsymbol{e}_z)=0 \tag{2}$$

$$\omega_y(\boldsymbol{e}_x)=0\ ,\ \omega_y(\boldsymbol{e}_y)=1\ ,\ \omega_y(\boldsymbol{e}_z)=0 \tag{3}$$

$$\omega_z(\boldsymbol{e}_x)=0\ ,\ \omega_z(\boldsymbol{e}_y)=0\ ,\ \omega_z(\boldsymbol{e}_z)=1 \tag{4}$$

を定義します。これらは

$$\begin{aligned}
&\omega_x(\boldsymbol{v})=v_x\omega_x(\boldsymbol{e}_x)+v_y\omega_x(\boldsymbol{e}_y)+v_z\omega_x(\boldsymbol{e}_z)=v_x\\
&\omega_y(\boldsymbol{v})=v_y\\
&\omega_z(\boldsymbol{v})=v_z
\end{aligned}$$

としてベクトルの成分を取り出します。ω_i は basic 1-form や elementary 1-form と呼ばれます。これらによって (1) を書き換えると

$$\omega(\boldsymbol{v})=\omega(\boldsymbol{e}_x)v_x+\omega(\boldsymbol{e}_y)v_y+\omega(\boldsymbol{e}_z)v_z=\omega(\boldsymbol{e}_x)\omega_x(\boldsymbol{v})+\omega(\boldsymbol{e}_y)\omega_y(\boldsymbol{v})+\omega(\boldsymbol{e}_z)\omega_z(\boldsymbol{v})$$

$\omega(\boldsymbol{e}_i)$ を微分可能な関数 $A_i(x,y,z)$ (x,y,z は点 p の座標。$A_i(x,y,z)=A_i(p)$) とすれば

$$\omega(\boldsymbol{v})=A_x\omega_x(\boldsymbol{v})+A_y\omega_y(\boldsymbol{v})+A_z\omega_z(\boldsymbol{v})$$

となり、1-形式は一般的に

$$\omega=A_x\omega_x+A_y\omega_y+A_z\omega_z$$

という形で書けることが分かります。最初にした話から分かるように $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ は dx,dy,dz に対応します。なので、dx,dy,dz の表記で書かれることが多いですが、ここではこのまま ω を使います。

ベクトル $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y+v_z\boldsymbol{e}_z$ に対する $\omega(\boldsymbol{v})$ の計算は A_i を定数 a_i とすれば

$$
\begin{aligned}
\omega(\boldsymbol{v}) &= (a_x\omega_x + a_y\omega_y + a_z\omega_z)(\boldsymbol{v}) \\
&= a_x\omega_x(\boldsymbol{v}) + a_y\omega_y(\boldsymbol{v}) + a_z\omega_z(\boldsymbol{v}) \\
&= a_xv_x\omega_x(\boldsymbol{e}_x) + a_yv_y\omega_y(\boldsymbol{e}_y) + a_zv_z\omega_z(\boldsymbol{e}_z) \\
&= a_xv_x + a_yv_y + a_zv_z \\
&= \sum_{i=x,y,z} a_iv_i
\end{aligned}
$$

となります。$\omega_i(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ の選んだ基底での成分 v_i になります。この結果は内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$ と同じです。なので、1-形式 $\omega=\Sigma a_i\omega_i$ に対してベクトル $\boldsymbol{v}$ を与えると、ベクトル $\boldsymbol{a}$ との内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$ になります。

1-形式は 1 つのベクトルから実数を作る関数でしたが、次に 2 つの 1-形式を使って、2 つのベクトルから実数を作る関数を定義します。ベクトル $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ から 1-形式 ω によって $\omega(\boldsymbol{v}),\omega(\boldsymbol{w})$ として実数を作ります。さらにもう 1 つ 1-形式 ν を用意し、$\nu(\boldsymbol{v}),\nu(\boldsymbol{w})$ として実数を作ります。ここで、2 つのベクトルから作れる量として平行四辺形の面積があることを持ち出します。2 次元平面において 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ によって作られる平行四辺形の面積 $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は行列式から

$$
S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_xb_y - a_yb_x
$$

と求められます (正確には面積なので絶対値が必要)。これに対応させます。つまり、1-形式 ω,ν を行列式によって

$$
\begin{vmatrix} \omega(\boldsymbol{v}) & \nu(\boldsymbol{v}) \\ \omega(\boldsymbol{w}) & \nu(\boldsymbol{w}) \end{vmatrix} = \omega(\boldsymbol{v})\nu(\boldsymbol{w}) - \omega(\boldsymbol{w})\nu(\boldsymbol{v})
$$

と組み合わせます。これを記号「$\wedge$」を用いて

$$
(\omega\wedge\nu)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} \omega(\boldsymbol{v}) & \nu(\boldsymbol{v}) \\ \omega(\boldsymbol{w}) & \nu(\boldsymbol{w}) \end{vmatrix}
$$

