複素積分

複素積分まわりの話を見ていきます。数学的な証明はかなり省いて、実用上必要になる部分を取り出しています。
ここでは単に閉曲線と言ったときは全て反時計回りです。
i は虚数単位ですが、ここでは文字の添え字としても i を使っているので混乱しないようにしてください。特に和をとる表記に i を使っているときは添え字に対してのみです ($\Sigma e^{ix_i} = e^{ix_1} + e^{ix_2} + \cdots$)。
z を複素数、z^* をそれの複素共役とし、x, y は実数としています。
積分経路を図にしていないのでわかりづらいです。

- 複素平面

　複素数は 2 次元での xy 平面の x 軸を実軸、y 軸を虚軸とした複素平面上で考えられます。複素平面は $z = x+iy$ を 2 次元面で表わしたもので、複素平面上の点は (x, y) で指定でき、その点は $z = x + iy$ に対応します。よく出てくる言葉として、複素平面の $y > 0$ を上半面 (upper half plane)、$y < 0$ を下半面 (lower half plane) と言います。
　また、複素数 $z = x + iy$ での、x を実部 (real part)、y を虚部 (imaginary part) と言い、記号として実部を $\mathrm{Re}z = x$、虚部を $\mathrm{Im}z = y$ と書きます。この記号を使えば $z = \mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z$ とも書けます。
　複素数 $z = x + iy$ の絶対値は

$$|z| = \sqrt{z^*z} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と与えれていて、複素共役との積のルートです。これは複素平面上での原点と z の距離に対応しています。
　複素平面上で極座標 (r, θ) $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ を使うことで、z は

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

とできます。最後へはオイラーの公式を使っています。$z = re^{i\theta}$ と書いたものを極形式 (polar form) と言います。r と θ は

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と与えられます。また、θ は z の偏角 (argument) とも呼ばれ、$\theta = \arg z$ と書かれます。$z \neq 0$ の偏角には 2π の任意性があります (1 周すればもとに戻るから)。

- 正則

　z がある範囲 D 内にいるとして (D は複素数の集まりで、そこに含まれるある z)、それによって与えられる関数 $f(z)$ を用意します (D が $f(z)$ の定義域)。この領域 D 内の任意の点で $f(z)$ が微分可能なとき、関数 $f(z)$ は領域 D で正則 (holomorphi) と言います。つまり、領域 D において関数 $f(z)$ の微分

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が 1 つだけ存在するとき、関数は領域 D において正則と言われ、正則関数 (holomorphic function) と呼ばれます。1 つだけというのは $\Delta z \to 0$ の極限を取ったとき、その計算結果が 1 つの有限の値に決まることを指しています (微分の定義)。
言葉の注意ですが、z_0 が正則点と言ったとき、それは z_0 で微分出来るという意味ではなく、$0 < |z - z_0| < r$ (r は適当な正の値) において $f(z)$ が微分出来ることを指します。数学用語を使えば、z_0 の近傍 ($0 < |z - z_0| < r$) で微分可能なら z_0 は正則点ということです。このため、単に $f(z)$ は z_0 で正則と言ったときは、z_0 の近傍で正則 (微分可能) という意味が含まれています。簡単に言えば、z_0 という一点でなく、それを囲む半径 r の円内で微分可能ということです。
　単語の補足をしておきます。実数の関数においてテーラー展開できる関数は解析関数 (analytic function) と定義され、複素数の関数でも同じ定義が使われています。そして、示しませんが正則関数と解析関数は同じ意味になります。他にも複素微分可能 (complex differentiable) と言うこともありますが、同じ意味です。というわけで、同じ意味を指す単語として、正則関数、解析関数、複素微分可能があります。英語ではさらに regular もありますが、古い本で使われている単語のようで、最近の本ではあまり使われていません。日本語の正則はこの regular の名残のようです。
　微分を定義するために $\Delta z \to 0$ を考えたとき、複素数の場合では $z = 0$ の地点は $z = x + iy$ から $x = 0, y = 0$ の地点に対応するので、$\Delta z \to 0$ の極限の取り方として

$$(i)\Delta x \to 0\ ,\ \Delta y = 0$$

$$(ii)\Delta x = 0\ ,\ \Delta y \to 0$$

の 2 通りがあります ($\Delta y = 0$ としてから Δx を 0 に近づけるか、$\Delta x = 0$ としてから Δy を 0 に近づける)。つまり、$f(z)$ が正則 (微分可能) なら、この 2 つの方向からの極限の取り方で同じ結果になります。これを見ていきます。
　$f(z)$ はある領域 D で正則とします。そして、$f(z)$ は x, y を変数に持つとして

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

ここで (i) を考えて、$\Delta x \to 0\ ,\ \Delta y = 0$ として極限を取ると、偏微分の定義によって

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

同様に (ii) での $\Delta x = 0\ ,\ \Delta y \to 0$ の極限では

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$f(z)$ は正則としているので、この 2 つが一致している必要があることから

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -i\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

