ベッセル方程式

フロベニウスの方法を使う例としてベッセル方程式を扱います。ベッセル関数は求めているだけです。
ガンマ関数が出てきますが、あまり気にしなくて平気です。

ベッセル (Bessel) 方程式、もしくはベッセル微分方程式と呼ばれる 2 階微分方程式は

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x\frac{dy(x)}{dx}+(x^2-\alpha^2)y(x)=0 \tag{1}$$

α は負でない実数です。もしくは、x で割って

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx})+(x-\frac{\alpha^2}{x})y(x)=0 \tag{2}$$

と書かれます。ベッセル方程式は

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\frac{1}{x^2}(x^2-\alpha^2)y(x)=0$$

から分かるように、$x=0$ は確定特異点です。なので、フロベニウスの方法を使います。
解をフロベニウス級数として

$$y(x)=x^s\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

微分は

$$x\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)c_nx^{n+s}\ ,\ x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)c_nx^{n+s}$$

ベッセル方程式 (1) に入れれば

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)c_nx^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)c_nx^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+s+2}-\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+s}=0 \tag{3}$$

α^2 の項以外はまとめると

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}((n+s)(n+s-1)c_n+(n+s)c_n-\alpha^2c_n)x^{n+s}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}((n+s)^2-\alpha^2)c_nx^{n+s}\\
&=(s^2-\alpha^2)c_0x^s+((1+s)^2-\alpha^2)c_1x^{1+s}+\sum_{n=2}^{\infty}((n+s)^2-\alpha^2)c_nx^{n+s}\\
&=(s^2-\alpha^2)c_0x^s+((1+s)^2-\alpha^2)c_1x^{1+s}+\sum_{n=0}^{\infty}((n+s+2)^2-\alpha^2)c_{n+2}x^{n+s+2}
\end{aligned}$$

よって、(3) は

$$\begin{aligned}
0 &= (s^2-\alpha^2)c_0x^s + ((1+s)^2-\alpha^2)c_1x^{1+s} + \sum_{n=0}^{\infty}((n+s+2)^2-\alpha^2)c_{n+2}x^{n+s+2} + \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+s+2} \\
&= (s^2-\alpha^2)c_0x^s + ((1+s)^2-\alpha^2)c_1x^{1+s} + \sum_{n=0}^{\infty}((n+s+2)^2-\alpha^2)c_{n+2}+c_n)x^{n+s+2}
\end{aligned}$$

$x^m \neq 0$ に対して全ての項が 0 になる必要があるので、第 1 項、第 2 項からは

$$(s^2-\alpha^2)c_0 = 0\ ,\ ((1+s)^2-\alpha^2)c_1 = 0$$

c_0 の式は決定方程式で、$c_0 \neq 0$ とすれば $s^2=\alpha^2$ となるので、$s_1=\alpha,\ s_2=-\alpha$ です。第 3 項からは

$$\begin{aligned}
((n+s+2)^2-\alpha^2)c_{n+2}+c_n = 0 \\
c_{n+2} = -\frac{1}{(n+s+2)^2-\alpha^2}c_n
\end{aligned}\tag{4}$$

として、漸化式が出てきます。

　α がどうなっているかは置いといて、とりあえず解を求めます。$s=s_1=\alpha$ のとき、c_1 の式と漸化式は

$$\begin{aligned}
&(2\alpha+1)c_1 = 0 \\
&c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2+2\alpha(n+2)}c_n = -\frac{1}{(n+2)(2\alpha+n+2)}c_n
\end{aligned}\tag{5}$$

$c_1=0$ となり、漸化式から $c_1=c_3=c_5=\cdots=0$ です。c_2 からは

$$\begin{aligned}
&c_2 = -\frac{1}{2(2\alpha+2)}c_0 \\
&c_4 = -\frac{1}{4(2\alpha+4)}c_2 = \frac{1}{4\times2}\frac{1}{(2\alpha+4)(2\alpha+2)}c_0 \\
&c_6 = -\frac{1}{6(2\alpha+6)}c_4 = -\frac{1}{6\times4\times2}\frac{1}{(2\alpha+6)(2\alpha+4)(2\alpha+2)}c_0
\end{aligned}$$

