ワイルによる統一場理論

ワイルによって作られた重力と電磁場を統一して扱う理論を見ていきます。
先に言っておくと、ここでの理論は物理の統一場理論としては失敗しています。しかし、ゲージ理論の出発点とも言える有名な話です。

一般相対性理論は重力をリーマン幾何学での計量によって表現します。これから、電磁場も幾何学的な量として自然に組み込めないかと考えます (「ラグランジアン密度」では重力と電磁場が関係するようにならない)。しかし、すでにリーマン幾何学での空間を特徴付ける量である計量は重力によって占領されています。なので、リーマン幾何学の制限を外すことで、もう 1 つ空間を特徴付ける幾何学的な量が入ってこれるようにし、それによってラグランジアンを作ります。

「アフィン接続係数と平行移動」の最初にみたように、空間におけるベクトル $v^\mu(x)$ の微小移動は接続によって書くことが出来るので、その接続を $C^\mu_{\alpha\beta}$ とすれば微小移動 dx^α に対してベクトルの変化 dv^μ は

$$dv^\mu = C^\mu_{\alpha\beta}dx^\alpha v^\beta$$

となります。接続の性質として $C^\mu_{\alpha\beta} = C^\mu_{\beta\alpha}$ を持っています。計量 $g_{\mu\nu}$ を定義して、ベクトル v^μ の大きさは

$$l^2 = |v|^2 = |v\cdot v| = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \tag{1}$$

と与えます (内積も同様で $v^\mu w_\mu = g_{\mu\nu}v^\mu w^\nu$)。このとき、ベクトルの大きさが移動後も変わらないとすればリーマン空間となりリーマン幾何学の話になります。ここを変更して、移動後にベクトルの大きさが変化するようにし、その変化は

$$dl = \varphi_\mu(x)dx^\mu l \tag{2}$$

と設定します。これによってどうなるのか見ます。

対応する l^2 の変化は

$$l^2 + dl^2 = l^2(x+dx) = l^2(x) + 2l\frac{\partial l}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$$

から

$$dl^2 = 2l^2\varphi_\alpha dx^\alpha = 2g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu\varphi_\alpha dx^\alpha$$

となります。また l^2 の定義 (1) から

$$
\begin{aligned}
dl^2 &= d(g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu) \\
&= dg_{\mu\nu}v^\mu v^\nu + g_{\mu\nu}dv^\mu v^\nu + g_{\mu\nu}v^\mu dv^\nu \\
&= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}v^\mu v^\nu dx^\alpha + g_{\mu\nu}dv^\mu v^\nu + g_{\mu\nu}v^\mu dv^\nu \\
&= g_{\mu\nu|\alpha}v^\mu v^\nu dx^\alpha + g_{\mu\nu}C^\mu_{\alpha\beta}v^\beta v^\nu dx^\alpha + g_{\mu\nu}v^\mu C^\nu_{\alpha\beta}v^\beta dx^\alpha \\
&= g_{\mu\nu|\alpha}v^\mu v^\nu dx^\alpha + g_{\beta\nu}C^\beta_{\alpha\mu}v^\mu v^\nu dx^\alpha + g_{\mu\beta}C^\beta_{\alpha\nu}v^\mu v^\nu dx^\alpha \\
&= (g_{\mu\nu|\alpha} + g_{\beta\nu}C^\beta_{\alpha\mu} + g_{\mu\beta}C^\beta_{\alpha\nu})v^\mu v^\nu dx^\alpha
\end{aligned}
$$

これから計量と接続の関係

$$
\begin{gathered}
(g_{\mu\nu|\alpha} + g_{\beta\nu}C^\beta_{\alpha\mu} + g_{\mu\beta}C^\beta_{\alpha\nu})v^\mu v^\nu dx^\alpha = 2g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \varphi_\alpha dx^\alpha \\
g_{\mu\nu|\alpha} + g_{\beta\nu}C^\beta_{\alpha\mu} + g_{\mu\beta}C^\beta_{\alpha\nu} = 2g_{\mu\nu}\varphi_\alpha \qquad (3)
\end{gathered}
$$

が求まります。これと、リーマン幾何学におけるクリストッフェル記号 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ の関係

$$
g_{\mu\nu|\alpha} = g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} + g_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}
$$

を比べると、これの左辺に $2g_{\mu\nu}\varphi_\alpha$ が加わっています。なので、「アフィン接続係数と平行移動」で行ったクリストッフェル記号を計量の形にしたのと同じように、添え字を付け替えて

$$
\begin{aligned}
2g_{\mu\nu}\varphi_\alpha &= g_{\mu\nu|\alpha} + g_{\beta\nu}C^\beta_{\alpha\mu} + g_{\mu\beta}C^\beta_{\nu\alpha} \\
2g_{\alpha\mu}\varphi_\nu &= g_{\alpha\mu|\nu} + g_{\beta\mu}C^\beta_{\nu\alpha} + g_{\alpha\beta}C^\beta_{\mu\nu} \\
2g_{\nu\alpha}\varphi_\mu &= g_{\nu\alpha|\mu} + g_{\beta\alpha}C^\beta_{\mu\nu} + g_{\nu\beta}C^\beta_{\alpha\mu}
\end{aligned}
$$