という関係が出てきます。さらに $f(x,y)$ を実部と虚部に分けて

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

とすれば

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

となるので、実部と虚部に対して

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

という関係が出てきて、これをコーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の方程式やコーシー・リーマンの条件と言います。というわけで、$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が正則関数ならコーシー・リーマンの方程式を満たします。これは $f(z)$ が正則なら、その実部と虚部である $u(x,y), v(x,y)$ が偏微分可能とも言っています。なので、$u(x,y), v(x,y)$ が偏微分可能であるなら $f(z)$ が正則とも言えて、この 2 つ (コーシー・リーマンの方程式と u, v が偏微分可能) によって正則であるための必要十分条件となります。

ただし領域を考慮しないとコーシー・リーマンの方程式によって正則だと判定できない例もあります。例えば

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = u + iv \qquad (u = \frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ v = \frac{-y}{x^2+y^2})$$

を見ると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{-1}{x^2+y^2} - \frac{-2y^2}{x^2+y^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

これらはコーシー・リーマンの方程式を満たします。しかし、$f(z) = 1/z$ は $z = 0$ の地点で発散するので、$z = 0$ で $1/z$ は正則でないです（u は例えば $y = 0$ に固定して $x \to 0$ にすると発散するのでこの地点で偏微分が有限の値にならない)。つまり、$1/z$ は $z = 0$ を含む領域では正則でなく、$z = 0$ を除いた領域では正則になる関数です ($z = 0$ を除いた領域で微分可能)。しかし、これは $z = 0$ を除けば微分できるという前提でコーシー・リーマンの方程式を使っているために起きていることでしかないです (実数での $1/x$ の微分もこの感覚で行っている)。なので、領域 D を原点を中心にする半径 r の円だとして $z = 0$ を明確に含む領域にしてしまい、$x^2 + y^2 = r^2$ の定数とし、簡単のために $r = 1$ とすることで

$$f(z) = \frac{1}{z} = x - iy = u + iv = z^* \qquad (u = x\ ,\ v = -y)$$

と書けて、これから

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-1\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=1$$

となって、コーシー・リーマンの方程式を満たさない結果が出てきます。ついでに、これから z の複素共役 z^* は正則でないことも分かります。

- 複素積分

　複素積分は複素平面上での線積分です。複素積分は

$$\int_C f(z)dz$$

と書かれます。C が複素平面上の曲線 (積分経路) で、複素積分はその曲線に対する線積分になります。曲線 C を Δz_i で分割して書くなら

$$\int_C f(z)dz=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}f(z_i)\Delta z_i$$

この複素積分は

$$\int_C f(z)dz=\int_C f(z)dx+i\int_C f(z)dy$$

と定義されていて、$dz=dx+idy$ となっているだけです。さらに $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とすれば

$$\int_C f(z)dz=\int_C(u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy)=\int_C(u(x,y)dx-v(x,y)dy)+i\int_C(v(x,y)dx+u(x,y)dy)$$

と書き換えられます。この積分の構造は線積分なので、曲線 C を x,y で書けば積分を実行できます。もしくは、通常の線積分と同じように曲線のパラメータ t を導入して

$$\int_C f(z)dz=\int_{t_1}^{t_2}f(z(t))\frac{dz}{dt}dt$$

としても計算出来ます。複素積分で重要になってくるのは、曲線が閉じている場合 (閉曲線) で、この場合も線積分の表記に従って

$$\oint_C f(z)dz$$

と書かれます。また、C が閉曲線だと明記されている場合は単に $\displaystyle\int_C$ と書かれることもあり、ここではこのように表記しています。

　閉曲線は曲線の両端が曲線のパラメータ $a\leq t\leq b$ によって $C(a),C(b)$ と与えられているとき $C(a)=C(b)$ で、両端以外で曲線のパラメータが $t\neq t'$ なら $C(t)\neq C(t')$ となるものです (紐の端と端だけがくっついていて、他の部分は交差していない)。閉曲線をジョルダン (Jordan) 閉曲線や単純閉曲線もしくは単一閉曲線と呼び

ます（$C(a) \neq C(b)$ ならジョルダン曲線のように呼ばれます)。面倒なので、ここでは単に閉曲線と呼んでいきます。

閉曲線では曲線の向きとして、時計回り、反時計回りの 2 つが取れます。反時計回りを正、時計回りを負と呼んでいて、ここでは閉曲線の向きは何も言わない限り反時計回りだとします。また、ここでは曲線 C は微分可能だとします。

言葉の定義で単連結 (simply connected) というのがあって、これは簡単に言ってしまえば 1 つの閉曲線で囲まれた領域のことです。単連結でないなら多重連結 (multiply connected) と呼ばれます。多重連結は、閉曲線で囲まれた領域の中にさらに別の閉曲線が複数ある場合です。

複素積分で問題になるのが、被積分関数が正則かそうでないかです。曲線 C を含む領域 D において $f(z)$ が正則であるなら、その曲線に沿った積分は曲線 (積分経路) の両端にのみ依存して、曲線の始点を $C(a)$、終点を $C(b)$ とすれば

$$\int_C f(z)dz = F(C(b)) - F(C(a)) \quad (\frac{dF(z)}{dz} = f(z)\ ,\ F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi)$$