と続いているので

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= (-1)^n\frac{1}{(2n)!!}\frac{1}{(2\alpha+2n)(2\alpha+2n-2)\cdots(2\alpha+2)}c_0 \\
&= (-1)^n\frac{1}{2^nn!}\frac{1}{2^n(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)}c_0 \qquad ((2n!!)=2^nn!) \\
&= (-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)}c_0
\end{aligned}$$

よって、$s=\alpha$ での解は

$$y_1(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^\alpha (1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n} n!} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)} x^{2n})$$
$$= c_0 x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n} n!} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)} (\frac{x}{2})^{2n}$$

$n=0$ のときは分母が α から始まることから 1 としています。ratio test は、$n \to \infty$ で

$$|\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}}| = |\frac{1}{(n+2)^2 + 2\alpha(n+2)}| \ \Rightarrow \ 0$$

となるので、任意の x で収束します。

α を整数としていないために階乗で書けないですが、ガンマ関数を使えば書けます。ガンマ関数は、p を実数としたとき

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty dt \ t^{p-1} e^{-t} \ , \ \Gamma(1) = 1 \quad (p > 0)$$

と定義されており、$p > 1$ に対して

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

となっています。この性質から

$$\Gamma(\alpha+n+1) = (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n-1+1) = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)$$

と続いていくので

$$\Gamma(\alpha+n+1) = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$$
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)\cdots 2 \times \Gamma(2) = n!\Gamma(1+1) = n!\Gamma(1) = n!$$

これらによって

$$y_1(x) = c_0 x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n+1)} (\frac{x}{2})^{2n}$$

c_0 を

$$c_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$$

と選ぶことで

$$y_1(x) = J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n+1)} (\frac{x}{2})^{2n+\alpha} \tag{6}$$

J_α を α 次の第一種ベッセル関数 (Bessel function of the first kind of integer order α) と言います。

これでベッセル方程式の解が 1 つ求まりました。一般解にするにはもう 1 つの線形独立な解が必要で、フロベニウスの方法で線形独立な解が s_1, s_2 から求まるのは、$s_1 - s_2$ が整数にならないときです。

- $s_1 - s_2 = 2\alpha$ が整数でない場合
  $s_2 = -\alpha$ での漸化式 (4) は

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2 - 2\alpha(n+2)} c_n = -\frac{1}{(n+2)(n+2-2\alpha)} c_n = -\frac{1}{(n+2)(-2\alpha+n+2)} c_n$$

見てわかるように、(5) から α の符号が反転するだけなので

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n} n!} \frac{1}{(-\alpha+n)(-\alpha+n-1)\cdots(-\alpha+1)} c_0$$

となり、このときの解は

$$y_2(x) = c_0 x^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{(-\alpha+n)(-\alpha+n-1)\cdots(-\alpha+1)} (\frac{x}{2})^{2n} \tag{7}$$

収束性は y_1 と同じで、任意の x で収束します。これもガンマ関数を使えば

$$\Gamma(-\alpha+n+1) = (-\alpha+n)\Gamma(-\alpha+n) = (-\alpha+n)(-\alpha+n-1)\cdots(-\alpha+1)\Gamma(-\alpha+1)$$

と書けるので、c_0 を

$$c_0 = \frac{1}{2^{-\alpha}\Gamma(-\alpha+1)}$$

と選ぶことで

$$y_2(x) = J_{-\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\alpha+n+1)} (\frac{x}{2})^{2n-\alpha} \tag{8}$$

よって、$s_1 - s_2 = 2\alpha$ が整数でないときのベッセル方程式の一般解は、第一種ベッセル関数によって

$$y(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 J_{-\alpha}(x)$$

となります。C_1, C_2 は定数です。

次に $s_1-s_2=2\alpha$ が負でない整数のときを見ていきます。このときの α は整数か半整数です。s_1-s_2 が整数になっていると、一般的にはフロベニウスの方法から 2 つの線形独立な解が求まりません。しかし、α が半整数のときは s_1, s_2 から 2 つの線形独立な解が求まります。これを先に見ます。

