

## 複素積分の例

複素積分では円や半円だけを使った例がよく出てきますが、ここではそうでない積分経路の例をいくつか示します。

ここでは、 $z$  は複素数です。

分岐点については下の補足で説明しています。

- フレネル積分

光学なんかで出てくるフレネル (Fresnel) 積分を求めます。 $e^{-z^2}$  の積分として

$$\int_{\Gamma} dz e^{-z^2} = \int_{C_1} dz e^{-z^2} + \int_{C_2} dz e^{-z^2} + \int_{C_3} dz e^{-z^2} = I_1 + I_2 + I_3$$

を考えます。 $\Gamma$  は  $0 \rightarrow R$  と行き ( $C_1$ )、 $R$  から  $Re^{i\pi/4}$  への円弧を進み ( $C_2$ )、 $Re^{i\pi/4}$  から  $0$  へ直進します ( $C_3$ ) (角度  $\pi/4$  の扇型の経路。図 1)。 $R$  は無限大に取ります。 $e^{-z^2}$  は極を持たないので、留数定理を使えば左辺は

$$\int_{\Gamma} dz e^{-z^2} = 0$$

となります。

次に右辺を求めます。第一項は実軸上の積分なので

$$I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} dz e^{-z^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx e^{-x^2} = \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

この積分結果は

$$J = \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \Rightarrow J^2 = \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \int_0^{\infty} dy e^{-y^2}$$

として、 $x, y$  を二次元の極座標  $(r, \theta)$  に書き換えれば導出できます。

$I_2$  は「複素積分」でのジョルダンの補題のときと同じ話を使います。 $z = \rho e^{i\phi}$  とすれば、 $\rho = R$  (半径が  $R$  に固定されて  $\phi$  が動く) なので

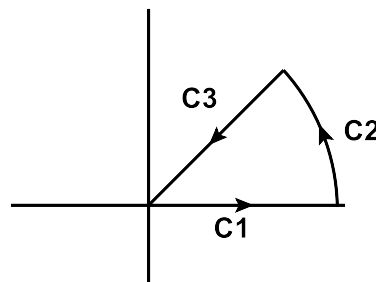


図 1

$$I_2 = \int_{C_2} dz e^{-z^2} = \int_0^{\pi/4} d\phi iRe^{i\phi} \exp[-R^2 e^{i2\phi}] \quad (dz = iRe^{i\phi} d\phi)$$

この絶対値は積分の関係から

$$\left| \int_0^{\pi/4} d\phi iRe^{i\phi} \exp[-R^2 e^{i2\phi}] \right| \leq \int_0^{\pi/4} d\phi |iRe^{i\phi} \exp[-R^2 e^{i2\phi}]|$$

右辺は

$$\begin{aligned} (iRe^{i\phi} \exp[-R^2 e^{i2\phi}]) (iRe^{i\phi} \exp[-R^2 e^{i2\phi}])^* &= R^2 \exp[-R^2 e^{i2\phi}] \exp[-R^2 e^{-i2\phi}] \\ &= R^2 \exp[-2R^2 \sin 2\phi] \quad (e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta) \end{aligned}$$

から

$$\int_0^{\pi/4} d\phi |iRe^{i\phi} \exp[-R^2 e^{i2\phi}]| = \int_0^{\pi/4} d\phi R \exp[-R^2 \sin 2\phi]$$

$0 \leq \theta \leq \pi/2$  で  $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$  なので

$$R \int_0^{\pi/4} d\phi \exp[-R^2 \sin 2\phi] \leq R \int_0^{\pi/4} d\phi \exp[-\frac{4}{\pi} R^2 \phi] = -\frac{\pi}{4R} (e^{-R^2} - 1)$$

これは  $R \rightarrow \infty$  で 0 になります。よって、 $I_2$  は 0 です。

$I_3$  は  $z = \rho e^{i\phi}$  とすれば、 $\phi = \pi/4$  なので

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} dz e^{-z^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 d\rho e^{i\pi/4} \exp[-\rho^2 e^{i\pi/2}] \quad (z = \rho e^{i\pi/4}) \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^\infty d\rho \exp[-i\rho^2] \quad (e^{i\pi/2} = i \sin \frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \int_0^\infty d\rho e^{-i\rho^2} \end{aligned}$$