もしくはもっと単純に始点を z_1、終点を z_2 とすれば

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

となります。このように、$f(z)$ が正則であるなら、積分の計算で経路を無視できるということです。

曲線 C での複素積分は

$$\int_C (f(z)+g(z))dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)dz$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_0} f(z)dz + \int_{z_0}^{z_2} f(z)dz$$

このような通常の積分と同じ関係を持ちます。3 番目は経路 C を 2 つの経路の和 $C_1 + C_2$ にすることを意味し (2 つ以上の経路に分けることもできる)、4 番目での z_1, z_2 は C の両端、z_0 は C 上の点です。

積分経路が閉曲線の場合は他の定理とかを利用した計算が主なので、曲線が閉じていない具体例を見ておきます。単純な例として、複素平面の原点から $z = 1 + i$ を結ぶ直線とします。被積分関数は $z = x + iy$ とすれば、積分経路 (曲線)C_1 によって

$$\int_{C_1} zdz = \int_{C_1} (x+iy)(dx+idy) = \int_{C_1} (xdx - ydy + iydx + ixdy)$$

今の積分経路 C_1 は通常の xy 平面で言えば、原点と $(1, 1)$ を結ぶ直線なので直線は $y = x$ で、x の範囲は 0 から 1 です。複素平面上でも x と y の関係は同じなので (y 軸は虚軸ですが y 自体は実数)

$$\int_{C_1} (xdx - ydy + iydx + ixdy) = \int_0^1 (xdx - xdx + ixdx + ixdx) = 2i\int_0^1 xdx = i$$

と求まります。

始点と終点は変えずに経路を変えてみます。始点を原点とし、次に $z = x = 1$ にいってから $z = 1 + i$ に行く経路 C_2 を見てみます (実軸 x 上を動いてから虚軸 y 方向に動く)。そうすると原点から 1 への経路を C_2'、1 から $1 + i$ への経路を C_2'' とすれば

$$
\begin{aligned}
\int_{C_2} zdz = \int_{C_2}(xdx - ydy + iydx + ixdy) =& \int_{C_2'}(xdx - ydy + iydx + ixdy) + \int_{C_2''}(xdx - ydy + iydx + ixdy)\\
=& \int_0^1 xdx + \int_0^1 (-y+i)dy\\
=& \, i
\end{aligned}
$$

2 行目へは C_2' 上では $y=0, dy=0$、C_2'' 上では $x=1, dx=0$ となっていることを使っています。このように積分経路を変えても同じ結果になります。

違う手順として曲線のパラメータを使ってみます。経路 C_1 での原点から $z=1+i$ を結ぶ直線として、曲線のパラメータを t とすれば、曲線 (経路)$z(t)$ は $z(t)=(1+i)t$ $(0\leq t\leq 1)$ となるので

$$
\int_{C_1} zdz = \int_0^1 z(t)\frac{dz(t)}{dt}dt = \int_0^1 (1+i)t(1+i)dt = 2i\frac{1}{2} = i
$$

$z(t)$ が $(1+i)t$ になるのは、xy 平面での $(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ直線を表すベクトルが $\boldsymbol{C}(t)=(t,t)=(1,1)t$ で与えられることを考えれば、複素平面上で $z=0$ から $z=1+i$ $(x=1, y=1)$ を結ぶ直線は $z=x+iy$ から $z(t)=(1+i)t$ となります。もっと単純に言えば、直線は t の 1 次なので $(1+i)t$ というだけです。

同様に $x=1$ にいってから $z=1+i$ に行くとした C_2 でも、C_2' では $z(t)=t$、C_2'' では $z(t)=1+it$ から (両方とも $0\leq t\leq 1$)

$$
\int_{C_2} zdz = \int_{C_2'} zdz + \int_{C_2''} zdz = \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1+it)idt = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i
$$

C_2'' で $z(t)=1+it$ になるのは、$x=1$ で固定され、y 方向 (虚軸方向) のみに変化するからです。

次に $1/z$ を円周上で積分してみます。経路 C を半径 r の円に沿って $x=r, y=0$ から $x=-r, y=0$ にいく経路とします。そうすると円周なので極形式に書き換えてやることで、ただの角度積分になって

$$
\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{z}dz =& \int_0^\pi \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta \qquad (z=re^{i\theta})\\
=& \int_0^\pi id\theta\\
=& \, i\pi
\end{aligned}
$$

と計算できます。

積分経路によって結果が異なる簡単な例は z^* です。z^* は正則関数の最後で見たように正則でないので、積分経路に依存するはずです。始点を原点、終点を $z=1+i$ にします。原点と $z=1+i$ を結ぶ直線 $(y=x)$ の経路 C_1 では

$$
\int_{C_1} z^*dz == \int_{C_1}(x-iy)(dx+idy) = \int_{C_1}(xdx+ydy-iydx+ixdy) = \int_0^1 (xdx+xdx-ixdx+ixdx) = 2\int_0^1 xdx = 1
$$