- α が半整数の場合
  半整数なので

$$\alpha=\frac{1}{2}(2j+1)\qquad(j=0,1,2,\ldots)$$

まず、$j=0$ として、$\alpha=1/2$ とします。$s=s_1$ の解は (6) ですが、一応求めておきます。$s=s_1=1/2$ では、c_1 の式は

$$((1+s)^2-s^2)c_1=(1+2s)c_1=2c_1=0\ \Rightarrow\ c_1=c_3=\cdots=0$$

漸化式は

$$\begin{aligned}c_n=&-((n+2+s)^2-s^2)c_{n+2}\\=&-((n+2)^2+2s(n+2))c_{n+2}\\=&-(n+2)(n+3)c_{n+2}\end{aligned}\tag{9}$$

これは (6) で $\alpha=1/2$ にしたものなので

$$y_1(x)=J_{1/2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+3/2)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha}$$

ガンマ関数は $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ なので

$$\begin{aligned}&\Gamma(n+1)=n!\\&\Gamma(n+\frac{3}{2})=\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)=(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})=(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\end{aligned}$$

これを入れれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+3/2)}(\frac{x}{2})^{2n}&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{n!(n+1/2)(n-1/2)\cdots1/2}x^{2n}\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^{n-1}n!}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)\cdots1}x^{2n}\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^{n-1}n!}\frac{1}{(2n+1)!!}x^{2n}\end{aligned}$$

二重階乗は

$$(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{2n(2n-2)\cdots2}=\frac{(2n+1)!}{(2n)!!}=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

として

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+3/2)}(\frac{x}{2})^{2n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^{n-1}n!}\frac{2^nn!}{(2n+1)!}x^{2n}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n}$$

よって

$$\begin{aligned}y_1(x)=J_{1/2}(x)&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

これは sin の展開なので

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

と書けます。

また、第一種ベッセル関数との対応がすぐには分からなくなりますが、漸化式まで戻ればもっと簡単に求まります。漸化式 (9) は

$$c_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)(n+3)}c_n$$

これから

$$c_2=-\frac{1}{3!}c_0\ ,\ c_4=-\frac{1}{5\times 4}c_2=\frac{1}{5!}c_0\ ,\ c_6=-\frac{1}{7\times 6}c_4=-\frac{1}{7!}c_0$$

と続くので

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}c_0\qquad(n=1,2,\ldots)$$

これによって

$$y_1(x)=c_0x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=J_{1/2}(x)$$
$$c_0=\frac{1}{2^{1/2}\Gamma(3/2)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\qquad(\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2})$$

となって、同じになります。

$s_2=-1/2$ では、c_1 の式は

$$((1+s_2)^2-s_2^2)c_1=(1+2s_2)c_1=0\times c_1=0$$

となり、$c_1=0$ ではなくなります。漸化式は

$$\begin{aligned}c_n=&-((n+2)^2+2s(n+2))c_{n+2}\\=&-((n+2)^2-(n+2))c_{n+2}\\=&-(n+2)(n+1)c_{n+2}\end{aligned}$$

となり、s_2 でも漸化式が成立しています。しかし、$c_1=0$ ではないので、偶数のべき乗だけではなくなります。

このときの漸化式は

$$c_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)(n+1)}c_n$$

なので、偶数のときは

$$c_2=-\frac{1}{2!}c_0\ ,\ c_4=-\frac{1}{4\times 3}c_2=\frac{1}{4!}c_0\ ,\ c_6=-\frac{1}{6\times 5}c_4=-\frac{1}{6!}c_0$$

から

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}c_0$$

もしくは、(7) から

$$\begin{aligned}&c_0x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!}\frac{1}{(-\alpha+n)(-\alpha+n-1)\cdots(-\alpha+1)}x^{2n}\\&=c_0x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!}\frac{1}{(n-1/2)(n-1/2-1)\cdots(-1/2+1)}x^{2n}\\&=c_0x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!}\frac{1}{(n-1/2)(n-3/2)\cdots 1/2}x^{2n}\\&=c_0x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!}\frac{1}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}x^{2n}\\&=c_0x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!}\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n}\\&=c_0x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!}\frac{2^nn!}{(2n)!}x^{2n}\\&=c_0x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned}$$