と表記します ($\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ が $\omega_1\wedge\omega_2$ の変数であることをはっきりさせるために $(\omega_1\wedge\omega_2)$ と書いています)。これは外積 (exterior product) やウェッジ積 (wedge product) と呼ばれます。ここではウェッジ積と呼んでいきます。ウェッジ積は

$$
(\nu\wedge\omega)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \nu(\boldsymbol{v})\omega(\boldsymbol{w}) - \nu(\boldsymbol{w})\omega(\boldsymbol{v}) = -(\omega\wedge\nu)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})
$$

のように、反交換 $\omega_1\wedge\omega_2=-\omega_2\wedge\omega_1$ します。これを反対称性と言います。なので、$\omega\wedge\omega=-\omega\wedge\omega=0$ から同じ 1-形式同士では 0 になります。また、$\omega\wedge\nu$ は 2 つのベクトル $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ を実数にする関数です。

例えば、2 次元ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して

$$
\omega(\boldsymbol{a}) = a_x = \omega_x(\boldsymbol{a})\ ,\ \nu(\boldsymbol{a}) = a_y = \omega_y(\boldsymbol{a})
$$

$$
\omega(\boldsymbol{b}) = b_x = \omega_x(\boldsymbol{b})\ ,\ \nu(\boldsymbol{b}) = b_y = \omega_y(\boldsymbol{b})
$$

となっているなら、$(\omega\wedge\nu)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\omega_x\wedge\omega_y)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は符号付きの平行四辺形の面積になります。

1-形式の線形性を使ってみると $\omega\wedge\nu$ は

$$
\begin{aligned}
(\omega\wedge\nu)(\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}) &= \omega(\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2)\nu(\boldsymbol{w})-\omega(\boldsymbol{w})\nu(\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2)\\
&= (\alpha_1\omega(\boldsymbol{v}_1)+\alpha_2\omega(\boldsymbol{v}_2))\nu(\boldsymbol{w})-\omega(\boldsymbol{w})(\alpha_1\nu(\boldsymbol{v}_1)+\alpha_2\nu(\boldsymbol{v}_2))\\
&= \alpha_1(\omega(\boldsymbol{v}_1)\nu(\boldsymbol{w})-\omega(\boldsymbol{w})\nu(\boldsymbol{v}_1))+\alpha_2(\omega(\boldsymbol{v}_2)\nu(\boldsymbol{w})-\omega(\boldsymbol{w})\nu(\boldsymbol{v}_2))\\
&= \alpha_1(\omega\wedge\nu)(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w})+\alpha_2(\omega\wedge\nu)(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})
\end{aligned}
$$

となります。これを双線形性 (bilinear) と言います。また、行列式の定義から

$$
(\alpha'\omega'+\alpha''\omega'')\wedge\nu=\alpha'\omega'\wedge\nu+\alpha''\omega''\wedge\nu
$$

となっていることが分かり、これから分配法則

$$
(\omega'+\omega'')\wedge\nu=\omega'\wedge\nu+\omega''\wedge\nu
$$

を持っていることも分かります。

$\omega\wedge\nu$ の性質を持った関数を定義します。2 つのベクトルを実数にする関数 ϕ が双線形性と反対称性

$$
\begin{aligned}
&\phi(\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})=\alpha_1\phi(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w})+\alpha_2\phi(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})\\
&\phi(\boldsymbol{v},\alpha_1\boldsymbol{w}_1+\alpha_2\boldsymbol{w}_2)=\alpha_1\phi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1)+\alpha_2\phi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_2)\\
&\phi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=-\phi(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

を持っているとき、ϕ を 2-形式と定義します。2 つの 1-形式によるウェッジ積はそのまま 2-形式になります。

2 次元ベクトルとして、1-形式のときと同じように基底を使うと

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= \phi(v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y,w_x\boldsymbol{e}_x+w_y\boldsymbol{e}_y)\\
&= v_x\phi(\boldsymbol{e}_x,w_x\boldsymbol{e}_x+w_y\boldsymbol{e}_y)+v_y\phi(\boldsymbol{e}_y,w_x\boldsymbol{e}_x+w_y\boldsymbol{e}_y)\\
&= v_xw_x\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_x)+v_xw_y\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)+v_yw_x\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x)+v_yw_y\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_y)
\end{aligned}
$$

反対称性 $\phi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i)=-\phi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i)$ から $\phi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i)=0$ なので

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= v_xw_y\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)+v_yw_x\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x)\\
&= v_xw_y\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)-v_yw_x\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)\\
&= (v_xw_y-v_yw_x)\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)
\end{aligned}
$$

3 次元でも同様ににすれば

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= \phi(v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y+v_z\boldsymbol{e}_z,w_x\boldsymbol{e}_x+w_y\boldsymbol{e}_y+w_z\boldsymbol{e}_z)\\
&= v_xw_x\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_x)+v_xw_y\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)+v_xw_z\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z)\\
&\quad +v_yw_x\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x)+v_yw_y\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_y)+v_yw_z\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)\\
&\quad +v_zw_x\phi(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)+v_zw_y\phi(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y)+v_zw_z\phi(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_z)\\
&= (v_xw_y-v_yw_x)\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)+(v_yw_z-v_zw_y)\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)+(v_zw_x-v_xw_z)\phi(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)
\end{aligned}
$$