そうすると

$$\int_{\Gamma} dz e^{-z^2} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \int_0^{\infty} d\rho e^{-i\rho^2}$$

$$\int_0^{\infty} d\rho e^{-i\rho^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+i}$$

$$\int_0^{\infty} d\rho (\cos \rho^2 - i \sin \rho^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1-i)$$

この結果の実部と虚部を取り出せば

$$\int_0^{\infty} d\rho \cos \rho^2 = \int_0^{\infty} d\rho \sin \rho^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

となり、無限大の範囲でのフレネル積分となります。

- 分岐切断がある積分

多価関数の積分には注意が必要です。まずは、簡単な例として

$$\int_{\Gamma} dz z^{1/2}$$

を見ておきます。Γは原点を中心にする半径Rの円です。z<sup>1/2</sup>は2価関数なので(下の補足参照)、偏角に制限が必要になります。この場合は、単純にzの偏角φを0から2πに制限すればいいです。また、z<sup>1/2</sup>は原点を含む領域で正則でないので、この積分は0になりません。

偏角の制限を与えてしまえば、積分は簡単に実行できて

$$\int_{\Gamma} dz z^{1/2} = \int_0^{2\pi} d\phi i R e^{i\phi} (R e^{i\phi})^{1/2} = i R^{3/2} \int_0^{2\pi} d\phi i e^{3i\phi/2} = i R^{3/2} \frac{2}{3i} (e^{3i\pi} - 1) = -\frac{4}{3} R^{3/2}$$

となります。

分岐切断を避ける例として

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{-1/2}}{x+1}$$

という実数の積分を複素積分から求めます。そのために

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} dz \frac{(-z)^{-1/2}}{z+1} &= \left( \int_{C_R} dz + \int_{C_-} dz + \int_{C_0} dz + \int_{C_+} dz \right) \frac{(-z)^{-1/2}}{z+1} \\ &= I_R + I_- + I_0 + I_+ \end{aligned}$$

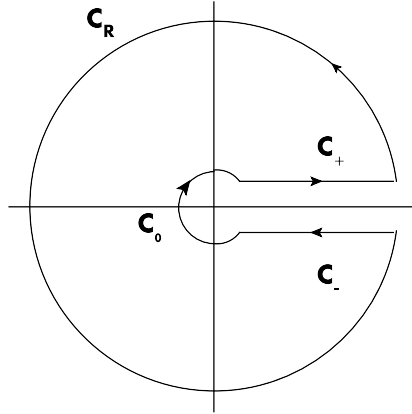


図 2

とします (図 2)。 $-z$  にしているのは後の計算で余計な  $i$  が出ないようにするためです。 $C_R$  は原点を中心とする半径  $R$  の円、 $C_0$  は半径  $\epsilon$  の円です。 $C_{\pm}$  は実軸から  $\pm i\delta$  離れているとします。これらの  $R \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\pm\delta \rightarrow 0$  を取るようにします。 $(-z)^{-1/2}$  の分岐点は原点と無限遠にあり、 $z = 0$  と  $\text{Re}z = \infty$  を繋ぐ直線を分岐切断としています。経路  $\Gamma$  は分岐切断を横切っていないので、 $z^{-1/2}$  の多価性はなくなっています。

左辺は留数定理から計算できます。 $z = -1$  に極があり、 $\Gamma$  の内部に  $z = -1$  があるので留数定理から

$$\int_{\Gamma} dz \frac{z^{-1/2}}{z+1} = 2\pi i (-1)^{-1/2} = 2\pi i (e^{i\pi})^{-1/2} = 2\pi i e^{-i\pi/2}$$

となります。今の経路のとり方から、 $(-1)^{1/2}$  の偏角 (正の実数の平方根の偏角) は  $+\pi$  と定義します。

次に、右辺を計算していきます。 $I_R$  は半径  $R$  の円なので

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{C_R} dz \frac{z^{-1/2}}{z+1} = \int_0^{2\pi} d\phi i R e^{i\phi} \frac{(R e^{i\phi})^{-1/2}}{R e^{i\phi} + 1} \quad (z = R e^{i\phi}) \\ &= i \int_0^{2\pi} d\phi R^{1/2} e^{i\phi/2} \frac{1}{R e^{i\phi} + 1} \end{aligned}$$

これは、 $R^{-1/2}$  程度になるので、 $R \rightarrow \infty$  で 0 になります。一応確認しておきます。絶対値は

$$(R^{1/2} e^{i\phi/2} \frac{1}{R e^{i\phi} + 1})(R^{1/2} e^{i\phi/2} \frac{1}{R e^{i\phi} + 1})^* = \frac{R}{(R e^{i\phi} + 1)(R e^{-i\phi} + 1)} = \frac{R}{R^2 + 1 + 2R \cos \phi}$$