と求まります。
　奇数のときは

$$c_3 = -\frac{1}{3\times 2}c_1\ ,\ c_5 = -\frac{1}{5\times 4}c_3 = \frac{1}{5!}c_1\ ,\quad c_7 = -\frac{1}{7\times 6}c_5 = -\frac{1}{7!}c_1$$

なので

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}c_1$$

よって、偶数と奇数の場合を足すことで解は

$$y_2(x) = c_0x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + c_1x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

和は cos と sin の展開になっているので

$$y_2(x) = c_0x^{-1/2}\cos x + c_1x^{-1/2}\sin x$$

sin は y_1 に含まれているので、$c_1 = 0$ にして、c_0 は同じものを使うことで

$$y_2(x) = J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

よって、sin と cos は線形独立なので、$\alpha = 1/2$ での一般解は

$$y(x) = C_1J_{1/2} + C_2J_{-1/2} \tag{10}$$

となり、$s_1 - s_2 = 1$ のときも第一種ベッセル関数がそのまま使えます。これは α が半整数のときの一般的な結果になります。
　実際に、漸化式は $s = -\alpha = -(2j+1)/2$ のとき

$$\begin{aligned}c_n =& -((n+s+2)^2 - s^2)c_{n+2}\\ =& -(n+2)(n+2+2s)c_{n+2}\\ =& -(n+2)(n-2j+1)c_{n+2}\end{aligned}$$

$n = 2j-1$ で漸化式が成立しなくなりますが、$c_1 = 0$ なら n は偶数しか出てこないので成立します。そして、c_1 は

$$(1+2s)c_1 = -2jc_1 = 0$$

なので、$j = 0$ 以外では $c_1 = 0$ です。というわけで、s_2 からは (7) が出てくるので、α が半整数のときの一般解は (10) と同じように第一種ベッセル関数で書けます。

まとめると、α が 0 以上の整数でないときの一般解は

$$y(x) = C_1 J_\alpha + C_2 J_{-\alpha}$$

となります。後は α が負でない整数のときを求めればいいです。このときも解の 1 つは第一種ベッセル関数ですが、フロベニウスの方法からもう 1 つの線形独立な解が求まらないので、別の方法で解を見つけます。

- α が負でない整数の場合

  N が負でない整数のとき、J_N, J_{-N} が線形独立な解にならないことは簡単に分かります。これらは

$$J_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(N+n+1)} (\frac{x}{2})^{2n+N}$$

$$J_{-N}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(-N+n+1)} (\frac{x}{2})^{2n-N}$$

J_{-N} でのガンマ関数は

$$\Gamma(-N+n+1) = (-N+n)!$$

なので、$n < N$ では階乗が存在しません (ガンマ関数はこのとき無限大になる)。このため、n は N からになり

$$\begin{aligned}
J_{-N}(x) =& \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(-N+n+1)} (\frac{x}{2})^{2n-N} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+N} \frac{1}{\Gamma(n+N+1)\Gamma(-N+n+N+1)} (\frac{x}{2})^{2n+2N-N} \\
=& (-1)^N \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(N+n+1)\Gamma(n+1)} (\frac{x}{2})^{2n+N} \\
=& (-1)^N J_N(x)
\end{aligned}$$

よって、J_N と J_{-N} は線形独立になっていません。

第一種ベッセル関数と線形独立な解として

$$Z_\alpha(x) = AJ_\alpha(x) + BJ_{-\alpha}(x)$$

という形を仮定します。A, B は定数で、線形独立になるように A, B を決めます。これが $J_\alpha, J_{-\alpha}$ と線形独立であるためには、ロンスキアンが

$$W_1 = Z_\alpha \frac{dJ_\alpha}{dx} - J_\alpha \frac{dZ_\alpha}{dx} \neq 0$$

$$W_2 = Z_\alpha \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} - J_{-\alpha} \frac{dZ_\alpha}{dx} \neq 0$$