これらから、1-形式での (2)〜(4) と同じようにベクトルの基底に対して

$$\phi_{xy}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=1\ ,\ \phi_{xy}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)=0\ ,\ \phi_{xy}(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)=0$$
$$\phi_{yz}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=0\ ,\ \phi_{yz}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)=1\ ,\ \phi_{yz}(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)=0$$
$$\phi_{zx}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=0\ ,\ \phi_{xy}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)=0\ ,\ \phi_{zx}(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)=1$$

となる 2-形式 $\phi_{ij}\ (i,j=x,y,z)$ を定義します。この定義によって

$$\phi_{xy}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(v_xw_y-v_yw_x)\phi_{xy}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=v_xw_y-v_yw_x$$
$$\phi_{yz}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=v_yw_z-v_zw_y$$
$$\phi_{zx}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=v_zw_x-v_xw_z$$

となります。反対称性があるので、添え字の x,y,z の並びには注意してください。並びを変えると符号が反転します。

2 次元では $\phi_{xy}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=1$ とすることで、2 次元での 2-形式 ϕ_{xy} は

$$\phi_{xy}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(a_xb_y-a_yb_x)\phi_{xy}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=a_xb_y-a_yb_x$$

これは 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ によって作られる平行四辺形の面積 $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と同じです。なので、平行四辺形の符号付き面積 $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は 2-形式です ($S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-S(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$)。

ϕ_{ij} は $\omega_i\wedge\omega_j$ と一致し、basic 2-form と呼ばれます。実際に

$$(\omega_x\wedge\omega_y)(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=\omega_x(\boldsymbol{e}_x)\omega_y(\boldsymbol{e}_y)-\omega_x(\boldsymbol{e}_y)\omega_y(\boldsymbol{e}_x)=1$$
$$(\omega_y\wedge\omega_z)(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)=\omega_y(\boldsymbol{e}_y)\omega_z(\boldsymbol{e}_z)-\omega_y(\boldsymbol{e}_z)\omega_z(\boldsymbol{e}_y)=1$$
$$(\omega_z\wedge\omega_x)(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)=\omega_z(\boldsymbol{e}_z)\omega_x(\boldsymbol{e}_x)-\omega_z(\boldsymbol{e}_x)\omega_x(\boldsymbol{e}_z)=1$$
$$(\omega_x\wedge\omega_y)(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)=\omega_x(\boldsymbol{e}_y)\omega_y(\boldsymbol{e}_z)-\omega_x(\boldsymbol{e}_z)\omega_y(\boldsymbol{e}_y)=0$$
$$(\omega_y\wedge\omega_z)(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=\omega_y(\boldsymbol{e}_x)\omega_z(\boldsymbol{e}_y)-\omega_y(\boldsymbol{e}_y)\omega_z(\boldsymbol{e}_x)=0$$
$$\vdots$$

のようになっていて、ϕ_{ij} と一致します。これらを使ってみると

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})&=(v_xw_y-v_yw_x)\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)+(v_yw_z-v_zw_y)\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)+(v_zw_x-v_xw_z)\phi(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)\\&=\phi_{xy}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)+\phi_{yz}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)+\phi_{zx}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\phi(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)\\&=\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)(\omega_x\wedge\omega_y)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+\phi(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)(\omega_y\wedge\omega_z)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+\phi(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x)(\omega_z\wedge\omega_x)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\end{aligned}$$

なので、2-形式は一般的に

$$\phi=A_{xy}\omega_x\wedge\omega_y+A_{yz}\omega_y\wedge\omega_z+A_{zx}\omega_z\wedge\omega_x\qquad(A_{ij}=\phi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j))$$

という形で書けます。もしくは、よく使われる表記として、$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ を basic 1-form として

$$\phi = \sum_{1\le i<j\le 3} A_{ij}\omega_i \wedge \omega_j$$

というのもあります（3 次元の場合）。これは 1 から 3 までの間で $i<j$ となる組み合わせを全て足すという意味です。$i<j$ の制限がないと $\omega_1\wedge\omega_2$ と $\omega_2\wedge\omega_1 = -\omega_1\wedge\omega_2$ が出てくるからです。また、2 次元ベクトルのときは上で見たように

$$\phi = A(x,y)\omega_x\wedge\omega_y \quad (A(x,y)=\phi(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y))$$

となっていて、ベクトルの次元によって出てくる項は変化します。

2-形式を単純に拡張します。k 個のベクトルと k 個の 1-形式 ω_i $(i=1,2,\dots,k)$ によるウェッジ積を行列式によって

$$(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_k)(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots\boldsymbol{v}_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\boldsymbol{v}_1) & \omega_2(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{v}_1) \\ \omega_1(\boldsymbol{v}_2) & \omega_2(\boldsymbol{v}_2) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{v}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1(\boldsymbol{v}_k) & \omega_2(\boldsymbol{v}_k) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{v}_k) \end{vmatrix}$$

