基礎知識

物理の本でも知っているのが当然であるように出てくることが多い数学関連のものを羅列しています。羅列なので証明はないです。

集合
写像
数列
群、環、体
和の記号
級数
偏微分
テイラー展開
ヤコビアン
クロネッカーデルタ
レヴィ・チビタ記号

- 集合

物理の本でも集合関係の記号は知ってるものとして使っていることが多いです。集合 (set) は何かの集まりのことで、何かのことを元や要素 (element) と呼びます。元 x が X に属する（belong）というのを記号にしたのが $x \in X$ です。これで集合 X に含まれる元 x という意味です。もしくは、$x_1, x_2, \ldots$ が元なら $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ とも書きます。

どういう性質を持った集合なのかをはっきりさせるために、例えば

$$X = \{x|\ x\text{ は整数 }\}$$

と表記します。これは、X は整数である全ての x の集合という意味です。英語で「|」は such that が使われます。今の場合では、X is the set of all x such that x is an integer となります。他にも例えば、開区間 (a, b) にいる x に対して $\{x|\ a < x < b\}$ や閉区間 $[a, b]$ に対しては $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ と書かれます。

x が X の元でないなら $x \notin X$ と書き、元を含んでいない集合は空集合 (empty set)$\emptyset$ と呼ばれ、$\emptyset = \{\ \}$ となっています。X が空集合なら $X = \emptyset$ となります。

集合 X の各元 x が集合 Y の元でもあるとき $(x \in X,\ x \in Y)$、Y は X を含んでいることになり、このときの X は Y の部分集合 (subset) と呼ばれます。Y は X を含む (contain) というのを記号にしたのが $X \subset Y$ です。X 自身や空集合は部分集合です。

この定義で注意することは X と Y が異なっているとしていない点です。$X \subset Y$ で $X \neq Y$ では、X は Y の真部分集合 (proper subset) と呼ばれ、$X \subsetneq Y$ と書かれます。これらは例えば、$X \subset Y,\ Y \subset X$ なら $X = Y$ ($X = Y$ なら $X \subset Y,\ Y \subset X$ としても成立)、$X \subsetneq Y,\ Y \subset Z$ なら $X \subsetneq Z$ のようになります。

部分集合と真部分集合の記号の定義が人によってまちまちで、他の書き方で定義している場合も沢山あるので注意が必要です。

集合 X, Y の全ての元を合わせた集合を和集合 (union) と言い、記号は $X \cup Y$ です。これは

$$X \cup Y = \{x|\ x \in X \text{ or } x \in Y\}$$

ということです。ただし、ここでの「or」は $x \in X,\ x \in Y$ の両方の意味も含んでいます。つまり、x は X に含まれている場合、x は Y に含まれている場合、x は X, Y の両方に含まれている場合の 3 つの意味を持っています。

集合 X, Y の両方にいる元の集合を共通部分 (intersection) と言い、記号は $X \cap Y$ です。特に X, Y が共通の元を持たないなら $X \cap Y = \emptyset$ (互いに素、disjoint) です。$X \cap Y$ は

$$X \cap Y = \{x|\ x \in X \text{ and } x \in Y\}$$

ということです。「and」は素直に $x \in X$ で $x \in Y$ という意味です。

複数の和集合と共通部分に対しては

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$$

という記号が使われます。

2 つの集合 X, Y の差は $X - Y$ と書かれ、X には含まれるが Y には含まれないという意味になります。つまり、

$$X - Y = \{x|\ x \in X \text{ and } x \notin Y\}$$

ということで、これは X における Y の補集合 (complement) と呼ばれます。補集合は $X \backslash Y$ と書くことが多いです。

集合 X, Y からそれぞれ 1 つ元を取り出して作られる組の集合を、デカルト積 (Cartesian product)$X \times Y$ と言います。もしくは直積とも呼ばれます。デカルト積 $X \times Y$ は