原点から $x=1, y=0$ に行って、そこから $z=1+i$ $(x=1, y=1)$ に行く経路 C_2 では

$$
\int_{C_2} z^*dz = \int_{C_2}(xdx+ydy-iydx+ixdy) = \int_{C_2}(xdx+ydy-iydx+ixdy) = \int_0^1 xdx + \int_0^1 (ydy+idy) = 1+i
$$

第一項では $y=0$ で x が $0\sim 1$、第二項では $x=1$ で y が $0\sim 1$ です。ついでに $x=0, y=1$ に行ってから、$z=1+i$ に行く経路 C_3 では

$$\int_{C_3} z^* dz = \int_{C_3}(xdx + ydy - iydx + ixdy) = \int_0^1 ydy + \int_0^1 (xdx - idx) = 1 - i$$

このように実際に経路によって異なった結果が出てきます。

- コーシーの積分定理、コーシーの積分公式

コーシー (Cauchy) の積分定理は $f(z)$ がある領域 D で正則で、閉曲線 C が領域 D にいるなら

$$\int_C f(z)dz = 0$$

というものです。

コーシーの積分定理からさらに重要な性質が出てきます。$f(z)$ が多重連結な領域で与えられているとします。この領域は閉曲線 C で与えられていて、その中に $C_1, C_2, \ldots, C_n$ の閉曲線があり、$C_1, \ldots, C_n$ はお互いに交わっていなく単独で閉じた領域を作っています (C の中は $C_1, \ldots, C_n$ とそれら以外の領域に分けられる)。そして、$C_1, C_2, \ldots, C_n$ は正則でない点を含んでいるとしたとき (C 内は $C_1, \ldots, C_n$ の内部を除いて正則)、積分は

$$\int_C f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f(z)dz$$

と書けます。

コーシーの積分公式は $f(z)$ がある領域 D で正則で、閉曲線 C が領域 D にいて、a が閉曲線 C 内にいるとき

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

が成り立つというものです。例えば、$f(z)=\sin z$ として、閉曲線 C が半径 $r>a$ の円だとすれば、C 内で $\sin z$ は正則で、a が C 内にいるので、この閉曲線 C での $\sin z/(z-a)$ の積分が

$$\int_C \frac{\sin z}{z-a}dz = 2\pi i \sin a$$

と求められます。

コーシーの積分公式の微分した形である

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

のことをグルサ (Goursat) の定理と言います。これは

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz\ ,\ f(a+\delta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a-\delta}dz$$

に対して微分の定義 $(f(a+\delta)-f(a))/\delta$ を使っていけば帰納法で証明できます。

- ローラン展開

関数 $f(z)$ が $z=z_0$ で正則でないときの z_0 周りでのべき級数展開をローラン展開と言います。これは

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

と与えられます。C は z_0 を囲む閉曲線です。第二項の

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

を主要部 (principal part) と言います。ちなみに、テーラー展開は正則点周りでのべき級数展開です。テーラー展開がそうだったように、ローラン展開も 1 つに決まります (べき級数展開の形が 1 つ)。なので、$f(z)$ を適当なべき級数展開の形で表わしたものがローラン展開になります。

例えば $z=0$ で正則でない

$$f(z)=e^{1/z}$$

これに対して、exp の展開

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

をそのまま使うと

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{z})^n$$

となり、これがローラン展開になります。

- 特異点

関数 $f(z)$ が $z=z_0$ で正則でない (微分できない) なら、z_0 を特異点（singularity）と言います。例えば、$1/z$ の $z=0$ は特異点です。もう少し細かく言うと、関数 $f(z)$ は点 z_0 の周り (z_0 の近傍。半径 R に対して $0<|z-z_0|<R$。) で正則だが、$z=z_0$ では正則でないとき、この $z=z_0$ を孤立特異点 (isolated singularity) と呼びます。ここでは単に特異点と呼んでいきます。

特異点はローラン展開の形によって分類できます。ローラン展開の主要部がないなら除去可能な特異点（removable singularity)、主要部が第 n 項まであるなら n 位の極 (pole)、主要部が無限項あるなら真性特異点 (essential singularity) となります。

極の定義は、$0<|z-z_0|<R$ で正則な関数 $f(z)$ が、その範囲内 ($|z-z_0|<\delta$。$\delta<R$) で正則で $z=z_0$ で 0 にならない関数 $g(z)$ によって、

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n} \qquad (0<|z-z_0|<\delta)$$

と書けるとき、z_0 を $f(z)$ の極と呼び、n を位数と呼びます。なので、ローラン展開での主要部が n 項まであるとき n 位の極となります。おそらく

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$$

が有限の値になるとき z_0 を n 位の極と言った方が分かりやすいです。

- 留数、留数定理

  留数 (residue) は、閉曲線 C の内部に特異点 $z=z_0$ が 1 つあり、z_0 を除いて正則な関数 $f(z)$ があったとき

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

と与えられています。C は内側に z_0 を含む閉曲線です。右辺の積分は C の中に z_0 がいなければコーシーの積分定理から 0 になります。留数 $\mathrm{Res}(f,z_0)$ は $\mathrm{Res}f(z)$ とも書かれます。