と定義し、これを k-形式と呼びます。k-形式 $\psi^{(k)}$ は k 個のベクトルを実数にする関数で、多重線形性と反対称性

$$\begin{aligned} &\psi^{(k)}(\alpha'_1\boldsymbol{v}'_1+\alpha''_1\boldsymbol{v}''_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k) = \alpha'_1\psi^{(k)}(\boldsymbol{v}'_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k)+\alpha''_1\psi^{(k)}(\boldsymbol{v}''_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k) \\ &\psi^{(k)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_i,\dots,\boldsymbol{v}_k) = -\psi^{(k)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_{i-1},\dots,\boldsymbol{v}_k) \end{aligned}$$

を持ちます (多重線形性の 2 個の場合が双線形性)。反対称性は元の変数の位置から偶数回動かせばプラスで、奇数回動かせばマイナスになります。

3-形式を見ていきます。2-形式と同じように基底を使って

$$\begin{aligned} \psi^{(3)}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) &= v_x\psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+v_y\psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+v_z\psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \\ &= v_x(u_x\psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{w})+u_y\psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{w})+u_z\psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{w}))+\cdots \end{aligned}$$

反対称性から $\psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{w})$ のように同じ $\boldsymbol{e}_i$ を含む項は消えます。なので、消えない項だけを残すようにして

$$
\begin{aligned}
\psi^{(3)}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) &= v_x u_y \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{w}) + v_x u_z \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{w}) \\
&\quad + v_y u_x \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{w}) + v_y u_z \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{w}) \\
&\quad + v_z u_x \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{w}) + v_z u_y \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{w}) \\
&= v_x u_y w_z \psi^{(3)}\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) + v_x u_z w_y \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y) \\
&\quad + v_y u_x w_z \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z) + v_y u_z w_x \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x) \\
&\quad + v_z u_x w_y \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y) + v_z u_y w_x \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x) \\
&= v_x u_y w_z \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) - v_x u_z w_y \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) \\
&\quad - v_y u_x w_z \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) + v_y u_z w_x \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) \\
&\quad + v_z u_x w_y \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) - v_z u_y w_x \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) \\
&= (v_x u_y w_z + v_y u_z w_x + v_z u_x w_y - v_x u_z w_y - v_y u_x w_z - v_z u_y w_x)\psi_{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)
\end{aligned}
$$

$\omega_x \wedge \omega_y \wedge \omega_z$ の行列式を見てみると

$$
\begin{aligned}
(\omega_x \wedge \omega_y \wedge \omega_z)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) &= \begin{vmatrix} \omega_x(\boldsymbol{v}) & \omega_y(\boldsymbol{v}) & \omega_z(\boldsymbol{v}) \\ \omega_x(\boldsymbol{u}) & \omega_y(\boldsymbol{u}) & \omega_z(\boldsymbol{u}) \\ \omega_x(\boldsymbol{w}) & \omega_y(\boldsymbol{w}) & \omega_z(\boldsymbol{w}) \end{vmatrix} \\
&= \omega_x(\boldsymbol{v})\omega_y(\boldsymbol{u})\omega_z(\boldsymbol{w}) + \omega_x(\boldsymbol{w})\omega_y(\boldsymbol{v})\omega_z(\boldsymbol{u}) + \omega_x(\boldsymbol{u})\omega_y(\boldsymbol{w})\omega_z(\boldsymbol{v}) \\
&\quad - \omega_x(\boldsymbol{v})\omega_y(\boldsymbol{w})\omega_z(\boldsymbol{u}) - \omega_x(\boldsymbol{u})\omega_y(\boldsymbol{v})\omega_z(\boldsymbol{w}) - \omega_x(\boldsymbol{w})\omega_y(\boldsymbol{u})\omega_z(\boldsymbol{v}) \\
&= v_x u_y w_z + v_z u_x w_y + v_y u_z w_x - v_x u_z w_y - v_y u_x w_z - v_z u_y w_x
\end{aligned}
$$

なので、3-形式は

$$
\psi^{(3)} = A(x,y,z)\omega_x \wedge \omega_y \wedge \omega_z \quad\quad (A(x,y,z) = \psi^{(3)}(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z))
$$

と書けます (ちなみに $(\omega_x \wedge \omega_y \wedge \omega_z)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}$ による平行 6 面体の符号付き体積)。

2-形式のときに 3 次元ベクトルでは 2 次元ベクトルより 1 つ多い basic 1-form の項が出てきたように、例えば 4 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ では $\omega_t(\boldsymbol{v}) = v_t$ としてもう 1 つ basic 1-form が加わります。そのため、組み合わせが $\omega_x \wedge \omega_y \wedge \omega_z$ だけでなく $\omega_x \wedge \omega_y \wedge \omega_t$ といったものが出てきます。