下 2 つを足して

$$
\begin{aligned}
2g_{\alpha\mu}\varphi_\nu + 2g_{\nu\alpha}\varphi_\mu &= g_{\alpha\mu|\nu} + g_{\nu\alpha|\mu} + g_{\beta\mu}C^\beta_{\nu\alpha} + g_{\alpha\beta}C^\beta_{\mu\nu} + g_{\beta\alpha}C^\beta_{\mu\nu} + g_{\nu\beta}C^\beta_{\alpha\mu} \\
&= g_{\alpha\mu|\nu} + g_{\nu\alpha|\mu} + g_{\beta\mu}C^\beta_{\nu\alpha} + 2g_{\alpha\beta}C^\beta_{\mu\nu} + g_{\nu\beta}C^\beta_{\alpha\mu}
\end{aligned}
$$

これから一番上のを引くと

$$
\begin{aligned}
&2g_{\alpha\mu}\varphi_\nu + 2g_{\nu\alpha}\varphi_\mu - 2g_{\mu\nu}\varphi_\alpha \\
&\quad = g_{\alpha\mu|\nu} + g_{\nu\alpha|\mu} - g_{\mu\nu|\alpha} + g_{\beta\mu}C^\beta_{\nu\alpha} + 2g_{\alpha\beta}C^\beta_{\mu\nu} + g_{\nu\beta}C^\beta_{\alpha\mu} - g_{\beta\nu}C^\beta_{\alpha\mu} - g_{\mu\beta}C^\beta_{\nu\alpha} \\
&\quad = g_{\alpha\mu|\nu} + g_{\nu\alpha|\mu} - g_{\mu\nu|\alpha} + 2g_{\alpha\beta}C^\beta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

となるので、リーマン幾何学でのクリストッフェル記号

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\nu\mu}(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}})$$

を使うことで接続 $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ は

$$g_{\alpha\beta}C^{\beta}_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}(g_{\alpha\mu|\nu}+g_{\nu\alpha|\mu}-g_{\mu\nu|\alpha})+g_{\alpha\mu}\varphi_{\nu}+g_{\nu\alpha}\varphi_{\mu}-g_{\mu\nu}\varphi_{\alpha}$$

$$\begin{aligned}C^{\alpha}_{\mu\nu}=&\ -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu|\nu}+g_{\nu\beta|\mu}-g_{\mu\nu|\beta})+g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\varphi_{\nu}+g_{\nu\beta}\varphi_{\mu}-g_{\mu\nu}\varphi_{\beta})\\=&\ -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu|\nu}+g_{\nu\beta|\mu}-g_{\mu\nu|\beta})+g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\varphi_{\nu}+g_{\nu\beta}\varphi_{\mu}-g_{\mu\nu}\varphi_{\beta})\\=&\ -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}+g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\varphi_{\nu}+g_{\nu\beta}\varphi_{\mu}-g_{\mu\nu}\varphi_{\beta})\end{aligned}$$

と書けます。これが移動後にベクトルの長さが (2) のように変わるとしたときの接続です。この形から分かるように、接続 $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ は計量と φ_{μ} によって構成されています。というわけで、計量の他に φ_{μ} が導入されました。計量と φ_{μ} によるこの幾何学をワイル幾何学と呼んだりします。見て分かるように $\varphi_{\mu}=0$ でリーマン幾何学になります。

リーマン幾何学との違いが端的に見えるのが計量の共変微分です ((1)〜(3) までの話を言い換えただけ)。共変微分はベクトルの移動による接続で与えられているので、ワイル幾何学でも共変微分の形は同じです (ベクトルの移動の式から分かるように $C^{\mu}_{\alpha\beta}$ はクリストッフェル記号とは符号が逆になっている)。なので、計量の共変微分は

$$g_{\mu\nu||\alpha}=g_{\mu\nu|\alpha}+g_{\beta\nu}C^{\beta}_{\alpha\mu}+g_{\mu\beta}C^{\beta}_{\alpha\nu}$$

と与えられ、(3) から

$$g_{\mu\nu||\alpha}=2g_{\mu\nu}\varphi_{\alpha}\tag{4}$$

となり、$\varphi_{\alpha}\neq 0$ ($dl\neq 0$) では計量の共変微分が 0 になりません。$\varphi_{\alpha}=0$ ($dl=0$) のとき共変微分は 0 になり、リーマン幾何学になります。

φ_{μ} が導入されたので、これを使って電磁場に対応させればいいことが予想できますが、φ_{μ} がマクスウェル方程式を作れるのかはまだ分からないので、ワイル幾何学での関係をさらに見ていきます。

設定してきたベクトルの移動則の変更が計量の変換と関係することを見るために、一旦リーマン幾何学に戻します。リーマン幾何学なのでベクトルを移動したらベクトルの大きさは変わらないとします ($dl=0$)。なので接続にはクリストッフェル記号を使えて、接続 $C^{\mu}_{\alpha\beta}$ では $\varphi_{\mu}=0$ から

$$C^{\mu}_{\alpha\beta}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$$

となります (定義上符号が反転しているだけなので、定義を合わせればマイナスは外せます)。同じ座標系 x^{μ} において $g_{\mu\nu}$ から

$$\overline{g}_{\mu\nu}(x)=f(x)g_{\mu\nu}(x)\tag{5}$$

という $\overline{g}_{\mu\nu}$ を作ります (座標変換ではない)。$\overline{g}^{\mu\nu}$ は

$$\overline{g}^{\mu\nu} = f^{-1}(x) g^{\mu\nu}$$

$g_{\mu\nu}$ の変わりに $\overline{g}_{\mu\nu}$ を計量にすると、ベクトルの大きさ $\bar{l}^2$ は、ベクトル自体は v^μ のままなので

$$\bar{l}^2 = \overline{g}_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = f(x) g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = f(x) l^2$$