　閉曲線 C の内部に n 個の特異点があったとき、留数は

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_i)$$

これを留数定理と言います。簡単に言えば、閉曲線 C の内部の特異点を n 個の閉曲線で囲んで、それの和にしたものです。このときの C は反時計回りですが、時計回りの閉曲線 C' のときは線積分の性質そのままに符号が反転して

$$\int_{C'} f(z)dz=-2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_i)$$

となります。

　ローラン展開を利用することで留数は求まります。ローラン展開を閉曲線 C によって積分して

$$\int_C f(z)dz=\int_C\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n dz$$

閉曲線 C は特異点を囲むものなので、z_0 を囲む半径 r の円だとします。ここで主要部

$$\int_C\frac{1}{(z-z_0)^n}dz$$

の積分を計算してみます $(n=1,2,\ldots)$。$n=1$ では

$$\begin{aligned}\int_C\frac{1}{z-z_0}dz&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta\qquad(z=re^{i\theta})\\&=\int_0^{2\pi}id\theta\\&=2\pi i\end{aligned}\tag{1}$$

途中で C は $z=z_0$ を中心とする半径 r の円なので、$z-z_0=re^{i\theta}$ として原点を動かしています。$n\neq1$ では

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{in\theta}} ire^{i\theta}d\theta \\
&= \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}d\theta \\
&= \frac{i}{r^{n-1}}\Big[\frac{1}{-i(n-1)}e^{-i(n-1)\theta}\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{i}{r^{n-1}}\Big(\frac{1}{-i(n-1)} - \frac{1}{-i(n-1)}\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$e^{-i2n\pi}$ は n が整数のとき 1 であることを使っています（今は $n-1=1,2,\ldots$）。
　残っている $(z-z_0)^n$ $(n \geq 0)$ での積分は 0(コーシーの積分定理から) なので

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz \\
&= \int_C c_{-1}(z-z_0)^{-1}dz \\
&= 2\pi i c_{-1}
\end{aligned}$$

よって、留数はローラン展開の係数によって

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1}$$

と求められ、これは n 位の極で成り立っています。そして、c_{-1} は $f(z)$ の具体的なローラン展開を行わなくても求められます。
　ローラン展開を

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_{-1}\frac{1}{z-z_0} + c_{-2}\frac{1}{(z-z_0)^2}$$

として 2 位の極まであるとします。このとき c_{-1} は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}((z-z_0)^2 f(z))\big|_{z=z_0} &= \frac{d}{dz}(c_0(z-z_0)^2 + c_1(z-z_0)^3 + c_2(z-z_0)^4 + c_{-1}(z-z_0) + c_{-2})\big|_{z=z_0} \\
&= c_{-1}
\end{aligned}$$

として取り出せます。これを n 位の極の場合に一般化すると

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big((z-z_0)^n f(z)\big)\big|_{z=z_0}$$

階乗は c_{-1} にくっついてくる $(z-z_0)^{n-1}$ の微分から出てきます。
　よって、$z=z_0$ が n 位の極のとき

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big((z-z_0)^n f(z)\big)\Big|_{z=z_0}$$

として留数が求まります。

- ジョルダンの補題 (補助定理)
　ジョルダンの補題は複素平面の上半面 (実軸の上側) において $f(z)$ が $|z| \to \infty$ で 0 になるなら

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iaz} f(z)dz = 0 \quad (a > 0)$$

となることです。経路 C_R は原点を中心にする半径 R の上半円（実軸上の $+R$ から反時計回りに虚軸上の $+R$ (iR) に行って、実軸上の $-R$ に行く）です。経路 C_R において、$R \to \infty$ は $z = Re^{i\theta}$ から $|z| \to \infty$ に対応します。同様に、下半面においては

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} e^{-iaz} f(z)dz = 0$$

となります。経路 C'_R は半径 R の下半円 (実軸上の $-R$ から反時計回りに虚軸上の $-R$ $(-iR)$ に行って、実軸上の $+R$ に行く) です。

　これが言いたいことは、被積分関数が条件に合っている適当な積分があったとき、新しく C_R や C'_R の経路をつけても元の積分に影響しない (この経路からの寄与がない) ということです。これを利用して積分経路を特異点を囲む閉曲線にして、積分を留数定理によって求めることができます。よくあるのが

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow \int_{-R}^{R} \Rightarrow \int_{-R}^{R} + \int_{C_R} = \int_C \quad \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow \int_{-R}^{R} \Rightarrow \int_{-R}^{R} + \int_{C_{R'}} = \int_{C'}\Big)$$

として、実軸と上半円 (下半円) によって囲まれる閉曲線 C (C') にする操作です。

　また、ジョルダンの補題で与えられている形でなくても同じように経路からの寄与が 0 になる場合もあるので、実際に計算するときは経路を加えても平気か確かめる必要があります。