2-形式、3-形式は basic 1-form によって書ける構造はそのまま一般化されて、k-形式は n 次元ベクトルに対して

$$
\psi^{(k)} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} A_{i_1 i_2 \ldots i_k}\omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}
$$

となります。ω_{i_l} は basic 1-form です。これは 1 から n の間で $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ となる組み合わせを全て足すということです。

k-形式と l-形式のウェッジ積 $\psi^{(k)} \wedge \psi^{(l)}$ を定義します。そのために、ウェッジ積が結合法則を持つことを見ます。一般的な証明は面倒なので 3-形式を使って示します。3-形式は 1-形式 $\psi_i^{(1)}$ $(i = 1,2,3)$ によって

$$
\begin{aligned}
&\psi^{(3)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)\\
&=\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)+\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)+\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\\
&\quad-\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)-\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)-\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)
\end{aligned}
$$

となっています。各項は

$$
\begin{aligned}
\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)(\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)-\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_2))&=\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi_{23}^{(2)}(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)\\
\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)(\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)-\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_3))&=\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi_{23}^{(2)}(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1)\\
\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)(\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)-\psi_2^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_1))&=\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi_{23}^{(2)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)
\end{aligned}
$$

と変形出来るので、3-形式は 1-形式と 2-形式によって

$$
\psi^{(3)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi_{23}^{(2)}(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)+\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi_{23}^{(2)}(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1)+\psi_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi_{23}^{(2)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) \tag{5}
$$

これから、1-形式と 2-形式のウェッジ積を

$$
\psi^{(1)}\wedge\psi^{(2)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\psi^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi^{(2)}(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)+\psi^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi^{(2)}(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1)+\psi^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi^{(2)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)
$$

と定義します。一方で、同様にすれば

$$
\psi^{(3)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\psi_{12}^{(2)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)+\psi_{12}^{(2)}(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)+\psi_{12}^{(2)}(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1)\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)
$$

とできます。なので、ウェッジ積は

$$
(\psi_1^{(1)}\wedge\psi_2^{(1)})\wedge\psi_3^{(1)}=\psi_1^{(1)}\wedge(\psi_2^{(1)}\wedge\psi_3^{(1)})
$$

となり、結合法則が成立し、k-形式に対してそのまま成立します。そして、k-形式と l-形式のウェッジ積は

$$
\psi^{(k)}\wedge\psi^{(l)}=(\psi_1^{(1)}\wedge\cdots\wedge\psi_k^{(1)})\wedge(\psi_{k+1}^{(1)}\wedge\cdots\wedge\psi_{k+l}^{(1)})=\psi_1^{(1)}\wedge\cdots\wedge\psi_k^{(1)}\wedge\psi_{k+1}^{(1)}\wedge\cdots\wedge\psi_{k+l}^{(1)}
$$

と与えられ、$k+l$-形式 $\psi^{(k+l)}$ となります。
　k-形式に対するウェッジ積の性質をまとめると

- 分配法則：$(\alpha\psi_1^{(k)}+\beta\psi_2^{(k)})\wedge\psi^{(l)}=\alpha\psi_1^{(k)}\wedge\psi^{(l)}+\beta\psi_2^{(k)}\wedge\psi^{(l)}$
- 結合法則：$(\psi^{(k)}\wedge\psi^{(l)})\wedge\psi^{(m)}=\psi^{(k)}\wedge(\psi^{(l)}\wedge\psi^{(m)})$
- 反交換：$\psi^{(k)}\wedge\psi^{(l)}=(-1)^{kl}\psi^{(l)}\wedge\psi^{(k)}$

となっています。反交換の符号は l 個をそれぞれ k 回交換させるからです。
　今求めた 1-形式と 2-形式のウェッジ積を一般化することで、k-形式と l-形式のウェッジ積は

$$
\psi^{(k)}\wedge\psi^{(l)}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+l})=\sum_{\mathrm{perm}}\epsilon\psi^{(k)}(\boldsymbol{v}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{v}_{i_k})\psi^{(l)}(\boldsymbol{v}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{v}_{j_l})
$$

と定義されます。ϵ は変数の位置によって決まる符号 ± 1 です。これは、$i_1 < \cdots < i_k$ となる $\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$ の可能な並びと、$j_1 < \cdots < j_l$ となる $\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_l}$ の可能な並びによる項を作り、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l}$ の並びから奇数回交換されていたら $\epsilon = -1$、偶数回交換されていたら $\epsilon = +1$ にして足すということです ($1, 2, \ldots k+l$ の可能な並びを k 個と l 個に分けてそれぞれ小さい順に並べたものだけを取り出し、奇数回の交換ならマイナス、偶数回ならプラスの符号にして足す)。

