直交座標での 2 階テンソル

テンソルの簡単な話として直交座標としたときの 2 階テンソルを見ていきます。ここでの直交座標は正規直交基底を使った場合のことです。
途中からアインシュタインの規約を使っています。ローマ文字の添え字は 1 から 3 の範囲です。

3 次元ユークリッド空間とします。内積はベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の成分を x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ として

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

と与えます。

出てくる基底の単語をまとめます。3 次元ユークリッド空間上の点は 3 個の実数の組によって与えられており、3 個の実数は座標軸をどう設定するかに依存し、それは基底によって表されます。基底を $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ として点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3$$

として書けます。別の基底 $\boldsymbol{e}'_i$ では

$$\boldsymbol{x} = x'_1 \boldsymbol{e}'_1 + x'_2 \boldsymbol{e}'_2 + x'_3 \boldsymbol{e}'_3 \neq (x_1, x_2, x_3)$$

となり、ベクトル成分が変更されます。

直交は内積が 0 として定義されています。基底がお互いに直交しているときは直交基底、直交し基底の大きさが 1 になっているときは正規直交基底と呼ばれます。なので、$\boldsymbol{e}_i$ が正規直交基底なら

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1 \ , \ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$$

となります。これはクロネッカーデルタ δ_{ij} ($i = j$ なら 1、$i \neq j$ なら 0) を使うと

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

と書け、正規直交関係と呼ばれます。

ここからの話は和を取る Σ 記号が大量に出てきて煩わしいので、アインシュタインの規約を使うことにします。アインシュタインの規約は、例えば内積を

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_i y_i$$

と書くことです。単純に言えば、1 つの項に同じ添え字があるときは和を取るという決まりです。例えば

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i a_j = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)a_j \ \Rightarrow\ x_i y_i a_j$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_i a_j b_j = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \ \Rightarrow\ x_i y_i a_j b_j$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(b_i - x_i) = a_1(b_1 - x_1) + a_2(b_2 - x_2) + a_3(b_3 - x_3) \ \Rightarrow\ a_i(b_i - x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\delta_{i1} = a_1\delta_{11} + a_2\delta_{21} + a_3\delta_{31} = a_1 \ \Rightarrow\ a_i\delta_{i1} = a_1$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_{ij} = a_1b_{1j} + a_2b_{2j} + a_3b_{3j} \ \Rightarrow\ a_i b_{ij}$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \ \Rightarrow\ a_{ik} b_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\delta_{k1} = a_{i1}\delta_{11} + a_{i2}\delta_{21} + a_{i3}\delta_{31} = a_{i1} \ \Rightarrow\ a_{ik}\delta_{k1} = a_{i1}$$

となります。

ここからアインシュタインの規約を使うことにし、ローマ文字の添え字は 1 から 3 とします。

基底 $\boldsymbol{e}_i$ と別の基底 $\boldsymbol{e}'_i$ があるとします。それぞれがユークリッド空間の基底なのでお互いに

$$\boldsymbol{e}'_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j\ ,\ \boldsymbol{e}_i = B_{ij}\boldsymbol{e}'_j \quad (\boldsymbol{e}'_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j = A_{i1}\boldsymbol{e}_1 + A_{i2}\boldsymbol{e}_2 + A_{i3}\boldsymbol{e}_3)$$

として展開できます。見た目から、A_{ij}, B_{ij} を成分とする行列 A, B は逆行列の関係になっているのが分かりますが、表記に慣れるためにひねった出し方をしてみます。

$\boldsymbol{e}'_i$ は

$$\boldsymbol{e}'_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j = A_{ij}B_{jk}\boldsymbol{e}'_k$$