　経路を足せるか調べる方法の例にもなるので、ジョルダンの補題を証明します。することは

$$I = \int_{C_R} e^{iaz} f(z)dz\ ,\ I' = \int_{C'_R} e^{-iaz} f(z)dz$$

これらが R を無限大にしたときに消えるかどうかです。先に I の方を見ていきます。I は積分の結果なので数値になることから、絶対値が 0 になることを示せばいいです。そうすると

$$|I| = \Big|\int_{C_R} e^{iaz} f(z)dz\Big| = \Big|i\int_0^{\pi} e^{iaRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}d\theta\Big| \quad (z = Re^{i\theta})$$

これの大小関係を見るために積分の絶対値の関係を持ち出します。積分に対する絶対値には

$$\int_a^b \big|f(x)\big|dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

という性質があります。これは、右辺では $a \sim b$ の範囲で $f(x)$ がマイナスを取れる場合があるのに対して、左辺は $|f(x)|$ なので常に 0 以上だからです (和が負を含んでいる場合と 0 以上だけの場合)。同様にして、$|f(x)| \geq -f(x)$ を使えば

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq -\int_a^b f(x)dx$$
$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

この 2 つを合わせれば

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

これから、$|f(x)|$ の積分結果の正負の間に $f(x)$ の積分結果がいるので

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|dx$$

となります。これを使って

$$\begin{aligned}
|I| &= \Big|\int_{C_R} e^{iaz}f(z)dz\Big| \\
&= \Big|i\int_0^\pi e^{iaRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}d\theta\Big| \\
&\leq \int_0^\pi \big|e^{iaRe^{i\theta}}\big|\big|f(Re^{i\theta})\big|\big|Re^{i\theta}\big|d\theta \\
&= \int_0^\pi \Big|\exp[iaR(\cos\theta + i\sin\theta)]\Big|\big|f(Re^{i\theta})\big|Rd\theta \\
&= \int_0^\pi \big|e^{-aR\sin\theta}\big|\big|f(Re^{i\theta})\big|Rd\theta \quad (|e^{ix}| = \sqrt{e^{ix}e^{-ix}} = 1) \\
&= \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}|f(Re^{i\theta})|Rd\theta
\end{aligned}$$

最後へは exp は負の値を持たないからです。$f(z) = f(Re^{i\theta})$ は R の無限大で 0 になるとしているので、θ の積分に寄与しない微小な値 ϵ 以下になるとして

$$|I| \leq \epsilon R\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}d\theta$$

右辺の積分は

$$
\begin{aligned}
\epsilon R\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}d\theta &= \epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta + \epsilon R\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-aR\sin\theta}d\theta \\
&= \epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta + \epsilon R\int_{-\pi/2}^{0} e^{-aR\sin(\theta'+\pi)}d\theta' \quad (\theta'=\theta-\pi) \\
&= \epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta + \epsilon R\int_{-\pi/2}^{0} e^{aR\sin\theta'}d\theta' \quad (\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta) \\
&= \epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta + \epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta \quad (\sin(-\theta)=-\sin\theta) \\
&= 2\epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta
\end{aligned}
$$

$\sin\theta$ は $0\leq\theta\leq\pi/2$ の範囲において

$$
\frac{2\theta}{\pi}\leq\sin\theta
$$

という関係を持つので (グラフにすれば分かる。もしくは、この範囲の $\sin\theta$ は $0\sim 1$ を結ぶ曲線なので、0 と 1 を繋ぐ直線が $\sin\theta$ の曲線の下側に 1 つあり、それが $2\theta/\pi$)、これを使うことで

$$
|I|\leq 2\epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta \leq 2\epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi}d\theta = 2\epsilon R\big[-\frac{\pi}{2aR}e^{-2aR\theta/\pi}\big]_0^{\pi/2} = \epsilon\frac{\pi}{a}(1-e^{-aR})
$$

R は無限大にするので

$$
|I|\leq\epsilon\frac{\pi}{a}
$$

となり、ϵ も 0 に近づくので

$$
\lim_{R\to\infty}|I|=0
$$

となり、証明ができたことになります。
　I' も簡単に見ておきます。することは同じで

$$
|I'|=|\int_{C'_R} e^{-iaz}f(z)dz|=|i\int_{\pi}^{2\pi} e^{-iaRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}d\theta| \quad (z=Re^{i\theta})
$$

から

$$
\begin{aligned}
|I'| \le \int_{\pi}^{2\pi} |e^{-iaRe^{i\theta}}||f(Re^{i\theta})|Rd\theta = & \int_{\pi}^{2\pi} |\exp[-iaR(\cos\theta + i\sin\theta)]||f(Re^{i\theta})|Rd\theta \\
&= R\int_{\pi}^{2\pi} e^{aR\sin\theta}|f(Re^{i\theta})|d\theta \\
&\le \epsilon R\int_{\pi}^{2\pi} e^{aR\sin\theta}d\theta \\
&= \epsilon R\int_{0}^{\pi} e^{aR\sin(\theta'+\pi)}d\theta' \qquad (\theta' = \theta - \pi) \\
&= \epsilon R\int_{0}^{\pi} e^{-aR\sin\theta'}d\theta' \\
&= 2\epsilon R\int_{0}^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta'}d\theta'
\end{aligned}
$$