1-形式と 2-形式の例を使って具体的に見ておきます。まず、$k = 1, l = 2$ での可能なベクトルの並びをかき出して

$$\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3\ ,\ \boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_2\ ,\ \boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_3\ ,\ \boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1\ ,\ \boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\ ,\ \boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1$$

「|」は 1-形式と 2-形式の変数の区別をつけるために使っています。このとき、「|」で分けられたそれぞれの添え字の並びが小さい順であるものだけを取り出します (今は片方が 1-形式なので 2-形式の部分の添え字の並びだけ見ればいい)。この場合は $\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ の 3 つが残ります。そして、$\boldsymbol{v}$ の添え字の並びが $1, 2, 3$ から奇数回交換されていればマイナス、偶数回ではプラスにします。なので、$\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_3$ だけがマイナスです。そうすると

$$\psi^{(1)} \wedge \psi^{(2)}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \psi^{(1)}(\boldsymbol{v}_1)\psi^{(2)}(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) - \psi^{(1)}(\boldsymbol{v}_2)\psi^{(2)}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3) + \psi^{(1)}(\boldsymbol{v}_3)\psi^{(2)}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$$

となり、(5) と一致します (第二項は反対称性から符号は反転)。

1-形式の積分を定義します。積分はリーマン和から

$$\int_a^b dx\ f(x) = \lim \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$$

として定義されています。lim は Δx_i をゼロにする極限です。1 次元なので分かりづらいですが、Δx_i は点 x_i から出ている x 軸方向のベクトルです。なので、1-形式 ω によって $\omega(\Delta x_i)$ が作れます (区別するように表記しませんが ω は点 x_i での 1-形式)。これの和を 1-形式の積分として

$$\int \omega = \lim \sum_{i=0}^{N-1} \omega(\Delta x_i)$$

と定義します。ω は basic 1-form によって $f(x)\omega_x$ と書けるので

$$\lim \sum_{i=0}^{N-1} \omega(\Delta x_i) = \lim \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\omega_x(\Delta x_i)$$

$\omega_x(\Delta x_i)$ はベクトル Δx_i の成分を取り出しますがそれは Δx_i そのものなので、1-形式の積分は通常の積分と同じになります。

より一般的には曲線上の線積分として定義します。パラメータを t とする曲線 γ を $\boldsymbol{x}(t)$ とします。パラメータ t を微小に分割したとき、$\boldsymbol{x}(t_i)$ と $\boldsymbol{x}(t_{i+1})$ の差は t_i での接ベクトルです。このことから、1-形式の曲線 γ 上の積分を、t_i での接ベクトル $\boldsymbol{x}'_i = \boldsymbol{x}'(t)|_{t_i} = d\boldsymbol{x}/dt|_{t_i}$ を使って

$$\int_\gamma \omega = \lim \sum_{i=0}^{N-1} \omega(\boldsymbol{x}'_i) = \int_I dt\ \omega(\boldsymbol{x}'(t))$$

と定義します。lim はパラメータの間隔を 0 に持っていく極限、I はパラメータ t の範囲です。

計算の仕方は線積分と同じです。例えば、曲線 γ を $\boldsymbol{x} = (t, t^2, t^3)$、1-形式を $\omega = 2x\omega_x + z\omega_y + \omega_z$ とすれば

$$\int_\gamma \omega = \int_I dt(2t\omega_x(\boldsymbol{x}') + t^3\omega_y(\boldsymbol{x}') + \omega_z(\boldsymbol{x}')) = \int_I dt(2t + 2t^4 + 3t^2)$$

となります。

2-形式の積分も同様に定義されます。2 次元の面 S を考えて、格子状に区切ります。ある点 (x_i, y_i) とその隣の $(x_{i+1}, y_i), (x_i, y_{i+1})$ を見ます。これらから

$$\boldsymbol{v}_1 = (x_{i+1}, y_i) - (x_i, y_i)\ ,\ \boldsymbol{v}_2 = (x_i, y_{i+1}) - (x_i, y_i)$$

としてベクトルを作れて、点 (x_i, y_i) での接ベクトルとなります。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が作る長方形の面積は $\omega_x \wedge \omega_y(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ で与えられます。一方で、関数 f の 2 重積分は

$$\lim \sum_{i,j} f(x_i, y_j)\Delta A_{ij} = \int_S f(x, y)dxdy$$

となっています。ΔA_{ij} は分割した長方形 ($(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ による長方形) の面積で、lim はそれが 0 になる極限です。これに対応させます。つまり、面積の部分を $\omega_x \wedge \omega_y$ にして、2-形式 $\phi = f(x, y)\omega_x \wedge \omega_y$ の和

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_i)\Delta A_{ij} = \sum_{i,j} \phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$$