これの和は全部書けば

$$\begin{aligned}
A_{ij}B_{jk}\boldsymbol{e}'_k &= A_{ij}B_{j1}\boldsymbol{e}'_1 + A_{ij}B_{j2}\boldsymbol{e}'_2 + A_{ij}B_{j3}\boldsymbol{e}'_3 \\
&= A_{i1}B_{11}\boldsymbol{e}'_1 + A_{i2}B_{21}\boldsymbol{e}'_1 + A_{i3}B_{31}\boldsymbol{e}'_1 \\
&\quad + A_{i1}B_{12}\boldsymbol{e}'_2 + A_{i2}B_{22}\boldsymbol{e}'_2 + A_{i3}B_{32}\boldsymbol{e}'_2 \\
&\quad + A_{i1}B_{13}\boldsymbol{e}'_3 + A_{i2}B_{23}\boldsymbol{e}'_3 + A_{i3}B_{33}\boldsymbol{e}'_3
\end{aligned}$$

となっています。変形すると

$$\boldsymbol{e}'_i - A_{ij}B_{jk}\boldsymbol{e}'_k = 0$$

クロネッカーデルタ δ_{ij} を使って

$$\boldsymbol{e}'_i = \delta_{ik}\boldsymbol{e}'_k$$

と書けば

$$(\delta_{ik} - A_{ij}B_{jk})\boldsymbol{e}'_k = 0$$

括弧部分を D_{ik} として

$$D_{ik}\boldsymbol{e}'_k = D_{i1}\boldsymbol{e}'_1 + D_{i2}\boldsymbol{e}'_2 + D_{i3}\boldsymbol{e}'_3 = 0$$

と書くと分かりやすくなるように、これは線形独立かどうかの式です。そうすると、基底 $\boldsymbol{e}'_i$ は線形独立なので $D_{ik} = 0$ となり

$$\delta_{ik} - A_{ij}B_{jk} = 0$$
$$A_{ij}B_{jk} = \delta_{ik}$$

これから、A_{ij} を成分とする行列 A と B_{ij} を成分とする行列 B は逆行列の関係になっています (I を単位行列とすれば $AB = I$)。また、今の話は基底から別の基底への変換になっているので、基底の変換は 3×3 行列 A によって

$$\boldsymbol{e}'_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j \ , \ \boldsymbol{e}_i = (A^{-1})_{ij}\boldsymbol{e}'_j$$

と書けます。$(A^{-1})_{ij}$ は A の逆行列 A^{-1} の成分という意味です。

ここで、ユークリッド空間の双対空間を導入します。双対空間のベクトルは線形汎関数で、ユークリッド空間のベクトルを実数にします。双対空間の双対基底 $\boldsymbol{\omega}_i$ は、$\boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ と定義されます。双対空間のベクトルはユークリッド空間のベクトルを実数にするという性質は、ユークリッド空間と双対空間は別のベクトル空間であるという点を無視すれば、内積と同じです (内積は同じベクトル空間のベクトル同士から実数にする)。このことから、ユークリッド空間と双対空間のベクトルを同一視できないかと考えます。

$\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_i$ を正規直交基底とします。ユークリッド空間において基底の展開での係数 B_{ij} を使って

$$\boldsymbol{f}_k = B_{jk}\boldsymbol{e}_j$$

として、ベクトル $\boldsymbol{f}_k$ を作ります。これと $\boldsymbol{e}'_{ji}$ の内積を取ってみると

$$\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = (B_{ki}\boldsymbol{e}_k)\cdot(A_{jl}\boldsymbol{e}_l) = A_{jl}B_{ki}(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) = A_{jl}B_{ki}\delta_{kl} = A_{jk}B_{ki} = \delta_{ij}$$

となり、$\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}'_j) = \delta_{ij}$ と書けば双対基底の定義と同じになります。

$\boldsymbol{f}_i$ を基底として使えるのか確かめます。線形独立なのかを知る必要があるので、α_i を実数として

$$\alpha_1\boldsymbol{f}_1 + \alpha_2\boldsymbol{f}_2 + \alpha_3\boldsymbol{f}_3 = 0$$

と置きます。これと $\boldsymbol{e}'_i$ の内積を取ると

$$\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_1 + \alpha_3 \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = \alpha_1 \delta_{11} + \alpha_2 \delta_{21} + \alpha_3 \delta_{31} = \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_2 + \alpha_3 \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_3 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_3 + \alpha_3 \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = \alpha_3 = 0$$