となっているので

$$\left| \int_0^{2\pi} d\phi R^{1/2} e^{i\phi/2} \frac{1}{R e^{i\phi} + 1} \right| \leq \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R^2 + 1 + 2R \cos \phi}}$$

$\cos \phi$  は  $\pm 1$  までしか取れないことから、 $\cos \phi = -1$  とすれば  $\cos \phi$  のまま積分するより大きくなるので

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R^2 + 1 + 2R \cos \phi}} \leq \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R^2 + 1 - 2R}} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sqrt{R}}{R-1}$$

よって、 $R \rightarrow \infty$  で 0 になります。

$I_0$  は、 $z = \epsilon e^{i\phi}$  とすれば

$$I_0 = \int_{C_0} dz \frac{z^{-1/2}}{z+1} = \int_{2\pi}^0 d\phi i\epsilon e^{i\phi} \frac{(\epsilon e^{i\phi})^{-1/2}}{\epsilon e^{i\phi} + 1}$$

これは  $\epsilon \rightarrow 0$  で明らかに 0 です。

$C_{\pm}$  は複素平面の上半面と下半面で区別されているので

$$z_+ = x, \quad z_- = x e^{2i\pi}$$

とします。 $C_+$  での偏角は 0 なので  $z_+ = x$ 、 $C_-$  での偏角は  $2\pi$  です。これらによって、 $C_{\pm}$  上での  $z^{-1/2}$  は

$$C_+ : z^{-1/2} = x^{-1/2}$$

$$C_- : z^{-1/2} = x^{-1/2} e^{-i\pi}$$

そうすると

$$I_- = \int_{C_-} dz \frac{z^{-1/2}}{z+1} = \int_R^r dx \frac{x^{-1/2} e^{-i\pi}}{x+1} = - \int_r^R dx \frac{x^{-1/2}}{x+1} e^{-i\pi}$$

$$I_+ = \int_{C_+} dz \frac{z^{-1/2}}{z+1} = \int_r^R dx \frac{x^{-1/2}}{x+1}$$

これらから

$$\begin{aligned} I_- + I_+ &= - \int_r^R dx \frac{x^{-1/2}}{x+1} e^{-i\pi} + \int_r^R dx \frac{x^{-1/2}}{x+1} = (1 - e^{-i\pi}) \int_r^R dx \frac{x^{-1/2}}{x+1} \\ &= e^{-i\pi/2} (e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) \int_r^R dx \frac{x^{-1/2}}{x+1} \end{aligned}$$

よって、 $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$  において

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} dz \frac{(-z)^{-1/2}}{z+1} &= I_R + I_- + I_0 + I_+ \\
2\pi i e^{-i\pi/2} &= e^{-i\pi/2} (e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) \int_0^{\infty} dx \frac{x^{-1/2}}{x+1} \\
\int_0^{\infty} dx \frac{x^{-1/2}}{x+1} &= \frac{2\pi i}{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} \quad (\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

となります。

この結果は簡単に

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{x+1} \quad (0 < a < 1)$$

に一般化できます。この形でも  $I_R, I_\rho$  は消え、他の項も単純な置き換えから ( $-1/2$  を  $a-1$  にする)

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} dz \frac{(-z)^{a-1}}{z+1} &= 2\pi i (-1)^{a-1} = 2\pi i e^{i\pi(a-1)} \\
I_- + I_+ &= e^{i\pi(a-1)} (e^{-i\pi(a-1)} - e^{i\pi(a-1)}) \int_r^R dx \frac{x^{a-1}}{x+1}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} dz \frac{(-z)^{a-1}}{z+1} &= I_R + I_- + I_0 + I_+ \\
2\pi i e^{i\pi(a-1)} &= e^{i\pi(a-1)} (e^{-i\pi(a-1)} - e^{i\pi(a-1)}) \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{x+1} \\
\int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{x+1} &= \frac{-2\pi i}{e^{i\pi(a-1)} - e^{-i\pi(a-1)}} \\
&= \frac{-\pi}{\sin((a-1)\pi)} \\
&= \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \quad (\sin(\theta - \pi) = -\sin \theta)
\end{aligned}$$