で与えられます (下の補足も参照)。$\bar{l}^2$ はベクトル v^μ を計量 $\overline{g}_{\mu\nu}$ で測った大きさ、l^2 はベクトル v^μ を計量 $g_{\mu\nu}$ で測った大きさです。これを微分すると、l の移動による変化 dl は 0 であることから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{l}^2}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} l^2 + f \frac{\partial l^2}{\partial x^\alpha} \\
2\bar{l} \frac{\partial \bar{l}}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} l^2 + 2fl \frac{\partial l}{\partial x^\alpha} \\
\frac{\bar{l}}{\bar{l}^2} \frac{\partial \bar{l}}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{l^2}{\bar{l}^2} + 2f \frac{l}{\bar{l}^2} \frac{\partial l}{\partial x^\alpha} \\
\frac{1}{\bar{l}} \frac{\partial \bar{l}}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + 2f \frac{l}{\bar{l}^2} \frac{\partial l}{\partial x^\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial \log f}{\partial x^\alpha} + 2f \frac{l}{\bar{l}^2} \frac{\partial l}{\partial x^\alpha} \\
\frac{d\bar{l}}{\bar{l}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + 2f \frac{l}{\bar{l}^2} dl \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial \log f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \\
d\bar{l} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \bar{l}
\end{aligned}$$

これと (2) は同じ格好をしています。つまり、$g_{\mu\nu}$ から $\overline{g}_{\mu\nu}$ への変換 (5) でベクトルの大きさが変化する形になり、(2) での φ_α がこの対応から

$$\overline{\varphi}_\alpha = \frac{1}{2} (\log f)_{|\alpha}$$

となっていることが分かります。このようにリーマン幾何学は変換 (5) で $d\bar{l} \neq 0$ となります。

$\overline{g}_{\mu\nu}$ と $\overline{\varphi}_\alpha$ による接続 $\overline{C}^\alpha_{\mu\nu}$ を持ち出してこの結果を入れてみると、接続において

$$
\begin{aligned}
\overline{C}^{\alpha}_{\mu\nu} =& -\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} + \overline{g}^{\alpha\beta}(\overline{g}_{\beta\mu}\overline{\varphi}_{\nu} + \overline{g}_{\nu\beta}\overline{\varphi}_{\mu} - \overline{g}_{\mu\nu}\overline{\varphi}_{\beta}) \\
=& -\frac{1}{2}\overline{g}^{\alpha\beta}(\overline{g}_{\beta\mu|\nu} + \overline{g}_{\nu\beta|\mu} - \overline{g}_{\mu\nu|\beta}) + \overline{g}^{\alpha\beta}(\overline{g}_{\beta\mu}\overline{\varphi}_{\nu} + \overline{g}_{\nu\beta}\overline{\varphi}_{\mu} - \overline{g}_{\mu\nu}\overline{\varphi}_{\beta}) \\
=& -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu|\nu} + g_{\nu\beta|\mu} - g_{\mu\nu|\beta}) - \frac{1}{2}f^{-1}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}f_{|\nu} + g_{\nu\beta}f_{|\mu} - g_{\mu\nu}f_{|\beta}) + g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\overline{\varphi}_{\nu} + g_{\nu\beta}\overline{\varphi}_{\mu} - g_{\mu\nu}\overline{\varphi}_{\beta}) \\
=& -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f^{-1}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}f_{|\nu} + g_{\nu\beta}f_{|\mu} - g_{\mu\nu}f_{|\beta}) + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}(\log f)_{|\nu} + g_{\nu\beta}(\log f)_{|\mu} - g_{\mu\nu}(\log f)_{|\beta}) \\
=& -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}(\log f)_{|\nu} + g_{\nu\beta}(\log f)_{|\mu} - g_{\mu\nu}(\log f)_{|\beta}) + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}(\log f)_{|\nu} + g_{\nu\beta}(\log f)_{|\mu} - g_{\mu\nu}(\log f)_{|\beta}) \\
=& -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \\
=& \, C^{\alpha}_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

となっていて、変換後の接続は変換前での接続と等しくなります ($g_{\mu\nu}$ での接続は $C^{\alpha}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ としている)。なので、計量の変換によって出てきた $\overline{\varphi}_{\mu}$ がいても接続は変化しないことが分かります。

今見たのは、計量を $g_{\mu\nu}$ から $\overline{g}_{\mu\nu} = f(x)g_{\mu\nu}$ に変換すると、それによってベクトルの大きさが $\overline{l}^2 = f(x)l^2$ になるということです。これから分かるように、この計量の変換が gauge の意味そのものでのゲージ変換になっています。なので、この計量の変換はゲージ変換と呼ぶことができます (おそらくこれがゲージ理論の始まり)。このゲージ変換は空間の各点でのベクトルの大きさを測るスケールを $f(x)$ によって変更しています。また、φ_{μ} はゲージ変換によって出てきているのでゲージ場と呼ぶことが出来ます。そして、接続 $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ はゲージ変換に対して不変になっています。