となり、$\alpha_i = 0$ のとき成立しているので $\boldsymbol{f}_i$ は線形独立です。というわけで、$\boldsymbol{f}_i$ は基底として使えます。

$\boldsymbol{e}'_j$ に対して $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}'_j) = \delta_{ij}$ となる $\boldsymbol{f}_i$ が一意的に決まるのかも確かめます。$\boldsymbol{f}'_k$ が別の基底になっているとして $\boldsymbol{f}_i$ で展開して

$$\boldsymbol{f}'_i = C'_{ij} \boldsymbol{f}_j$$

としたとき

$$\boldsymbol{f}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = (C'_{ik} \boldsymbol{f}_k) \cdot \boldsymbol{e}'_j = C'_{ik} (\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{e}'_j) = C'_{ij}$$

左辺は δ_{ij} なので

$$\boldsymbol{f}'_i = C'_{ij} \boldsymbol{f}_j = \delta_{ij} \boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{f}_i$$

となり、一意的に決まるのが分かります。

このように、双対基底の定義を持つベクトルをユークリッド空間上だけで作れます (今の話はリースの表現定理を基底から見たもの)。さらに重要なのは、内積として見たとき $\boldsymbol{f}_i$ と $\boldsymbol{e}'_j$ が正規直交関係になっていることです。$\boldsymbol{e}'_j$ は正規直交基底なので、$\boldsymbol{f}_1$ は $\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ の平面に直交し、他の場合も同様です。つまり、$\boldsymbol{f}_i$ は $\boldsymbol{e}'_i$ と同じ方向で、大きさも同じです。このため、$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{e}'_i$ とできて、双対基底に対応するように作った $\boldsymbol{f}_i$ は基底と同じになります ($\boldsymbol{e}'_i$ が正規直交基底でないなら区別する必要がある)。これが直交座標 (デカルト座標) を使う分野では双対空間なんてものが出てこない理由で、基底と双対基底が同一視できてしまうために、ユークリッド空間とその双対空間でのベクトルに区別をつける意味がなくなります。

ここから基底と言っているときは正規直交基底とし、今の話のようにユークリッド空間と双対空間のベクトルを同一視します。

ユークリッド空間でのベクトル $\boldsymbol{x}$ を変換する線形演算子を L として、$L(\boldsymbol{x})$ と表記します。線形性は

$$L(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{y}) \ , \ L(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha L(\boldsymbol{x})$$

と与えられています。α は実数です。ここで線形性を拡張します。線形性は 1 つのベクトルに対してですが、これを 2 つにします。つまり、T は 2 つのベクトルを変換するとし、それぞれが線形性を持つとして

$$T(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ , \ T(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + T(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

これらを満たすことを双線形性 (bilinear) と言い、T は双線形形式 (bilinear form) と呼ばれます。そして、双線形形式が 2 つのベクトルから実数を作るとき 2 階テンソル (second rank tensor) と呼ばれます。

例えば、ベクトル積は、ベクトル積を表す関数を h として

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$$

とすれば

$$h(\alpha\boldsymbol{x}, y) = (\alpha\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \alpha h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ , \ h(\boldsymbol{x}, \alpha y) = \boldsymbol{x} \times (\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \alpha h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$h(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

となっているので、双線形性を持っているのが分かります。内積も同様に、内積を表す関数を h とすれば

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

$$h(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \alpha h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ , \ h(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \alpha h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$h(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

となっているので、双線形性を持ちます。内積は 2 つのベクトルから実数にしているので 2 階テンソルです。

次に 2 つのベクトルから 2 階テンソルを作る記号を導入します。ベクトルの組 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に作用して実数とする関数がベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ から作れるとします。その関数を $F = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ と表記することにして、$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は実数になると定義し、その実数は内積から

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{y})$$

と定義します。$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{w}(\boldsymbol{y})$ は線形汎関数の意味です。「$\otimes$」をテンソル積 (tensor product) と呼び、2 つのベクトルを実数にしているので $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ は 2 階テンソルです。双線形性は

$$F(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{w} \cdot \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{y}) = \alpha F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{z}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