となります。

分岐切断を囲む積分経路の場合も見ておきます。そのために

$$\int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2}$$

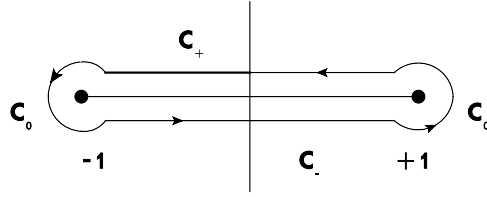


図 3

を求めます。これは三角関数を使えばすぐに  $\pi/2$  になることが分かりますが、これを複素積分で実行します。 $\sqrt{z^2 - 1}$  の複素積分を考えます。これは  $z = \pm 1$  に分岐点がありますが (原点を  $\pm 1$  にずらしたと思えばいいだけ)、 $z^2 - 1$  の  $1$  があるために  $z = \infty$  は分岐点になりません。というわけで、 $z = \pm 1$  を繋いだ直線を分岐切断とします。

まず、 $z = \pm 1$  の外側を囲む半径  $R$  の円による積分経路  $\Gamma_1$  を計算します ( $R \rightarrow \infty$ )。次に、 $\Gamma_1$  を変形し、必要な積分範囲  $-1 \sim +1$  になるようにします。つまり、 $\Gamma_1$  を分岐切断に近づけた経路  $\Gamma_2$  で計算します。複素積分の性質から、特異性を変更しないように経路を変更するなら結果は同じになります。これを利用して  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  の結果から積分を求めます。

まず、 $z = \pm 1$  の外側を囲む半径  $R$  の円による  $\Gamma_1$  (反時計回り) は

$$\int_{\Gamma} dz \sqrt{z^2 - 1} = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi i R e^{i\phi} \sqrt{(R e^{i\phi})^2 - 1}$$

$R$  を無限大に持っていくことを考慮して、 $z \gg 1$  として展開すると

$$\sqrt{z^2 - 1} = z \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} = z \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \dots \right)$$

「 $\dots$ 」は  $z^{-3}$  以上の項になります。よって、 $R \rightarrow \infty$  において

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} dz \sqrt{z^2 - 1} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi i R e^{i\phi} \left( R e^{i\phi} - \frac{1}{2} \frac{1}{R e^{i\phi}} + \dots \right) \quad (z = R e^{i\phi}) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi i \left( R^2 e^{2i\phi} - \frac{1}{2} + \dots \right) \\ &= i \left( -\frac{1}{2} \right) 2\pi \\ &= -i\pi \end{aligned}$$

次に  $\Gamma_1$  を分岐切断に近づけた経路  $\Gamma_2$  (図 3) での

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} dz \sqrt{z^2 - 1} &= \left( \int_{C_-} dz + \int_{C_0} dz + \int_{C_+} dz + \int_{C_0} dz \right) \sqrt{z^2 - 1} \\ &= I_- + I_0 + I_+ + I_0 \end{aligned}$$

を計算します。 $I_{\pm}$  は実軸から  $\pm i\delta$  離れているとし、 $\delta \rightarrow 0$  にします。 $I_0$  での  $z$  は、円の半径を  $\epsilon$  として

$$z = \pm 1 + \epsilon e^{i\phi}$$

なので

$$\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(\pm 1 + \epsilon e^{i\phi})^2 - 1}$$

から

$$\int_{C_0} \sqrt{z^2 - 1} = \int_0^{2\pi} d\phi \epsilon i e^{i\phi} \sqrt{(\pm 1 + \epsilon e^{i\phi})^2 - 1}$$

となりますが、これは  $\epsilon = 0$  で  $I_0$  は明らかに 0 になります。

$C_+$  は上半面、 $C_-$  は下半面において実軸に近づけるので、 $(-1)^{1/2}$  は偏角に対して

$$\frac{\pi}{2} : (-1)^{1/2} = +i$$

$$\frac{3\pi}{2} : (-1)^{1/2} = -i$$

と定義して、それぞれを  $\delta = 0$  において

$$C_+ : \sqrt{z^2 - 1} = i\sqrt{1 - x^2}$$

$$C_- : \sqrt{z^2 - 1} = -i\sqrt{1 - x^2}$$

これらから

$$\begin{aligned} I_- + I_+ &= \int_{C_-} dz \sqrt{z^2 - 1} + \int_{C_+} dz \sqrt{z^2 - 1} = -i \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 - x^2} + i \int_1^{-1} dx \sqrt{1 - x^2} \\ &= -2i \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