よって、同じ結果になります。もしくは $\pi \le \theta \le 3\pi/2$ の間で $-2\theta/\pi \ge \sin\theta$ になっていることを使っても出てきます。

ついでに、よく出てくる具体的な例として

$$
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx
$$

も見ておきます。これは $x=0$ で発散していそうですが、$\sin x$ の展開

$$
\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots
$$

を見てみると、第一項は 1 になり、それ以降は $x^2, x^4, \ldots$ と続いていくので、$x=0$ の極限が取れます。なので、$x=0$ で正則になっています。正則だと特異点を利用した積分が出来ないので

$$
\begin{aligned}
\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx &= \frac{1}{2i}\int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}dx\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx - \int_{-r}^{-R} \frac{e^{ix}}{x}dx\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx\Big) \\
&= \frac{1}{2i}J
\end{aligned}
$$

と変形します。そうすると、$e^x = 1 + x + \cdots$ なので、$x=0$ が特異点になります。元の積分には

$$
\frac{1}{2i}\lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \tag{2}
$$

として戻せます。

このとき積分経路を複素平面上で、半径 r と半径 R の上半円をつけて

$$\int_{-R}^{-r} dz + \int_{C_1} dz + \int_{r}^{R} dz + \int_{C_2} dz$$

と変更します (複素平面なので実数 x を複素数 z にします。実軸上のみなら z は x と同じ)。C_1 は原点 $z = 0$ を中心にする半径 r の上半円 (時計回り) でこれによって原点での特異点を避けて、C_2 は原点を中心にする半径 R の上半円 (反時計回り) です。なので全体の経路は、$-R$ から出発して $-r$ についたら原点中心に $+r$ への上半円を進み、$+r$ から $+R$ に進み、$+R$ から $-R$ へ上半円を進む閉曲線 C になっています。そして、この閉曲線 C による積分経路の内側に特異点はいないので

$$J_C = \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

これから

$$J_C = J + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \tag{3}$$

となることを利用して J を求め、$r = 0, R = \infty$ の極限を取って元の積分結果を導きます。

(3) の第三項はジョルダンの補題の形そのものなので、$R \to \infty$ で消えます。一応少し見ておくと

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

$$\Big| \int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta \Big| \leq \int_0^{\pi} |e^{iR\cos\theta}| e^{-R\sin\theta} |d\theta = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

となるので、この先は明らかにジョルダンの補題を証明した流れと同じになります。というわけで、結局消えることが同様の手続きで分かります。

(3) の第二項では C_1 上で素直に積分します。そうすると

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz &= i \int_{\pi}^{0} \frac{1}{re^{i\theta}} e^{ir\cos\theta} e^{-r\sin\theta} re^{i\theta} d\theta \qquad (z = re^{i\theta}) \\ &= i \int_{\pi}^{0} e^{ir\cos\theta} e^{-r\sin\theta} d\theta\end{aligned}$$

$r \to 0$ の極限を取ることになるので

$$i \lim_{r\to 0} \int_{\pi}^{0} e^{ir\cos\theta} e^{-r\sin\theta} d\theta = i \int_{\pi}^{0} d\theta = -i\pi$$

よって、(3) にこれらの結果を入れることで J が出てくるので極限を取ることで、(2) から $\sin x/x$ の積分は

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \lim_{R\to\infty} \lim_{r\to 0} J = -\frac{1}{2i} \lim_{r\to 0} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

と求まります。

他にも少しひねった方法で求めることもできます。最初に戻って $\sin x/x$ の変形を

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin x}{x}\Big)dx &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} - \int_0^{-\infty} \frac{\sin(-x)}{-x}\Big)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} - \int_0^{-\infty} \frac{\sin x}{x}\Big)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} + \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\Big)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx\end{aligned}$$

と行います。そして積分経路を

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx \ \Rightarrow\ \int_{-R}^{-r}\frac{\sin z}{z}dz + \int_{C_1'}\frac{\sin z}{z}dz + \int_r^R \frac{\sin z}{z}dz$$

と変更します。C_1' は原点中心の半径 r の下半円です。$\sin x/x$ は 0 が特異点ではないので、$R\to\infty, r\to 0$ の極限で素直に元の積分に戻るので、この経路の変更は結果を変えません (実軸上の経路から原点を下半円で避ける経路にしても最終的な積分の結果が変わらない)。なので

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\Big(\int_{-R}^{-r}\frac{\sin z}{z}dz + \int_{C_1'}\frac{\sin z}{z}dz + \int_r^R\frac{\sin z}{z}dz\Big) = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\int_{C_0}\frac{\sin z}{z}dz$$

右辺の原点を下半円で避けて $-R$ から $+R$ へ行く経路を C_0 としています。これにさらに経路として

$$\int_{C_2} dz\ ,\ \int_{C_2'} dz$$

を加えることを考えます。C_2 は反時計回りの上半円、C_2' は時計回りの下半円です (半径 R)。ジョルダンの補題や上での結果からすでに分かっているように、$R\to\infty$ で

$$\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0\ ,\ \int_{C_2'}\frac{e^{-iz}}{z}dz = 0$$