$$X \times Y = \{(x, y)|\ x \in X,\ y \in Y\}$$

と定義されます。n 個の場合では

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\ x_i \in X_i\}$$

となります。n 次元ユークリッド空間は実数の集合のデカルト積から作られています (ベクトル空間としての定義も与えられている)。

説明なしで使われることの多い表記として

R：全ての実数の集合

C：全ての複素数の集合

Z：全ての整数

Q：全ての有理数

N：全ての自然数

$\mathbb{R}$ といった文字が使われたりもします。また、R はユークリッド空間として使われる場合もあります。

ついでに、可算 (countable) と非可算 (uncountable) にも触れておきます。加算は集合に含まれているものにそれぞれ $1, 2, 3, \ldots$ と自然数を重複なしで割り振れる場合で、そうでないなら非可算です。集合の個数が 10 個なら 10 まで割り振れるので可算集合となります。そして、Z, N, Q は無限個ですが可算です。これらは番号付けの規則がはっきりしているために、無限個でも割り振っていけるとされるためです。

専門家がどうしているのか不明（特に日本語の場合）ですが、実害があまりないわりにひどく迷惑な単語にも触れおきます (日本語の本だけを使うなら混乱はほぼ起きない)。

集合 X を $X = \{a, b, \ldots\}$ としたとき元 a は $a \in X$ ですが、a を X の部分集合と見て $\{a\}$ とするなら $\{a\} \subset X$ と書けます。このように X に属する元から集合を作れれば、X は元による集合を持つ集合と言えます。こういった元が集合となる集合 (set of sets) のことを、集合系 (collection of sets) と言います。なので、系 (collection) は集合 (set) の同義語です。

そして、族 (family) という言葉があります。集合 I とその元を i ($i \in I$) とします。このときの i を添え字とする A_i によって集合 I の族が定義されます。I を添え字集合 (index set) と言い、A_i の族は $(A_i)_{i\in I}$ のように表記されます (他の書き方もある)。定義から族は添え字 i から A_i を作る写像 (写像の項参照) です（写像を f とすれば、$A_i = f(i)$ での族 $\{A_i\}_{i\in I}$）。そして、A_i が重複することを許すので全射です。例えば、$i = 1, 2, 3$ で取れる値が $1, 2$ のとき、$A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 1$ となっていいです (単射でない)。

集合族 (family of sets、もしくは indexed family of sets) は A_i が集合であることを指します。なので、集合系が添え字に対する全射を持つなら集合族となります。一般的に、集合族は集合である必要はないです (集合系は集合)。重複を許しているために、例えば $X = \{1, 2, 3\}$ と添え字 $i \in I$ による集合 $S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{2\}, S_3 = \{1, 2\}$ に対して集合族は $\{S_1, S_2, S_3\}$ と出来ます (集合系では $\{S_1, S_2\}$)。また、重複があるものを集合とみなすかどうかで文脈や表記が変わる場合もあります。

簡単にまとめれば、系は集合、族は全射の写像です。ただし、これは共通認識されている定義ではなく、一般的とは言えないです (日本語でも英語でも)。ここでの定義は、例えば J.R.Munkres 著の「Topology」によるものです。

実際には集合族と言ったとき、集合の集合のことを指していることが多いです (特に重複を許す集合として集合族を使う場合がある)。このため、集合 I(写像であること) を無視したものを集合族と呼ぶことが多く、ここで集合族と定義したものを添え字つきの集合族と言う場合もあります。例えば、添え字集合 I を定義せずに $\{A_1, A_2, \ldots\}$ としたものを集合族と呼ぶことは、文字で区別するのは煩わしいから添え字で区別するという便宜上の記号になっていると言えます。

- 写像

写像 (mapping) と言っていきますが関数 (function) としても問題はないです。まず、2 つの集合 X, Y を用意し、$x \in X,\ y \in Y$ とします。このときに、各 x を各 y に割り当てようとする操作が写像 f です。

集合 X, Y に対する写像 f は

$$f:\ X\ \to\ Y$$

のように表記され、f は X から Y への写像という意味になります。X は写像 f の定義域 (domain)、Y は写像 f の終域 (codomain) と呼ばれます。そして、Y の元を $f(x) \in Y$ と表記したとき、$f(x)$ を x での f の値 (value) や像 (image) と呼びます。もしくは、x での f の出力 (output) と言われることもあります。写像は X から Y の部分集合への割り当てなので、$f(x)$ が Y そのものになる必要はないです。