にすることで、2-形式の積分を

$$\int_S \phi = \int_S f(x, y)dxdy$$

と定義します。ここで注意すべきなのは、2-形式は $\omega_x \wedge \omega_y = -\omega_y \wedge \omega_x$ なので、この定義において $dxdy$ の並びを変えると符号が反転することです。これはフビニの定理からの

$$\int f(x, y)dxdy = \int f(x, y)dydx$$

とは異なっています。ω_x, ω_y の並びで符号が変わることは面 S が方向を持っているとも言えて、その方向の基準をどうするかで符号が変わります。通常は $dxdy$ の並びを選びます。例えば、面 S の面積を A とすれば

$$\int_S \omega_y \wedge \omega_x = -\int_S \omega_x \wedge \omega_y = -\int_S dxdy = -A$$

として計算を行います。

面を 2 次元空間上で与えましたが、3 次元空間内の面に対しても定義できます。面を与えるにはパラメータが 2 つ必要なので、それを u, w とします。u, w による 2 次元平面を考えて、格子状に区切り、点を (u_i, w_i) とします。これから上と同じようにして、点 (u_i, w_i) の接ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が作れます。次に、パラメータから面を与える関数を $\boldsymbol{k}$ とします ($\boldsymbol{k}$ は 3 次元ベクトル)。なので、その面の 3 次元空間上の点は $\boldsymbol{k}(u_i, v_i)$ となります。3 次元空間上の面の点から

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{k}(u_{i+1}, w_i) - \boldsymbol{k}(u_i, w_i)\ ,\ \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{k}(u_i, w_{i+1}) - \boldsymbol{k}(u_i, w_{i+1})$$

として 3 次元ベクトル $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ が作れます。$\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ は 3 次元空間上の面の接ベクトルとなります。この面の面積は 2-形式によって与えられるので

$$\int_S \phi = \lim \sum_{i,j} \phi(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$$

として、積分の定義を与えられます。これをパラメータの積分の形に持っていきます。そのために

$$\sum_{i,j} f(u_i, w_i)\omega_u \wedge \omega_w(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$$

という形に書ける $f(u_i, w_i)$ を求めます。ω_u, ω_w は u, w による 2 次元空間での点における basic 1-form です。この形に等しいとしたいので

$$f(u_i, w_i)\omega_u \wedge \omega_w(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \phi(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$$

$$f(u_i, w_i) = \frac{\phi(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)}{\omega_u \wedge \omega_w(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}$$

$dudw$ の並びで正の面積になるよう取ります。分母は今の設定では長方形の面積なので

$$f(u_i, w_i) = \frac{\phi(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}$$

双線形性から

$$\begin{aligned}\frac{\phi(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|} = \phi(\frac{\boldsymbol{V}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}, \frac{\boldsymbol{V}_2}{|\boldsymbol{v}_2|}) &= \phi(\frac{\boldsymbol{k}(u_{i+1}, w_i) - \boldsymbol{k}(u_i, w_i)}{|(u_{i+1}, w_i) - (u_i, w_i)|}, \frac{\boldsymbol{k}(u_i, w_{i+1}) - \boldsymbol{k}(u_i, w_i)}{|(u_i, w_{i+1}) - (u_i, w_i)|}) \\ &= \phi(\frac{\boldsymbol{k}(u_{i+1}, w_i) - \boldsymbol{k}(u_i, w_i)}{|u_{i+1} - u_i|}, \frac{\boldsymbol{k}(u_i, w_{i+1}) - \boldsymbol{k}(u_i, w_i)}{|w_{i+1} - w_i|})\end{aligned}$$

これは偏微分の定義そのものなので、格子間隔が 0 の極限で

$$f(u_i, w_i) = \phi(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial w})$$

よって

$$\sum_{i,j} \phi(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) = \sum_{i,j} f(u_i, w_i)\omega_u \wedge \omega_w(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \ \Rightarrow \ \sum_{i,j} \phi(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial w})\omega_u \wedge \omega_w(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$$

と出来るので

$$\int_S \phi = \int_S \phi(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial w})dudw$$

となります。もっと単純には 3 次元空間上の面は $\boldsymbol{k}(u, w)$ で与えられ、その接ベクトルは $\partial \boldsymbol{k}/\partial u, \partial \boldsymbol{k}/\partial w$ で与えられるということです。

典型的な計算手順を示しておきます。手順は変わらないので、2-形式を

$$\phi = f(x, y, z)\omega_x \wedge \omega_y$$

とします。パラメータを u, w とし、面 S は $\boldsymbol{k}(u, w) = (k_x(u, w), k_y(u, w), k_z(u, w))$ と与えられているとします。接ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial u} \ , \ \boldsymbol{v}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial w}$$

これらを 2-形式に入れて

$$\phi = f(k_x, k_y, k_z)\omega_x \wedge \omega_y(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = f(k_x, k_y, k_z)\begin{vmatrix} \omega_x(\boldsymbol{v}_1) & \omega_y(\boldsymbol{v}_1) \\ \omega_x(\boldsymbol{v}_2) & \omega_y(\boldsymbol{v}_2) \end{vmatrix}$$