となる必要があります。W_1 は

$$
\begin{aligned}
W_1 = Z_\alpha \frac{dJ_\alpha}{dx} - J_\alpha \frac{dZ_\alpha}{dx} &= (AJ_\alpha + BJ_{-\alpha}) \frac{dJ_\alpha}{dx} - J_\alpha \frac{d}{dx}(AJ_\alpha + BJ_{-\alpha}) \\
&= AJ_\alpha \frac{dJ_\alpha}{dx} + BJ_{-\alpha} \frac{dJ_\alpha}{dx} - AJ_\alpha \frac{dJ_\alpha}{dx} - BJ_\alpha \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} \\
&= B(J_{-\alpha} \frac{dJ_\alpha}{dx} - J_\alpha \frac{dJ_{-\alpha}}{dx})
\end{aligned}
$$

W_2 は

$$
\begin{aligned}
W_2 = Z_\alpha \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} - J_{-\alpha} \frac{dZ_\alpha}{dx} &= (AJ_\alpha + BJ_{-\alpha}) \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} - J_{-\alpha} \frac{d}{dx}(AJ_\alpha + BJ_{-\alpha}) \\
&= AJ_\alpha \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} + BJ_{-\alpha} \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} - AJ_{-\alpha} \frac{dJ_\alpha}{dx} - BJ_{-\alpha} \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} \\
&= -A(J_{-\alpha} \frac{dJ_\alpha}{dx} - J_\alpha \frac{dJ_{-\alpha}}{dx})
\end{aligned}
$$

括弧部分は

$$
x(J_{-\alpha} \frac{dJ_\alpha}{dx} - J_\alpha \frac{dJ_{-\alpha}}{dx}) = const \tag{11}
$$

となることを利用して求めます (下の補足参照)。

左辺で x の依存性がなくなることから、$x \to 0$ での J_α を使います。このときは、$n = 0$ からの寄与が一番大きいので

$$
\begin{aligned}
&J_\alpha \simeq \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(\alpha+1)} (\frac{x}{2})^\alpha = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} (\frac{x}{2})^\alpha \\
&\frac{dJ_\alpha}{dx} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n+1)} (\frac{x}{2})^{2n+\alpha-1} \simeq \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\frac{x}{2})^{\alpha-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\frac{x}{2})^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

$J_{-\alpha}$ でも同じなので、α の符号を反転させて

$$
J_{-\alpha} \simeq \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)} (\frac{x}{2})^{-\alpha} \ , \ \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} \simeq \frac{1}{2} \frac{-\alpha}{\Gamma(-\alpha+1)} (\frac{x}{2})^{-\alpha-1}
$$

これらから、$x \to 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
J_{-\alpha} \frac{dJ_\alpha}{dx} - J_\alpha \frac{dJ_{-\alpha}}{dx} &\simeq \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha+1)} (\frac{x}{2})^{-1} - \frac{1}{2} \frac{-1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha+1)} (\frac{x}{2})^{-1} \\
&= \frac{2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha+1)} \frac{1}{x} \\
&= \frac{2}{x} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}
\end{aligned}
$$

となり、x をかければ定数になります。ガンマ関数の相反公式

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \tag{12}$$

を使っています。
　というわけで

$$W_1 = B\frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi x}\ ,\ W_2 = -A\frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi x}$$

α を整数とすると、sin のために $W_1, W_2 = 0$ になり、線形独立でなくなります。なので、sin を消すために

$$A = \frac{A'(\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}\ ,\ B = \frac{B'(\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}$$

として

$$Z_\alpha(x) = \frac{A'(\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}J_\alpha(x) + \frac{B'(\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}J_{-\alpha}(x)$$

これに対して α を整数とすると分母が 0 になってしまうので、分子が 0 になるとして

$$\lim_{\alpha\to N}(A'(\alpha)J_\alpha(x) + B'(\alpha)J_{-\alpha}(x)) = A'(N)J_N(x) + B'(N)J_{-N}(x) = 0$$

このように設定することで

$$A'J_N + B'J_{-N} = A'J_N + (-1)^N B'J_N = 0$$

このため、$A' = -(-1)^N B'$ となります。
　ここで、$B' = -1$ に選ぶことにします。そうすると、$A'(N) = (-1)^N$ になり、$\cos\pi N = (-1)^N$ なので、α の極限を取る前の形として

$$Y_\alpha(x) = \frac{1}{\sin(\pi\alpha)}(A'(\alpha)J_\alpha(x) + B'(\alpha)J_{-\alpha}(x)) = \frac{\cos(\pi\alpha)J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)}$$