高校数学あたりの感覚だと混同しやすいですが、写像（関数）は f であって $f(x)$ ではないです。ただし、数学以外の分野では区別はほぼされていないです。

言葉の定義にいくつか問題があります。$f(x)$ を像と呼ぶと言いましたが、像は集合の意味でも使われます。つまり、X の部分集合を A とし、写像 f によって A から Y へ移したときの集合 $\{f(x) \in Y |\ x \in A\} \subset Y$ (A の元 x による $f(x)$ の集まり) も像と言います。これは判別が簡単なのであまり気にする必要はないと思います。

面倒なのは値域 (range) という言葉があることです。値域は、終域と集合の意味の像どちらかに使われます。なので、値域は Y か $\{f(x) \in Y \mid x \in X\} \subset Y$ です。終域と像の違いが問題に影響する場合があるので、値域が終域と像どちらの定義になっているかは気にする必要があります。

写像には区別があります。定義域 X の元と写像 f によるそれらの像による対応が重複することなく 1 つの組で決まるとき、f は単射 (injective) や一対一 (one-to-one) と呼ばれます。つまり、写像 f において

$$a \neq b\ \to\ f(a) \neq f(b) \quad (a, b \in X)$$

となれば、f は単射です。例えば、$a, b, c, d \in X$、$a', b', c', d', e' \in Y$ としたとき、写像 f による対応が

$$a \to b'\ ,\ b \to c'\ ,\ c \to a'\ ,\ d \to d'$$

なら、単射です。

終域 Y のそれぞれの元が X のいくつかの元の像に対応しているなら、このときの写像 f は全射 (surjective, map X onto Y) と呼ばれます。つまり、各 $y\in Y$ において、$y=f(x)$ が $x\in X$ に対して少なくとも 1 つは存在するなら f は全射です。簡単に言えば、X の元と Y の元の全てが重複を許して余りなしで対応しているなら全射です。例えば、$a,b,c,d\in X$、$a',b',c'\in Y$ としたとき

$$a\to b'\ ,\ b\to c'\ ,\ c\to a'\ ,\ d\to c'$$

なら、全射です。

単射で全射なら全単射 (bijective) や一対一対応 (one-to-one correspondence) と呼ばれます。例えば、$a,b,c\in X$、$a',b',c'\in Y$ としたとき

$$a\to b'\ ,\ b\to c'\ ,\ c\to a'$$

なら、全単射です。これから、one-to-one correspondence という名称がついている理由が分かると思います。

言葉の問題ですが、単射を一対一、全単射を一対一対応とすると紛らわしいので（誤植の原因にもなる)、同時に使うのは止めたほうがいいです。

全単射なら逆向きの写像を定義できます。X から Y への写像 f が全単射なら、$x\in X$ に対して $f(x)=y\in Y$ が 1 つだけ対応するので Y から X への写像が作れて、それを逆写像 (inverse mapping) と呼び、f^{-1} と表記されます。物理ではほとんどの場合で $f^{-1}(x)$ は $1/f(x)$ の意味で使われますが、f^{-1} を逆写像としていることもたまにあるので注意が必要です。また、$1/f(x)$ は $f(x)^{-1}$ とも表記されます。

集合 S の 2 つの元に対する写像を二項演算 (binary operation) と呼びます。単純な例は実数の集合での和で、二項演算を A とすれば $A(x,y)=x+y$ です。

- 数列

物理で数列という単語が出てくることはあまりないですが、フーリエ級数の話で出てくる場合があります。

実数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ を並べたものを数列 (sequence) と呼び、$\{a_i\}_{i=1}^n$ のように表記されます。$a_1,a_2,\ldots,a_n$ は項と呼ばれます。無限個あり最後の項が明確でないときは $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ と表記され、無限数列と言います。無限数列のときは $\{a_i\}$ とも表記されます。無限数列は例えば

$$\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\}=\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^\infty$$