ちなみに、ここでのゲージ変換はスケール変換 (共形変換。下の補足参照) になっていますが、現在の量子論で使われているゲージ変換は位相変換です (量子論に適用されるときにこの読み替えが行われた)。

ゲージ変換をワイル幾何学に持ち込みます。リーマン幾何学ではベクトルの大きさが変化するようになりましたが、ワイル幾何学では元から変化するようになっているので、幾何学の構造を変えずに導入できるはずです。ここからワイル幾何学に話を戻します。

ベクトルの移動則 (接続) が変更されないようにゲージ変換を導入したいので、移動則の関係を見ます。ベクトルの移動則は (4) の導出から分かるように計量の共変微分に反映されているので、計量の共変微分を使います。ワイル幾何学での計量の共変微分は

$$
g_{\mu\nu||\alpha} = 2g_{\mu\nu}\varphi_{\alpha}
$$

と与えられています。このワイル幾何学での性質はゲージ変換後も成立しているとします。なので、ゲージ変換した $\overline{g}_{\mu\nu}$ を計量として使うときでも

$$
\overline{g}_{\mu\nu||\alpha} = 2\overline{g}_{\mu\nu}\overline{\varphi}_{\alpha}
$$

として (ゲージ不変)、φ_{α} も変換を受けることで同じ形になるとします。そうすると左辺は

$$
\overline{g}_{\mu\nu||\alpha} = (f^2(x)g_{\mu\nu})_{||\alpha} = f^2(x)g_{\mu\nu||\alpha} + \frac{\partial f^2}{\partial x^{\alpha}}g_{\mu\nu} = 2f^2(x)g_{\mu\nu}\varphi_{\alpha} + 2f\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}g_{\mu\nu}
$$

右辺は

$$2\overline{g}_{\mu\nu}\overline{\varphi}_\alpha = 2f^2(x)g_{\mu\nu}\overline{\varphi}_\alpha$$

$\overline{\varphi}_\alpha$ は φ_α から

$$\begin{aligned}
2f^2(x)g_{\mu\nu}\overline{\varphi}_\alpha &= 2f^2(x)g_{\mu\nu}\varphi_\alpha + 2f\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}g_{\mu\nu} \\
\overline{\varphi}_\alpha &= \varphi_\alpha + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \\
&= \varphi_\alpha + (\log f)_{|\alpha}
\end{aligned}$$

と変換されていることが分かります。よって、ワイル幾何学で計量の変換 (5) を行うときに、φ_μ は

$$\overline{\varphi}_\mu = \varphi_\mu + \frac{1}{2}(\log f)_{|\mu}$$

と変換させます。そして、この変換で接続

$$C^\alpha_{\mu\nu} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\varphi_\nu + g_{\nu\beta}\varphi_\mu - g_{\mu\nu}\varphi_\beta)$$

は変更されないです。実際に

$$\begin{aligned}
\overline{C}^\alpha_{\mu\nu} =& -\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + \overline{g}^{\alpha\beta}(\overline{g}_{\beta\mu}\overline{\varphi}_\nu + \overline{g}_{\nu\beta}\overline{\varphi}_\mu - \overline{g}_{\mu\nu}\overline{\varphi}_\nu\beta) \\
=& -\frac{1}{2}\overline{g}^{\alpha\beta}(\overline{g}_{\beta\mu|\nu} + \overline{g}_{\nu\beta|\mu} - \overline{g}_{\mu\nu|\beta}) + \overline{g}^{\alpha\beta}(\overline{g}_{\beta\mu}\overline{\varphi}_\nu + \overline{g}_{\nu\beta}\overline{\varphi}_\mu - \overline{g}_{\mu\nu}\overline{\varphi}_\nu\beta) \\
=& -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu|\nu} + g_{\nu\beta|\mu} - g_{\mu\nu|\beta}) - \frac{1}{2}f^{-1}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}f_{|\nu} + g_{\nu\beta}f_{|\mu} - g_{\mu\nu}f_{|\beta}) \\
&+ g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\varphi_\nu + g_{\nu\beta}\varphi_\mu - g_{\mu\nu}\varphi_\beta) + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}(\log f)_{|\nu} + g_{\nu\beta}(\log f)_{|\mu} - g_{\mu\nu}(\log f)_{|\beta}) \\
=& -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\varphi_\nu + g_{\nu\beta}\varphi_\mu - g_{\mu\nu}\varphi_\beta) \\
=& \, C^\alpha_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

となっています。というわけで、ワイル幾何学における接続 (ベクトルの移動則) を変えないゲージ変換として

$$\overline{g}_{\mu\nu} = f(x)g_{\mu\nu}\ ,\ \overline{\varphi}_\mu = \varphi_\mu + \frac{1}{2}(\log f)_{|\mu}\ ,\ \overline{C}^\alpha_{\mu\nu} = C^\alpha_{\mu\nu}$$