これを第二種ベッセル関数 (Bessel function of the second kind) やノイマン関数 (Neumann function) と呼びます。
　欲しいのは $\alpha = N$ の解なので、$\alpha \to N$ でどうなるか求めます。ロピタルの定理（「$'$」は x の微分）

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

を使うと

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to N} Y_\alpha(x) &= \lim_{\alpha\to N} \frac{\cos(\pi\alpha)J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)} \\
&= \lim_{\alpha\to N} \frac{1}{\pi\cos(\pi\alpha)}(\pi\sin(\pi\alpha)J_\alpha(x) + \cos(\pi\alpha)\frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha} - \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha}) \\
&= \frac{1}{\pi\cos(\pi N)}(\pi\sin(\pi N)J_N(x) + \cos(\pi N)\frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha} - \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha})\big|_{\alpha=N} \\
&= \frac{1}{\pi}(-1)^N\big((-1)^N\frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha} - \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha})\big|_{\alpha=N} \\
&= \frac{1}{\pi}(\frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha} - (-1)^N\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha})\big|_{\alpha=N}
\end{aligned}$$

ガンマ関数の微分は微分の規則に従うので、J_α の α 微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}((\frac{x}{2})^{2n+\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}(-\frac{\psi(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha}\log\frac{x}{2}) \quad (\psi(z) = \Gamma^{-1}(z)\frac{d\Gamma(z)}{dz}) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}\frac{\psi(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha}\log\frac{x}{2} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}\frac{\psi(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha} + J_\alpha\log\frac{x}{2} \\
&\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}\frac{\psi(N+n+1)}{\Gamma(N+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+N} + J_N\log\frac{x}{2} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(N+n)!}\psi(N+n+1)(\frac{x}{2})^{2n+N} + J_N\log\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

矢印で N の極限にしています。$J_{-\alpha}$ でも同様に

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha} =& \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{1}{\Gamma(-\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n-\alpha})\\
=& \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}(\frac{1}{\Gamma(-\alpha+n+1)}\psi(-\alpha+n+1)(\frac{x}{2})^{2n-\alpha}-\frac{1}{\Gamma(-\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n-\alpha}\log\frac{x}{2})\\
=& \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{\psi(-\alpha+n+1)}{\Gamma(-\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n-\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{1}{\Gamma(-\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n-\alpha}\log\frac{x}{2}\\
=& \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{\psi(-\alpha+n+1)}{\Gamma(-\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n-\alpha}-J_{-\alpha}\log\frac{x}{2}\\
\Rightarrow& \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{\psi(-N+n+1)}{\Gamma(-N+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n-N}-J_{-N}\log\frac{x}{2}\\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\psi(-N+n+1)}{\Gamma(-N+n+1)}(\frac{x}{2})^{2n-N}-(-1)^NJ_N\log\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

第 1 項は $n=0,1,\dots,N-1$ では階乗が与えられないように見えます。しかし、ガンマ関数の相反公式 (12) を使えば計算できます。(12) の対数を取って、微分すると

$$
\begin{aligned}
\log\Gamma(z)+\log\Gamma(1-z) =& \log\pi-\log\sin(\pi z)\\
\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)} =& -\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \qquad (\Gamma'(z)=\frac{d\Gamma(z)}{dz})\\
\psi(z)-\psi(1-z) =& -\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}
\end{aligned}
$$

これらから

$$
\begin{aligned}
\frac{\psi(-\alpha+n+1)}{\Gamma(-\alpha+n+1)}=\frac{\psi(1-(\alpha-n))}{\Gamma(1-(\alpha-n))} =& \frac{\sin(\pi(\alpha-n))}{\pi}\Gamma(\alpha-n)(\psi(\alpha-n)+\pi\frac{\cos(\pi(\alpha-n)}{\sin(\pi(\alpha-n)})\\
=& \frac{\sin(\pi(\alpha-n)}{\pi}\Gamma(\alpha-n)\psi(\alpha-n)+\Gamma(\alpha-n)\cos(\pi(\alpha-n)\\
\Rightarrow& \Gamma(N-n)\cos(\pi(N-n)\\
=& (-1)^{N-n}(N-n-1)!
\end{aligned}
$$