といったものです。

集合と同じ表記ですが、文脈からほぼ区別できるので混乱はあまり起きないと思います。区別するために (a_i) と表記している場合もあります。

実数でなく複素数の場合もありますが、ここでは実数のみを扱います (複素数でも基本的に言葉や意味は変わらない)。また、関数による数列の場合は関数列と言います。

数列において n を大きくしていくとある実数 a に近づくなら a は $\{a_n\}$ の極限値と呼ばれます。数学の定義に従えば、任意の正の実数 $\epsilon>0$ があり、それに対応する $n_0(\epsilon)$ があったとき、$n>n_0$ において

$$|a_n-a|<\epsilon$$

となるなら、a_n は a に収束すると言い、a が $\{a_n\}$ の極限となります。この定義は

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

と同じです。理由は簡単で、任意の正の実数 ϵ より $|a_n - a|$ が小さいことは限りなく a_n と a の差が 0 になることだからです。

無限数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ があり、整数 n, m が任意の正の実数 $\epsilon > 0$ に対応する整数 $N(\epsilon)$ に対して $n, m > N$ のとき

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

となるなら、a_n はコーシー列 (Cauchy sequence) や基本列 (fundamental sequanece) と呼ばれます。

関数列 $f_n(x)$ において、x の区間 I (例えば、実数 a, b よる $a \leq x \leq b$) によって関数 $f_n(x)$ は定義されているとします。このとき、任意の正の実数 $\epsilon > 0$ があり、それに対応する $n_0(\epsilon)$ が $n > n_0$ であるとき、区間 I での全ての x において

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (n > n_0(\epsilon))$$

となれば、$f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束 (uniform convergence) すると言います。

ここでは数の並びだけの場合でしたが、ノルム (空間上の距離) が定義されているときの数列では絶対値の部分がノルムに変わります。それに伴って数列は点列と言い換えられます (空間上の点の並びとして数列が与えられているときが点列)。数列と点列の使い分けは便利とも煩わしいとも言える気がします。

- 群、環、体

群は説明なしで使われるというより、説明なしで単語だけが現れることが量子論なんかでたまにあります。環、体もついでに触れておきます。環はそうそう目にしませんが、体はベクトル空間の公理で単語だけ出てくることが多いです。

群、環、体は集合に演算規則を与えたもです。集合が持つ何かしらの規則を代数的構造 (algebratic structure) と言います。

ある集合 G において、2 つの元に対する何かの二項演算 (binary operation）が与えられ、それが $a, b, c \in G$ に対して

- $a \cdot b \in G \quad (a, b \in G)$
- 結合法則：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- 単位元 e：$a \cdot e = e \cdot a = a \quad (e \in G)$
- 逆元 a^{-1}：$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \quad (a^{-1} \in G)$

という関係を満たすなら、集合 G は群 (group) と呼ばれます。「$\cdot$」が何かしらの演算を表し、単位元はどの元との演算でもその元を変えない元、逆元は単位元にする元です。「$\cdot$」を積 (multiplication) と呼びます。積で $a \cdot b = b \cdot a$ なら可換 (commutative, abelian) と呼ばれ、可換な群を可換群と言います。

例えば、$1, 2, 3$ と番号が振られている物体があり、それを集合 $\{1, 2, 3\}$ としたとき、演算を $1, 2, 3$ に対する全ての置換とすれば、$\{1, 2, 3\}$ は置換の規則によって群となります。

ある集合 R において、二項演算として和「$+$」(足し算の記号ではない) と積「$*$」が与えられ、$a, b, c \in R$ に対して

- $a + b \in R\ ,\ a * b \in R$
- 結合法則：$a + (b + c) = (a + b) + c$
- 単位元 0：$a + 0 = 0 + a = a$
- 逆元 $-a$：$a + (-a) = (-a) + a = 0$
- 可換：$a + b = b + a$
- 分配法則：$a * (b + c) = a * b + a * c\ ,\ (a + b) * c = a * c + b * c$

これらを満たすとき、集合 R は環 (ring) と呼ばれます。環は「+」を持つ可換群に「$*$」が加わったものです。和、積と呼んでいるのは、実数で出てくる通常の和と積の計算規則と同じだからです。また、環の定義に「$*$」での単位元を含めている場合もあります。