というのが与えられます (ベクトルの大きさは $\overline{l}^2 = f(x)l^2$ で、異なるベクトル間の角度は変わらない)。

φ_μ のゲージ変換の形から、φ_μ を使ってゲージ変換に対して不変な量を作れば電磁場として使えるだろうと考えられます。電磁場テンソルは 2 階の反対称テンソルで表現されるので、φ_μ から 2 階の反対称テンソルを作ります。電磁場テンソルの形から、2 階の反対称テンソル

$$F_{\mu\nu} = \varphi_{\mu|\nu} - \varphi_{\nu|\mu}$$

を定義します。$F_{\mu\nu}$ は反対称で、$F_{\mu\nu|\alpha}$ は

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu|\alpha}+F_{\alpha\mu|\nu}+F_{\nu\alpha|\mu}&=\varphi_{\mu|\nu|\alpha}-\varphi_{\nu|\mu|\alpha}+\varphi_{\alpha|\mu|\nu}-\varphi_{\mu|\alpha|\nu}+\varphi_{\nu|\alpha|\mu}-\varphi_{\alpha|\nu|\mu}\\&=\varphi_{\mu|\nu|\alpha}-\varphi_{\nu|\mu|\alpha}+\varphi_{\alpha|\mu|\nu}-\varphi_{\mu|\nu|\alpha}+\varphi_{\nu|\mu|\alpha}-\varphi_{\alpha|\mu|\nu}\\&=0\end{aligned}$$

となるので、通常の電磁場テンソルと同じ関係を持ちます。φ_μ のゲージ変換によっても

$$F_{\mu\nu}=\varphi_{\mu|\nu}-\varphi_{\nu|\mu}\ \Rightarrow\ F_{\mu\nu}=\varphi_{\mu|\nu}+(\log f)_{|\mu|\nu}-\varphi_{\nu|\mu}-(\log f)_{|\nu|\mu}=\varphi_{\mu|\nu}-\varphi_{\nu|\mu}$$

となって、変化しません。というわけで、φ_μ から作られる $F_{\mu\nu}$ をマクスウェル方程式を導く電磁場テンソルとして扱えます。

　$F_{\mu\nu}=0$ のときどうなるのか見ておきます。ワイル幾何学からリーマン幾何学へは φ_μ が 0 になることで移行できるので、ゲージ変換によって $\overline{\varphi}_\mu$ が $\overline{\varphi}_\mu=0$ となればリーマン幾何学になります。このようなゲージ変換が存在するかですが、これは簡単に分かります。$\overline{\varphi}_\mu=0$ となるにはゲージ変換の式から

$$\varphi_\mu+\frac{1}{2}(\log f)_{|\mu}=0$$

であればいいです。これを微分してみると

$$\varphi_{\mu|\nu}+\frac{1}{2}(\log f)_{|\mu|\nu}=0$$

なので、添え字を入れ替えたものを引くことで

$$0=\varphi_{\mu|\nu}-\varphi_{\nu|\mu}+\frac{1}{2}(\log f)_{|\mu|\nu}-\frac{1}{2}(\log f)_{|\nu|\mu}=\varphi_{\mu|\nu}-\varphi_{\nu|\mu}$$

よって、φ_μ が

$$\varphi_{\mu|\nu}-\varphi_{\nu|\mu}=0$$

となるときに $\overline{\varphi}_\mu=0$ になるので、これがリーマン幾何学へ変換出来るための条件になります。このため、$F_{\mu\nu}=0$ ではリーマン幾何学になります。なので、電磁場の寄与によってワイル幾何学になっていると言えます。

　ちなみに、同じ条件を積分の形で言うことが出来ます。φ_μ を閉じた積分経路で積分すると

$$\oint_C\varphi_\mu dx^\mu$$

ここで、閉曲線 C とそれによる閉曲面 S によるストークスの定理

$$\oint_C V_\mu dx^\mu=\frac{1}{2}\int_S(V_{\mu|\nu}-V_{\nu|\mu})dS^{\nu\mu}$$

から

$$\oint_C \varphi_\mu dx^\mu = \frac{1}{2}\int_S (\varphi_{\mu|\nu} - \varphi_{\nu|\mu}) dS^{\nu\mu} = 0$$

となります。$S^{\mu\nu}$ は面積要素に対応する反対称テンソルです (「共変微分」の回転で触れたように、回転 $V_{\mu||\nu} - V_{\nu||\mu} = V_{\mu|\nu} - V_{\nu|\mu}$ なのでストークスの定理は一般の空間でも同じように成立する)。そして、これと (2) を閉じた経路で線積分した

$$\oint_C \frac{dl}{l} = \oint_C \varphi_\mu dx^\mu$$

とを合わせると

$$\oint_C \frac{dl}{l} = \oint_C \varphi_\mu dx^\mu = 0$$

となります。dl はベクトルの大きさの変化なので、左辺はベクトルの大きさは与えられた閉じた経路で一周した後の長さ l になります。なので、これは元の位置での長さが変化しないという式です。これはリーマン幾何学の性質です。

次にワイル幾何学でのリーマンテンソルを求めます。これはただの置き換えですみます。共変微分はベクトルの移動での接続によって

$$v^\mu_{\ ||\nu} = v^\mu_{\ |\nu} - C^\mu_{\nu\alpha} v^\alpha$$

と定義されていて、リーマンテンソルは共変微分から

$$R^\mu_{\ \beta\nu\alpha} v^\beta = v^\mu_{\ ||\alpha||\nu} - v^\mu_{\ ||\nu||\alpha}$$