これを使うことで

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{\psi(1-N+n)}{\Gamma(1-N+n)}(\frac{x}{2})^{2n-N}\\
&\quad=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n(-1)^{N-n}}{n!}(N-n-1)!(\frac{x}{2})^{2n-N}\\
&\qquad+\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{1}{\Gamma(-N+n+1)}\psi(-N+n+1)(\frac{x}{2})^{2n-N}\\
&\quad=(-1)^N\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(N-n-1)!}{n!}(\frac{x}{2})^{2n-N}\\
&\qquad+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+N}\frac{1}{\Gamma(n+N+1)}\frac{1}{\Gamma(-N+n+N+1)}\psi(-N+n+N+1)(\frac{x}{2})^{2n+2N-N}\\
&\quad=(-1)^N\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(N-n-1)!}{n!}(\frac{x}{2})^{2n-N}+(-1)^N\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(N+n)!}\psi(n+1)(\frac{x}{2})^{2n+N}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
Y_N(x)&=\frac{1}{\pi}(\frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha}-(-1)^N\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha})\Big|_{\alpha=N}\\
&=\frac{1}{\pi}\Big(J_N\log\frac{x}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(N+n)!}\psi(N+n+1)(\frac{x}{2})^{2n+N}\\
&\qquad-\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(N-n-1)!}{n!}(\frac{x}{2})^{2n-N}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(N+n)!}\psi(n+1)(\frac{x}{2})^{2n+N}-J_N\log\frac{x}{2}\Big)\Big)\\
&=\frac{2}{\pi}J_N\log\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(N-n-1)!}{n!}(\frac{x}{2})^{2n-N}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(N+n)!}(\psi(N+n+1)+\psi(n+1))(\frac{x}{2})^{2n+N}
\end{aligned}$$

これが整数のときの第二種ベッセル関数です。第 1 項はフロベニウスの方法でのもう 1 つの線形独立な解に対数が出てくることに対応します。

よって、α が負でない整数 N のときのベッセル方程式の一般解は

$$y(x)=C_1J_N(x)+C_2Y_N(x)$$

となります。また、第一種と第二種ベッセル関数から

$$H_\alpha^{(1)}(x)=J_\alpha(x)+iY_\alpha(x)\ ,\ H_\alpha^{(2)}(x)=J_\alpha(x)-iY_\alpha(x)$$

と与えたものを第三種ベッセル関数 (Bessel function of the third kind) やハンケル関数 (Hankel function) と言います。

・補足

ベッセル方程式の 2 つの解を y_1, y_2 として、(2) は

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy_1}{dx})+(x-\frac{\alpha^2}{x})y_1=0\ ,\ \ \frac{d}{dx}(x\frac{dy_2}{dx})+(x-\frac{\alpha^2}{x})y_2=0$$

これらを

$$y_2\frac{d}{dx}(x\frac{dy_1}{dx})+y_2(x-\frac{\alpha^2}{x})y_1=0\ ,\ \ y_1\frac{d}{dx}(x\frac{dy_2}{dx})+y_1(x-\frac{\alpha^2}{x})y_2=0$$

とすれば

$$y_2\frac{d}{dx}(x\frac{dy_1}{dx})-y_1\frac{d}{dx}(x\frac{dy_2}{dx})=0$$

左辺は

$$\frac{d}{dx}(y_2x\frac{dy_1}{dx})-x\frac{dy_2}{dx}\frac{dy_1}{dx}-\frac{d}{dx}(y_1x\frac{dy_2}{dx})+x\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx}=\frac{d}{dx}(xy_2\frac{dy_1}{dx})-\frac{d}{dx}(xy_1\frac{dy_2}{dx})$$

なので

$$\frac{d}{dx}(xy_2\frac{dy_1}{dx}-xy_1\frac{dy_2}{dx})=0$$

$$x(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx})=C$$

C は定数です。よって、y_1, y_2 を第一種ベッセル関数とすることで (11) になります。