積が

$$a*b=-b*a\ ,\ a*(b*c)+b*(c*a)+c*(a*b)=0$$

となっているとき、リー環 (Lie ring) と言います。

ある集合 F に「+」,「$*$」の演算があり、「+」での単位元を 0 として

- $a*b\in F$
- $a*b=b*a$
- $a*(b*c)=(a*b)*c$
- $a*e=e*a=a$
- $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e\quad (a\neq 0)$
- $a*(b+c)=a*b+a*c\ ,\ (a+b)*c=a*c+b*c$

となるなら、集合 F は体 (field) と呼ばれます。体は、積が可換で、0 以外は積の逆元を持つ環です。0 以外は積の逆元を持つ環を斜体 (division ring, skewfield) と言い、体は可換な斜体です。例えば、実数の集合、複素数の集合、有理数の集合は体です。

ベクトル空間は体とベクトルによって作られていて、スカラーは体のことです (スカラー同士は体の積で、ベクトルとスカラーの積には体の規則である結合法則と分配法則を持たせる)。ベクトル空間の定義は「ベクトル空間」を見てください。

環の元がベクトル空間となっているとき代数 (algebra) と呼ばれます。簡単に言えば、ベクトル空間でのベクトル同士の和 (環の和)、スカラー倍に加えて、ベクトル同士の積が環の積として与えられているものです。例えば、行列によるベクトル空間に行列の積を加えたものは代数です。

リー環において、a,b,c を $n\times n$ 行列、ab を行列の積として、交換子 (commutator)$[a,b]=ab-ba$ を使えば、「$*$」は

$$a*b=[a,b]=ab-ba=-b*a\ ,\ a*(b*c)=[a,[b,c]]$$

と与えられます (行列の積による $ab-ba$ を環の積としている)。これをリー代数と呼びます (同じ関係が作れれば行列でなくてもいい)。リー環なので

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0\quad (a*(b*c)+b*(c*a)+c*(a*b)=0)$$

となっていて、ヤコビ恒等式 (Jacobi's identity) と呼びます。

- 和の記号

与えられた値全てに対して和を取ることを総和 (summation) と言います。例えば $a_1,a_2,\ldots,a_N$ の総和は

$$\sum_{i=1}^{N}a_i=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_N\quad (i=1,2,\ldots,N)$$

と表記されます。Σ は総和を表す記号 (summation symbol) ですが、和の記号と言っていきます。同じ範囲での和は

$$\sum_{i=1}^{N} a_i + \sum_{i=1}^{N} b_i = \sum_{i=1}^{N}(a_i + b_i)$$

積では

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{j=1}^{M} b_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_i b_j$$

と表記され、範囲が同じときは

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{j=1}^{N} b_j = \sum_{i,j=1}^{N} a_i b_j$$

と表記されます。和の記号の表記は状況によっていろいろあるので、特殊な表記の場合は気を付ける必要があります。

　アインシュタインの和の規約やアインシュタイの記法などと呼ばれる表記があり、これは 1 つの項において同じ添え字がいるなら、和の記号がなくてもその総和を取るというものです。例えば

$$\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \;\Rightarrow\; a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_N b_N$$

いちいち Σ を書かなくてすむので便利です。特に、相対論が関連する分野ではローマ文字の添え字は 1 から 3、ギリシャ文字は 0 から 3 というのが暗黙の了解になってることが多く、

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i \;\Rightarrow\; a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu \;\Rightarrow\; a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$$

と表記されます。b^μ はの μ は累乗でなく区別の添え字です。

- 級数

　関数 $f_i(x)$ $(i \geq 1)$ による関数列 $\{f_i(x)\}$ があり、それによる無限個の和

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

のことを級数 (series) や無限級数と呼びます。これの n 個までの和として

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

としたものを部分和 (partial sum) や第 n 部分和と呼びます。部分和の無限大として

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = S(x)$$

が存在するなら、級数は $S(x)$ に収束すると言います。言い換えれば、関数列 $\{S_n\}$ が S に収束するなら級数は S に収束するとなります。なので、関数列 $\{S_n\}$ が一様収束しているなら、級数も一様収束していることになります。

一様収束しているなら微分は

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_i(x)$$

と出来ます。

一様収束に対するワイエルシュトラスの M 判定法 (Weierstrass M-test) というのがあります。$n \geq 1$ に対して、x の区間 I において $|f_n(x)| \leq M_n$ とします。このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