両辺に積分記号を入れて

$$\int_S \phi = \int_S f(k_x, k_y, k_z)\begin{vmatrix} \omega_x(\boldsymbol{v}_1) & \omega_y(\boldsymbol{v}_1) \\ \omega_x(\boldsymbol{v}_2) & \omega_y(\boldsymbol{v}_2) \end{vmatrix} dudw$$

後は右辺の u, w 積分を実行すればいいです (面 S の符号の定義に注意)。
　微分形式の積分は n 次元での n-形式に一般化できて

$$\int \psi^{(n)} = \int \psi^{(n)}(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial u_n})du_1du_2\cdots du_n$$

と定義されます。$u_1, u_2, \ldots, u_n$ の並びで正になるように符号を定義しています。
　最後に 1-形式の微分を与えます。1-形式は点 p での接ベクトルの集まり (接ベクトル空間) で与えられています。このことから、点 p の変化と関連付けて 1-形式 ω の微分を与えようとします。1-形式はベクトルを変数とするので、そのベクトルが 1 つ出てき、そして点 p からの変化を知るには変化方向の接ベクトルが必要になります。このため、1-形式の微分のために 2 つのベクトルが出てきます。なので、1-形式の微分は 2-形式になるとします。
　まず、関数 f の $\boldsymbol{v}$ 方向の微分は

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z$$

最初に見た話から、これは 1-形式

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\omega_x + \frac{\partial f}{\partial y}\omega_y + \frac{\partial f}{\partial z}\omega_z$$

になります。なので、0-形式から 1-形式が作れています。
　これと同じように、$\boldsymbol{u}$ を変数にする 1-形式 ω の $\boldsymbol{v}$ 方向の微分は

$$\nabla\omega(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial\omega(\boldsymbol{u})}{\partial x}v_x + \frac{\partial\omega(\boldsymbol{u})}{\partial y}v_y + \frac{\partial\omega(\boldsymbol{u})}{\partial z}v_z$$

しかし、これを 2-形式とは出来ないです。理由は簡単で、$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ を入れ替えたときに $\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ とはならないからです。なので、反対称になるように

$$\nabla\omega(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} - \nabla\omega(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}$$

とします。これが 2-形式になればいいので

$$\phi = A_1(x, y, z)\omega_x \wedge \omega_y + A_2(x, y, z)\omega_y \wedge \omega_z + A_3(x, y, z)\omega_z \wedge \omega_x$$

に対応するようにします。1-形式は

$$\omega = f_x(x, y, z)\omega_x + f_y(x, y, z)\omega_y + f_z(x, y, z)\omega_z$$

とします。

ベクトルの基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を入れると

$$\omega(\boldsymbol{e}_x) = f_x(x,y,z)\ ,\ \omega(\boldsymbol{e}_y) = f_y(x,y,z)\ ,\ \omega(\boldsymbol{e}_z) = f_z(x,y,z)$$
$$\phi(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) = A_1(x,y,z)\ ,\ \phi(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z) = A_2(x,y,z)\ ,\ \phi(\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_x) = A_3(x,y,z)$$

なので

$$\phi(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) = A_1(x,y,z) = \nabla\omega(\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_x - \nabla\omega(\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_y = \nabla f_y\cdot\boldsymbol{e}_x - \nabla f_x\cdot\boldsymbol{e}_y = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}$$
$$\phi(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z) = A_2(x,y,z) = \nabla\omega(\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_y - \nabla\omega(\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_z = \nabla f_z\cdot\boldsymbol{e}_y - \nabla f_y\cdot\boldsymbol{e}_z = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}$$
$$\phi(\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_x) = A_3(x,y,z) = \nabla\omega(\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_z - \nabla\omega(\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_x = \nabla f_x\cdot\boldsymbol{e}_z - \nabla f_z\cdot\boldsymbol{e}_x = \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}$$

とすれば、1-形式から 2-形式となります。これを「d」で表し、1-形式 ω から作られる 2-形式を

$$d\omega = A_1(x,y,z)\omega_x\wedge\omega_y + A_2(x,y,z)\omega_y\wedge\omega_z + A_3(x,y,z)\omega_z\wedge\omega_x$$

もしくは df を用いて式変形して

$$d\omega = df_x\wedge\omega_x + df_y\wedge\omega_y + df_z\wedge\omega_z$$

という形で定義します。この演算は外微分 (exterior derivative) と呼ばれます。このように外微分は k-形式を $k+1$-形式にします。なので、外微分「d」は k-形式を $k+1$-形式にする演算として定義されます。

証明は省いて性質をまとめておくと、f を 0-形式、ψ を k-形式として

- $d(\psi_1+\psi_2) = d\psi_1 + d\psi_2$
- $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\omega_z$
- $d(\psi_1\wedge\psi_2) = d\psi_1\wedge\psi_2 + (-1)^k\psi_1\wedge d\psi_2 \quad (\psi_1 = \psi^{(k)},\ \psi_2 = \psi^{(l)})$
- $dd = 0$

となります。一般的には、これらの性質を持った演算「d」として外微分は定義されます。