なので

$$\begin{aligned}\int_{C_0}\frac{\sin z}{z}dz =& \int_{C_0}\frac{\sin z}{z}dz + \frac{1}{2i}\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz - \frac{1}{2i}\int_{C_2'}\frac{e^{-iz}}{z}dz \\ &= \frac{1}{2i}\int_{C_0}(\frac{e^{iz}}{z} - \frac{e^{-iz}}{z})dz + \frac{1}{2i}\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz - \frac{1}{2i}\int_{C_2'}\frac{e^{-iz}}{z}dz \\ &= \frac{1}{2i}\int_{C_+}\frac{e^{iz}}{z}dz - \frac{1}{2i}\int_{C_-}\frac{e^{-iz}}{z}dz\end{aligned}$$

とできます。$C_+ = C_0 + C_2$、$C_- = C_0 + C_2'$ です。C_+ は原点を下半円で避けている $-R$ から $+R$ への経路と上半円の経路をくっつけ閉曲線で、C_- は原点を下半円で避けている $-R$ から $+R$ への経路と下半円の経路をくっつけた閉曲線です。このため、C_+ 内には特異点である原点がいて、C_- 内には特異点である原点がいません。

　そうすると、C_- の積分は 0 になります。C_+ の積分は経路内に $z=0$ の 1 位の極を持つことから (経路は反時計回り)、留数定理によって

$$\int_{C_+}\frac{e^{iz}}{z}dz=2\pi ie^0=2\pi i$$

と計算できます。というわけで

$$\int_{C_0}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{1}{2i}\int_{C_0}(\frac{e^{iz}}{z}-\frac{e^{-iz}}{z})dz=\frac{1}{2i}\int_{C_+}\frac{e^{iz}}{z}dz-\frac{1}{2i}\int_{C_-}\frac{e^{-iz}}{z}dz=\pi$$

元の積分に戻せば

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\int_{C_0}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$$

となって、同じ結果が求まります。

- 主値積分
　実軸上に連続でない点を含むときの積分も複素積分を利用して求めることが出来ます。特に $-\infty$ から $+\infty$ や 0 から $+\infty$ の積分に対して使われます (物性や工学系でよく出てきます)。実軸上の積分経路があり、実軸上の x_0 以外で連続な関数 $f(x)$ があったとき

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon}f(x)dx+\int_{x_0+\epsilon}^b f(x)dx\Big)$$

としたものを主値積分やコーシーの主値 (principal value) と言います。これは記号として

$$\mathrm{pv}\int_a^b f(x)dx=\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{x_0-\epsilon}f(x)dx+\int_{x_0+\epsilon}^b f(x)dx\Big)$$

と書かれます。他にも PV、p.v.、vp、P といった記号が使われています (主値を使うときはよっぽど不親切でない限り主値を表す記号だと書いてあります)。
　主値積分は留数によって求めることができます。積分の形として

$$\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz$$

というのを考えます。閉曲線 C は実軸上で a を上半円 (半径 ϵ) で避けて $-R$ から R へ行き、R から $-R$ へ向かう上半円の経路です (最後に $R\to\infty,\ \epsilon\to 0$ にする)。これは C の経路を分割して書けば

$$\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{-R}^{a-\epsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz+\int_{a+\epsilon}^{R}\frac{f(z)}{z-a}dz+\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz+\int_{C_2}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

左辺は経路 C 内 ($R\to\infty,\ \epsilon\to 0$ でも) において $f(z)/(z-a)$ の留数が $\mathrm{Res}(f/(z-a),z_i)$ で与えられていれば留数定理から

$$\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i\sum_{i=1}^n\mathrm{Res}(\frac{f}{z-a},z_i)$$

となります（経路 C は $z=a$ の極を内側に持っていない)。
　そして、$\epsilon\to 0$ において

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \mathrm{pv}\int_{-R}^{R}\frac{f(z)}{z-a}dz + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz + \int_{C_2}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

と書けます。C_1 は a を中心にする半径 ϵ の上半円、C_2 は原点を中心にする半径 R の上半円です。$f(z)/(z-a)$ は $R\to\infty$ で C_2 からの寄与を作らないとします（右辺第三項が 0)。C_1 の積分は留数、留数定理での (1) で行っているように

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz = i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{f(a+\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}}\epsilon e^{i\theta}d\theta = i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}f(a+\epsilon e^{i\theta})d\theta = -i\pi f(a)$$

よって主値積分は $R\to\infty,\ \epsilon\to 0$ で

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(z)}{z-a}dz = i\pi f(a) + 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(\frac{f}{z-a}, z_i)$$

として求められます。
　単純な例として $a=0$、$f(x)=e^{ix}$ での

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx$$

という実軸上の積分 ($x=0$ で連続でない) の主値積分は

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = i\pi$$

となります。これは、$f(a=0)=e^0=1$ と、$x=0$ を上半円で避ける実軸の経路と上半円で囲まれた経路内で e^{ix} は極を持たないので留数が 0 であることから出てきます。