と定義されています。なので、リーマン幾何学でのリーマンテンソルのクリストッフェル記号を今の接続 $C^\mu_{\alpha\beta}$ に置き換えるだけでいいです。今のベクトルの移動の定義から $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \to -C^\mu_{\alpha\beta}$ なので、リーマンテンソルは

$$R^\mu_{\ \alpha\nu\beta} = -C^\mu_{\alpha\beta|\nu} + C^\mu_{\alpha\nu|\beta} - C^\mu_{\beta\lambda} C^\lambda_{\alpha\nu} + C^\mu_{\nu\lambda} C^\lambda_{\alpha\beta}$$

となります。リッチテンソル、リッチスカラーも通常通りこのときの計量 $g_{\mu\nu}$ によって

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\ \mu\alpha\nu}\ ,\ R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

と定義できます。

後の計算のためにリッチスカラーの形を出しておきます。リッチスカラーはスカラーなので座標系に依存しないことから、便利な座標系を選んでしまいます。リーマン空間でのある点 P でクリストッフェル記号が消える測地座標系を取ったとして (「normal coordinate」参照)、その点で

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(P) = 0\ ,\ g_{\mu\nu||\alpha}(P) = g_{\mu\nu|\alpha}(P) = 0$$

とします。リッチスカラーは

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\beta|\mu} + g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\mu|\beta} - g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\beta\lambda}C^{\lambda}_{\alpha\mu} + g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\mu\lambda}C^{\lambda}_{\alpha\beta}$$

これを点 P で計算します。

点 P では $g_{\mu\nu|\alpha}(P) = 0$ (点 P で微分する) なので、第一項は

$$g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P) = (g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\beta})_{|\mu}(P)$$

とします。そうすると

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\beta} &= -g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha}\varphi_{\beta} + g_{\beta\nu}\varphi_{\alpha} - g_{\alpha\beta}\varphi_{\nu}) \\
&= -g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + (g^{\mu\nu}\varphi_{\nu} + g^{\mu\nu}\varphi_{\nu} - ng^{\mu\nu}\varphi_{\nu}) \\
&= -g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + (2-n)\varphi^{\mu}
\end{aligned}$$

となっているので、$g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P)$ は

$$g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P) = -g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P) + (2-n)\varphi^{\mu}_{|\mu} \tag{6}$$

第二項の $C^{\mu}_{\alpha\mu|\beta}(P)$ は

$$C^{\mu}_{\alpha\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} + g^{\mu\beta}(g_{\beta\alpha}\varphi_{\mu} + g_{\mu\beta}\varphi_{\alpha} - g_{\alpha\mu}\varphi_{\beta}) = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} + n\varphi_{\alpha}$$

から

$$C^{\mu}_{\alpha\mu|\beta}(P) = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu|\beta}(P) + n\varphi_{\alpha|\beta} \tag{7}$$

第三項での $g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\beta\lambda}(P)C^{\lambda}_{\alpha\mu}(P)$ は、$C^{\mu}_{\alpha\beta}(P)$ と $C^{\mu}_{\alpha\mu}(P)$ が

$$C^{\mu}_{\alpha\beta}(P) = g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha}\varphi_{\beta} + g_{\beta\nu}\varphi_{\alpha} - g_{\alpha\beta}\varphi_{\nu}) = \delta^{\mu}_{\alpha}\varphi_{\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\varphi_{\alpha} - g_{\alpha\beta}\varphi^{\mu}$$

であることから

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\beta\lambda}(P)C^{\lambda}_{\alpha\mu}(P) &= g^{\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\beta}\varphi_{\lambda} + \delta^{\mu}_{\lambda}\varphi_{\beta} - g_{\beta\lambda}\varphi^{\mu})(\delta^{\lambda}_{\alpha}\varphi_{\mu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\alpha} - g_{\alpha\mu}\varphi^{\lambda}) \\
&= g^{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\beta}\varphi_{\lambda}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\varphi_{\mu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\alpha} - g_{\alpha\mu}\varphi^{\lambda}) + g^{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\lambda}\varphi_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\varphi_{\mu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\alpha} - g_{\alpha\mu}\varphi^{\lambda}) \\
&\quad - g^{\alpha\beta}g_{\beta\lambda}\varphi^{\mu}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\varphi_{\mu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\alpha} - g_{\alpha\mu}\varphi^{\lambda}) \\
&= \varphi_{\lambda}(1+1-n)\varphi^{\lambda} + n\varphi^{\alpha}\varphi_{\alpha} - n\varphi^{\mu}\varphi_{\mu} \\
&= (2-n)\varphi^{\mu}\varphi_{\mu}
\end{aligned} \tag{8}$$

第四項の $g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\mu\lambda}(P)C^{\lambda}_{\alpha\beta}(P)$ は

$$g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\beta}(P)=g^{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}\varphi_{\beta}+g^{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\beta}\varphi_{\alpha}-g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\varphi^{\mu}=(2-n)\varphi^{\mu}$$

$$C^{\mu}_{\alpha\mu}(P)=-\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}(P)+g^{\mu\beta}(g_{\beta\alpha}\varphi_{\mu}+g_{\mu\beta}\varphi_{\alpha}-g_{\alpha\mu}\varphi_{\beta})=n\varphi_{\alpha}$$