として確かめられます (残りの関係も同様)。テンソル積の計算規則は

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}$$

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$$

$$\alpha(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = (\alpha\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \otimes (\alpha\boldsymbol{w})$$

となっています。1 番目は定義からそのままです。2 番目は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}))(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{y})&=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

3 番目も同様です。4 番目は

$$\alpha(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y})=(\alpha\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y})=((\alpha\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$\alpha\boldsymbol{w}$ でも同様です。

基底とそれに対応する成分を求めます。基底を使うと、内積の性質

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}=(v_i\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{x}=v_i(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{x})$$

から

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y})=(v_i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{x})(w_j\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{y})=v_iw_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{y})=v_iw_j(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

と書けるので

$$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}=(v_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(w_j\boldsymbol{e}_j)=v_iw_j(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) \tag{1}$$

これは成分を $v_iw_j\ (v_1w_1,\ v_1w_2,\dots)$ とし、$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ による $3\times3=9$ 個を基底として展開している形に見えます。実際に、2 階テンソルによるベクトル空間の基底であることを示します。

2 階テンソルのベクトル空間は、2 階テンソルの和 T_1+T_2 とスカラー倍 αT を

$$\begin{aligned}&(T_1+T_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=T_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+T_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\&(\alpha T)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

と定義し、$O(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ となる 2 階テンソル O をゼロベクトルとして加えれば作れます。

線形独立であることを確かめます。$F_{ij}=\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ としたとき、添え字が 2 つあるので線形独立であるかは

$$\alpha_{ij}F_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha_{11}F_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\alpha_{12}F_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\alpha_{13}F_{13}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cdots+\alpha_{33}F_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$$

としたときの α_{ij} が 0 かどうかです。これは

$$F_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{e}_i\cdot x_k\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j\cdot y_l\boldsymbol{e}_l)=x_ky_l(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_l)=x_ky_l\delta_{ik}\delta_{jl}=x_iy_j$$

このため、任意の x_i, y_j に対して

$$\alpha_{ij}F_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha_{ij}x_iy_j = 0$$

となるのは $\alpha_{ij}=0$ のときです。よって、F_{ij} は線形独立です。
　そして、$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は双線形性と (1) から

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = T(x_i\boldsymbol{e}_i, y_j\boldsymbol{e}_j) = x_iy_jT(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

となっているので

$$T = T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) = t_{ij}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j) \tag{2}$$

となり、線形独立な $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ による線形結合の形にできます。よって、9 個の $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ は 2 階テンソルの基底で、そのときのテンソルの成分は $T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=t_{ij}$ で与えられます。(1) からはテンソル積の成分が v_iw_j になっていることも言っており

$$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} \ \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & v_1w_3 \\ v_2w_1 & v_2w_2 & v_3w_3 \\ v_3w_1 & v_3w_2 & v_3w_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v} \ \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1v_1 & w_1v_2 & w_1v_3 \\ w_2v_1 & w_2v_2 & w_2v_3 \\ w_3v_1 & w_3v_2 & w_3v_3 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$$

として、成分は 3×3 行列で書けます。これは 3×1 行列 $\boldsymbol{v}$ と 1×3 行列 $\boldsymbol{w}$ のクロネッカー積と同じです。
　基底の変換に対して成分がどう変換されるのかを求めます。基底の変換を

$$\boldsymbol{e}'_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

とします。基底の内積から

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j = (A_{ik}\boldsymbol{e}_k)\cdot(A_{jl}\boldsymbol{e}_l) = A_{ik}A_{jl}(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_l) = A_{ik}A_{jl}\delta_{kl} = A_{ik}A_{jk}$$

行列計算と見たとき、A^t を A の転置とすれば

$$A_{ik}A_{jk} = A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} + A_{i3}A_{j3} = A_{i1}(A^t)_{1j} + A_{i2}(A^t)_{2j} + A_{i3}(A^t)_{3j} = (AA^t)_{ij}$$