が正の実数に収束しているなら

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

は一様収束するというものです。

- 偏微分

2 つの変数 (独立変数) による関数 $u(x, y)$ において、片方の変数を定数として固定して微分したものを偏微分と呼びます。y を固定する x の偏微分は

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ u_x\ ,\ \partial_x u$$

のように表記されます。x を定数とした場合でも同様で

$$\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\ u_y\ ,\ \partial_y u$$

と表記されます。偏微分は例えば $u(x, y) = \sin(xy) + y$ に対して

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(xy)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(xy) + 1$$

となります。

$u(x,y)$ の変数 x,y が変数 t の関数 $x(t),y(t)$ であるとき

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

となり、連鎖律や連鎖則や連鎖法則 (chain rule) と呼ばれます。$u(x(t),y(t),t)$ となっていれば

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

さらに、x,y の変数が s,t の 2 つの関数 $x(s,t).y(s,t)$ であるときの $u(x(s,t),y(s,t))$ の場合は

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

となり、$u(x(s,t),y(s,t),s,t)$ なら

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial s}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

となります。この表記だと左辺と右辺に同じ $\partial u/\partial s,\partial u/\partial t$ がいますが、区別されるものです。明確にするなら、$u=U(x(s,t),y(s,t),s,t)$ のようにして

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial U}{\partial s}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial U}{\partial t}$$

と書けばいいです。

- テイラー展開

  関数 $f(x)$ の $x=a$ まわりでの展開

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}\frac{df(x)}{dx}|_{x=a}(x-a)+\frac{1}{2!}\frac{d^2f(x)}{dx^2}|_{x=a}(x-a)^2+\cdots$$

のことをテイラー展開と言い、$a=0$ のものをマクローリン展開と言います。特に、$f(x+\delta)$ という関数があったとき、x に比べて δ が十分小さいなら

$$f(x+\delta)=f(x)+\frac{1}{1!}\frac{df(x)}{dx}\delta+\frac{1}{2!}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\delta^2+\cdots$$

と書けることは頻繁に使用されます。

2 変数の $f(x,y)$ の $x=a,y=b$ まわりでの展開は

$$f(x,y)=f(a,b)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)+\cdots$$

h, k は $h = x - a,\ k = y - b$ としています。ここでの $f(a, b)$ は微分してから $x = a, y = b$ にするという意味です。

- ヤコビアン
  n 次元 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の微小体積 $dx_1dx_2 \ldots dx_n$ の $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ への変数変換は、ヤコビアン

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

によって行われます。$|\ |$ は行列式です。ヤコビアンによって

$$dx_1dx_2 \cdots dx_n = |J| dy_1dy_2 \cdots dy_n$$

となります。これの $|\ |$ は絶対値です。絶対値がつくのは体積は正として定義されているからです。
  ヤコビアン（ヤコビ行列式）は行列式ですが、行列としてはヤコビ行列と呼ばれ

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\ ,\ \frac{Dx}{Dy}\ ,\ \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

と表記されます。なので、ヤコビアンは $J = |Dx/Dy|$ のようになります。

- クロネッカーデルタ
  クロネッカーデルタは δ_{ij} と書かれ、$i = j$ のとき $+1$、$i \neq j$ のとき 0 になる記号です。例えば $i, j = 1, 2, 3$ のとき

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1\ ,\ \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

となります。クロネッカーデルタは当たり前のように使われる記号なので、覚えておいたほうがいいです。

- レヴィ・チビタ記号
  レヴィ・チビタ記号は ϵ_{ij} のように書かれます。i, j は 1 から 2 が入り、

$$\epsilon_{12} = +1\ ,\ \epsilon_{21} = -1\ ,\ \epsilon_{11} = 0\ ,\ \epsilon_{22} = 0$$

となる記号です。添え字の数は増やすことができ、ϵ_{ijk} では $1, 2, 3$ が入り

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$$

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \cdots = \epsilon_{333} = 0$$

このように、$\epsilon_{12\ldots n} = +1$ の添え字の並びを偶数回入れ替えれば $+1$、奇数回入れ替えれば -1、同じ文字が複数あるときは 0 になる記号です。