であることから

$$g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\mu\lambda}(P)C^{\lambda}_{\alpha\beta}(P)=(2-n)n\varphi_{\lambda}\varphi^{\lambda} \tag{9}$$

(8)〜(9) をリーマンテンソルにいれることで

$$\begin{aligned}
R=&-g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P)+g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\alpha\mu|\beta}(P)-g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\beta\lambda}(P)C^{\lambda}_{\alpha\mu}(P)+g^{\alpha\beta}C^{\mu}_{\mu\lambda}(P)C^{\lambda}_{\alpha\beta}(P)\\
&=g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P)-(2-n)\varphi^{\mu}_{|\mu}+g^{\alpha\beta}(-\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu|\beta}(P)+n\varphi_{\alpha|\beta})\\
&\quad-(2-n)\varphi^{\mu}\varphi_{\mu}+(2-n)n\varphi^{\mu}\varphi_{\mu}\\
&=g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P)-g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu|\beta}(P)\\
&\quad-(2-n-2n+n^2)\varphi^{\mu}\varphi_{\mu}-(2-n)\varphi^{\mu}_{|\mu}+ng^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha|\beta}\\
&=\tilde{R}-(n-1)(n-2)\varphi^{\mu}\varphi_{\mu}+2(n-1)\varphi^{\mu}_{|\mu}
\end{aligned} \tag{10}$$

$\tilde{R}$ はクリストッフェル記号によるリーマンテンソルで

$$\begin{aligned}
\tilde{R}&=g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P)-g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu|\beta}(P)-g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}(P)\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}(P)+g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}(P)\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(P)\\
&=g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\mu}(P)-g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu|\beta}(P)
\end{aligned}$$

としています。今は点 P で計算していることと、φ^{μ} の共変微分は

$$\varphi^{\mu}_{||\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\phi^{\mu})_{|\mu}\qquad(g=\det g_{\mu\nu})$$

となっていることから

$$\varphi^{\mu}_{|\mu}(P)=\frac{1}{\sqrt{-g}}\sqrt{-g}\varphi^{\mu}_{|\mu}(P)=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\varphi^{\mu})_{|\mu}(P)=\varphi^{\mu}_{||\mu}(P)$$

という共変な形に変更できて

$$R=\tilde{R}-(n-1)(n-2)\varphi^{\mu}\varphi_{\mu}+2(n-1)\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\varphi^{\mu})_{|\mu}$$

右辺は座標変換で形を変えないことから (右辺もスカラーになっている)、この R は任意の座標系で成立します (測地座標系でなくても成立するので、$\tilde{R}$ はクリストッフェル記号でのリーマンテンソルと同じ)。

これで準備ができたので、重力と電磁場を含んだラグランジアンを作ります。マクスウェル方程式はゲージ変換に対して不変なので、ラグランジアンはゲージ変換に対して不変になるようにします。なので、ゲージ不変な量で構成する必要があります。

ゲージ変換で不変なベクトルとして v^μ（ゲージ変換後も v^μ）があるとすると、v_μ は

$$v_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu \ \Rightarrow\ \overline{v}_\mu = \overline{g}_{\mu\nu}v^\nu = f(x)g_{\mu\nu}v^\nu = f(x)v_\mu$$

と変換され、v_μ はゲージ変換で不変でなくなります。適当なテンソルに対して同じように変換後に

$$\overline{T}^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots} = f^n(x)T^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots}$$

という形を出すとき、n をゲージ変換に対する重み (weight) と呼びます。$n=0$ ならゲージ変換に対して不変なテンソルで、$n\neq 0$ ならゲージ不変でないことになります。というわけで、重みが 0 になる量を作ります。電磁場に対応する $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変ですが反変では

$$\overline{F}^{\mu\nu} = \overline{g}^{\mu\alpha}\overline{g}^{\nu\beta}\overline{F}_{\alpha\beta} = f^{-2}F_{\alpha\beta}$$

となって、重み -2 を持ちます。このため $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ はゲージ不変になっていません。これをどうにかするために相対論でおなじみの $\sqrt{-g}$ を見てみると、$\overline{g} = \det f(x)g_{\mu\nu} = f^4\det g_{\mu\nu}$ (4 次元の場合) から

$$\sqrt{-\overline{g}} = f^2\sqrt{-g}$$

となって、重さ 2 であることが分かります。なので

$$\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

とすればゲージ不変になります。

重力の方はリッチスカラーで書けるはずですが、リッチスカラーによる $\sqrt{-g}R$ はゲージ不変になっていません。リーマンテンソルは接続で書かれているのでゲージ不変で、それの縮約であるリッチテンソルもゲージ不変です。しかし、リッチスカラーはそれに計量をかけて作るので、計量 $g^{\mu\nu}$ による重み -1 によって、リッチスカラーの重みは -1 になります。このため

$$\sqrt{-g}R^2$$

としないとゲージ不変にならないので、これを使います。

というわけで、ゲージ不変なラグランジアンとして

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R^2 + A\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

というのが作れ (A は定数)、作用は

$$I=\int d^4x\mathcal{L}=\int d^4x\sqrt{-g}(R^2+AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{11}$$

これの変分を取ることで運動方程式を取り出せて、計量の変分を取って $\phi_\mu=0$ とすればアインシュタイン方程式、ϕ_μ の変分からマクスウェル方程式が出てきますが、面倒なので別の方向から見ます。