よって



$$\int_{\Gamma_1} dz \sqrt{z^2 - 1} = \int_{\Gamma_2} dz \sqrt{z^2 - 1}$$

$$-i\pi = -2i \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$$

となります。ちなみに、逆にした

$$\int_{-1}^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

も同様の経路を使って求めることができます。

・補足

分岐点の説明を簡単にします。複素数  $z$  による対数  $\log z$  を使います。  $\log z$  は極形式で  $z = \rho e^{i\phi}$  ( $\rho = |z|$ ) から

$$\log z = \log[\rho e^{i\phi}] = \log \rho + \log e^{i\phi} = \log \rho + i\phi$$

$-\pi < \phi \leq \pi$  は偏角です。このとき

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi = e^{i(\phi+2\pi n)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

から

$$\log z = \log \rho + \log e^{i(\phi+2\pi n)} = \log \rho + i(\phi + 2\pi n)$$

となり、 $\phi$  が  $2\pi n$  ずれたものも  $\log z$  です。このため、1つの  $z$  に対して  $\log z$  は異なる無限個の値を持ちます ( $n$  は無限まで取れる)。このことから、対数は無限多価関数と呼ばれます。一般的に、 $z$  に対して複数の値を持つ関数を多価関数と言います。1つの値しか持たなければ1価関数です。

$\log z$  を1価関数にするためには偏角に制限を与えればいいです。つまり

$$\log z = \log \rho + i\phi \quad (-\pi < \phi \leq \pi)$$

として制限された複素平面を使うようにすればよく、この場合を  $\log z$  の主値と呼びます。主値のときは

$$\text{Log} z = \log |z| + i \text{Arg} z$$

のように大文字を使います。小文字と大文字の対応は

$$\arg z = \text{Arg} z + 2\pi n, \quad \log z = \text{Log} z + 2i\pi n$$

となっています。

今の話は複素平面上での動きに対応させます。複素平面上に  $\rho, \phi$  で指定される点  $P$  があるとします。点  $P$  から原点を中心に反時計周りに1周して点  $P$  に戻るといふ動きは  $\phi + 2\pi$  で表せられます。つまり、 $\log z_P$  を1周させて元の点  $P$  に戻ったとすると

$$\log z_P = \log \rho + i\phi \Rightarrow \log \rho + i(\phi + 2\pi)$$

となります。よって、複素平面上において、 $\log z$  は原点を中心に反時計周りに1周すると偏角が  $2\pi$  増加(時計回りなら減少) すると言えます(原点を中心とする閉曲線に沿った周回)。つまり、 $\log z$  は複素平面上を原点を中心に1周するたびに異なる値を持つこととなります。

また、原点を中心としない(原点を内部に含まない)閉曲線を1周するなら、 $\log z$  は元の値に戻ります。例えば、複素平面の右上の領域 ( $0 \sim \pi/2$ ) での閉曲線は偏角が  $0 \sim \pi/2$  に制限されるからです。つまり、偏角に制限を入れることで  $\log z$  の値を1つに決められるという上話になります。

このように、ある点  $O$  を中心とする閉曲線があり、関数とその閉曲線上で周回させ元の地点に戻ってきたとき関数が異なる値を持つなら、点  $O$  を分岐点 (branch point) と言います。つまり、ある関数  $f$  があり、それが点  $z_0 + \rho e^{i\phi}$  にいるとして、この点を中心に反時計周りに一周したときに

$$f(z_0 + \rho e^{i\phi}) \neq f(z_0 + \rho e^{i(\phi+2\pi)})$$

であれば多価関数となり、 $z_0$  は分岐点となります。

$\log z$  は  $z = 0$  が分岐点であることは今の話から分かります。他にも  $z = \infty$  も分岐点に持っています。これは  $z = 1/\xi$  とすれば

$$\log z = \log \xi^{-1} = -\log \xi$$

なので、 $\xi = 0$  は分岐点となり、 $\xi = \infty$  は  $z = \infty$  だからです。

別の例として  $z^m$  も見ておきます。 $z^m$  は  $m$  が整数でないとき多価関数となります。指数関数の定義から

$$z^m = \exp[\log z^m] = \exp[m(\log \rho + i\phi)] = \exp[m(\log \rho + i(\phi + 2\pi n))] = \rho^m e^{im\phi} e^{2i\pi n m}$$