となっているので

$$A_{ik}(A^t)_{kj} = \delta_{ij}$$

このように、正規直交基底での変換行列は直交行列です。
　ベクトルの成分は

$$
\boldsymbol{x}' = x'_i \boldsymbol{e}'_i = x'_i A_{ij} \boldsymbol{e}_j = x_j \boldsymbol{e}_j
$$

から

$$
\begin{aligned}
x_j &= x'_i A_{ij} \\
x_j (A^{-1})_{jk} &= x'_i A_{ij} (A^{-1})_{jk} \\
&= x'_i \delta_{ik} \\
&= x'_k
\end{aligned}
$$

となり、A は直交行列なので

$$
x'_i = (A^{-1})_{ji} x_j = (A^t)_{ji} x_j = A_{ij} x_j
$$

と変換されます。
　同様のことを 2 階テンソルでも行います。2 階テンソルの基底はユークリッド空間の基底のテンソル積から作れるので、異なる基底 $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_i$ に対して

$$
T = t_{ij} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = t'_{ij} (\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j)
$$

なので

$$
t'_{ij} (\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j) = t'_{ij} (A_{ik} \boldsymbol{e}_k \otimes A_{jl} \boldsymbol{e}_l) = t'_{ij} A_{ik} A_{jl} (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)
$$

これから

$$
\begin{aligned}
t_{kl} &= t'_{ij} A_{ik} A_{jl} \\
(A^{-1})_{km} (A^{-1})_{ln} t_{kl} &= t'_{ij} A_{ik} (A^{-1})_{km} A_{jl} (A^{-1})_{ln} \\
A_{mk} A_{nl} t_{kl} &= t'_{ij} \delta_{im} \delta_{jn} \\
&= t'_{mn}
\end{aligned}
$$

となり、2 階テンソルの成分は

$$
t'_{mn} = A_{mk} A_{nl} t_{kl}
$$

と変換されるのが分かります。テンソル成分の変換なので、この変換規則に従う量を 2 階テンソルと定義することもできて、実用上はこちらの方が便利です。例えば、相対論では変換規則からテンソルを定義することが多いです。

最後に、線形演算子との関係を見ます。ベクトルからベクトルへの線形演算子を L として

$$\boldsymbol{y}' = L(\boldsymbol{y})$$

これによる内積は $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}\cdot L(\boldsymbol{y})$ なので、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を変数にする 2 階テンソルになっているとします。そうすると

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}\cdot L(\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が基底であるなら、(2) から

$$T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = t_{ij} = \boldsymbol{e}_i\cdot L(\boldsymbol{e}_j)$$

最右辺は線形演算子の表現行列です（「線形演算子と行列」参照）。2 階テンソルの成分と線形演算子の表現行列が対応するために（2 階テンソルのベクトル空間と線形演算子のベクトル空間が同型になっている）、線形演算子は 2 階テンソルとして扱われます。

もっと直接的に表現行列が出てくることを見ておきます。2 階テンソルを

$$T = t_{ij}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)$$

とします。2 階テンソルは 2 つのベクトルに作用して実数にしますが、線形演算子と見るなら 1 つのベクトルに作用するので

$$T(\boldsymbol{v}) = t_{ij}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{v})$$

このときのテンソル積は $(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\ ,\boldsymbol{v})$ に作用していると定義して

$$T(\boldsymbol{v}) = t_{ij}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{v}) = t_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{v}) = t_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j(v_k\boldsymbol{e}_k) = t_{ij}v_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{e}_k) = t_{ij}v_k\boldsymbol{e}_i\delta_{jk} = t_{ij}v_j\boldsymbol{e}_i$$

これを

$$w_i = t_{ij}v_j$$

とすれば

$$T(\boldsymbol{v}) = w_i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{w}$$

となるので、線形演算子の表現行列 t_{ij} による変換の形になっています。

テンソル積 $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$ をベクトルからベクトルへの線形演算子として見るときは

$$(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v})$$

となっており、これの線形性は

$$(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})(\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} \cdot (\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w})) = \alpha \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v}) + \beta \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{w}) = \alpha(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}) + \beta(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})(\boldsymbol{w})$$

として確かめられます。