なので、 $m$  が整数であれば  $\exp[2i\pi n m] = 1$  となり  $z^m$  の値は1つに決まります。しかし、 $m$  が整数でなく、 $b/a$  となっていて、 $a, b$  が整数なら

$$\exp[2i\pi b \frac{n}{a}]$$

から、 $a$  個の値を持つので  $a$  価関数となります。 $a$  個の値を持つのは、 $n = a$  のときに  $\exp[2i\pi b] = 1$  となり元の値に戻るからです ( $a$  周すると元の値に戻る)。複素数では  $z^m$  の計算には気をつける必要があります。偏角の定義を与えないと間違った計算をしてしまいます。例えば、虚数単位  $i$  はすぐに分かるように  $(-1)^{1/2} = \pm i$  であり、偏角において  $\pi/2$  なら  $+i$ 、 $3\pi/2$  なら  $-i$  と対応しています。また、実数  $a, b$  が  $a < 0$ 、 $b < 0$  のとき

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{-|a|}\sqrt{-|b|} = i^2 \sqrt{|a|}\sqrt{|b|} = -\sqrt{|a||b|}$$

となることにも注意が必要です。

$m = 1/2$  の場合を見ておきます。 $m = 1/2$  では

$$z^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}(\log \rho + i(\phi + 2\pi n))\right] = \rho^{1/2} \exp\left[i\left(\frac{1}{2}\phi + \pi n\right)\right]$$

なので  $z^{1/2}$  は、 $n = 1, 3, 5, \dots$  では  $-\rho^{1/2}e^{i\phi/2}$ 、 $n = 0, 2, 4, \dots$  では  $+\rho^{1/2}e^{i\phi/2}$  となり 2 つの値を持ちます (2 価関数)。よって、対数の場合と同じように考えることで、 $z^{1/2}$  は原点を中心とする閉曲線を 1 周するごとに  $\pm\rho^{1/2}e^{i\phi/2}$  を行き来することが分かり、2 周すると元の値に戻ります。 $z^{1/2}$  の分岐点は今の話から分かるように  $z = 0, \infty$  にあります。また、 $m$  が無理数や複素数 (虚部がある) のときは無限多価関数です。

多価関数では値が 1 つに定まらないので、複素積分で分岐点の話が出てきます。例えば、分岐点を中心に  $n$  周する閉曲線で積分するとき、1 周ごとに異なる値になってしまいます。なので、積分経路を作るときは分岐点の位置を考慮し、1 つの値しか持たないように制限します。このときに、分岐切断 (branch cut) と呼ばれるものが出てきます (もしくは切断)。

$\log z$  の場合、分岐点は原点と無限遠点なので、2 つの点を中心としない閉曲線なら 1 価関数になります。そのような曲線は原点と無限遠点を結ぶ曲線を避けるようにすれば書くことが出来ます。この分岐点を結ぶ任意の曲線が分岐切断です。

$z^{1/2}$  のときも原点と無限遠点に分岐点なので、同様に分岐切断を書くことが出来ます。 $z^{1/2}$  での分岐切断は原点から無限遠への負の実軸上の直線が使われることが多いです ( $-\pi < \phi \leq +\pi$  に制限する)。

一般的に、多価関数を 1 価関数とするための複素平面上的の曲線を分岐切断と言います。分岐切断は複数選べる場合もあります。

偏角に制限を与えることで複素平面の領域を限定して 1 価関数にしますが、分岐切断を利用して複素平面を拡張して 1 価関数にすることも行われます。これを簡単に言うておきます

閉曲線が分岐切断を横切ると多価関数となることから、分岐切断を境に異なる複素平面に移行させれば、それぞれの複素平面で 1 価関数になると言えます。つまり、 $z^{1/2}$  で言えば、最初は複素平面  $A$  にいて 1 価関数  $\rho^{1/2}e^{i\phi/2}$ 、1 周するときに分岐切断を横切ると別の複素平面  $A'$  に移り 1 価関数  $-\rho^{1/2}e^{i\phi/2}$ 、 $A'$  での分岐切断を横切ると  $A$  に戻って  $\rho^{1/2}e^{i\phi/2}$ 、... というように見えます。このようにして導入された別々の複素平面を繋ぎ合わせたものをリーマン面と言います ( $z^{1/2}$  なら  $A, A'$  の分岐切断を繋いだもの)。リーマン面上で多価関数は 1 価関数として扱われます。そして、分岐点を中心に  $n$  周する閉曲線はリーマン面で考えれば閉じていません。