変分 δ は計量と φ_μ に対してとします。素直に行うと

$$\delta I=\int d^4x(2R\sqrt{-g}\delta R+R^2\delta\sqrt{-g}+A\delta(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}))$$

明らかに R^2 がいると計算が面倒になりそうなので、変形させます。ラグランジアンがゲージ不変であることと、リッチスカラーはゲージ不変でないことを利用して、適当なゲージ変換によってリッチスカラーが定数になるとします。しかし、変分で $\delta R=0$ になるとは限らないので、その項は残すことにして、$R=\lambda$ (λ は定数) とすれば

$$\begin{aligned}
\delta I&=\int d^4x2R\big(\sqrt{-g}\delta R+\frac{1}{2}R\delta\sqrt{-g}+\frac{1}{2R}A\delta(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\big)\\
&=\int d^4x2R\big(\delta(\sqrt{-g}R)-R\delta\sqrt{-g}+\frac{1}{2}R\delta\sqrt{-g}+\frac{1}{2R}A\delta(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\big)\\
&=\int d^4x2\lambda\big(\delta(\sqrt{-g}R)-\lambda\delta\sqrt{-g}+\frac{1}{2}\lambda\delta\sqrt{-g}+\frac{1}{2\lambda}A\delta(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\big)\\
&=2\lambda\int d^4x\big(\delta(\sqrt{-g}R)-\frac{1}{2}\lambda\delta\sqrt{-g}+\frac{1}{2\lambda}A\delta(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\big)
\end{aligned}$$

これが 0 になればいいので

$$0=\delta\int d^4x\sqrt{-g}\big(R+\frac{1}{2\lambda}AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\lambda\sqrt{-g}\big)$$

第一項に $n=4$ として (10) を入れると

$$0=\delta\int d^4x\sqrt{-g}(\tilde{R}-6\varphi^\mu\varphi_\mu+6\varphi^\mu_{|\mu}+\frac{1}{2\lambda}AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\lambda)$$

これの第三項は

$$\varphi^\mu_{|\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\varphi^\mu)_{|\mu}$$

と書けることから

$$\int d^4x\sqrt{-g}\varphi^\mu_{|\mu}=\int d^4x(\sqrt{-g}\varphi^\mu)_{|\mu}$$

という表面積分になるので、変分問題での φ^μ の境界で消えるとできます。よって

$$0=\delta\int d^4x\sqrt{-g}(\tilde{R}+\frac{1}{2\lambda}AF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-6\varphi^\mu\varphi_\mu-\frac{1}{2}\lambda)$$

第二項の λ を消すために $F_{\mu\nu}$ を

$$F'_{\mu\nu}=\sqrt{\lambda}F_{\mu\nu}$$

として、ついでに

$$\varphi'_\mu=\sqrt{\lambda}\varphi_\mu$$

とすれば

$$0=\delta\int d^4x\sqrt{-g}(\tilde{R}+\frac{1}{2}AF'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}-\lambda(6\varphi'^\mu\varphi'_\mu+\frac{1}{2}))$$

これで第一項と第二項は「ラグランジアン密度」でのアインシュタイン方程式とマクスウェル方程式を出す項と一致します。よって、ワイル幾何学でのゲージ不変性による作用 (11) で重力と電磁場が記述されたことになります。残っている第三項は宇宙項と同じように作用します。

このようにして重力と電磁場をワイル幾何学におけるゲージ不変性の概念で統一して扱えたように見えますが、アインシュタインによる単純な指摘で物理としては否定されています。これを簡単に見ておきます。

ベクトルの大きさの変化

$$\frac{dl}{l}=\varphi_\mu dx^\mu$$

に戻ります。適当な経路で積分することで、その経路に沿ったベクトルの大きさ l は

$$l=l_0\exp[\int_C\varphi_\mu dx^\mu]$$

と与えられます。l_0 は $\varphi_\mu=0$ のときで定数です ($dl/l=0$ を積分すれば $l=const$)。同じ始点から 2 つの経路 C_1,C_2 によって同じ終点に行ったとすれば、それぞれの経路でのベクトルの大きさは

$$l_1=l_0\exp[\int_{C_1}\varphi_\mu dx^\mu]\ ,\ l_2=l_0\exp[\int_{C_2}\varphi_\mu dx^\mu]$$

始点と終点が同じなので C_1,C_2 による経路は閉じていることから、$C=C_1-C_2$ として

$$\log l_1-\log l_2=\int_{C_1}\varphi_\mu dx^\mu-\int_{C_2}\varphi_\mu dx^\mu=\oint_C\varphi_\mu dx^\mu$$

積分はストークスの定理によって

$$\oint_C\varphi_\mu dx^\mu=\frac{1}{2}\int_S(\varphi_{\mu|\nu}-\varphi_{\nu|\mu})dS^{\nu\mu}$$

となります。これが 0 であるためには $\varphi_{\mu|\nu}-\varphi_{\nu|\mu}=F_{\mu\nu}=0$ である必要があり、このときは経路の依存性がなく、$l_1=l_2$ となります (リーマン幾何学になる)。しかし、今は $F_{\mu\nu}\neq0$ なので、l_1,l_2 が異なることになり、ベクトルの大きさが経路に依存します (φ_μ に依存)。l はベクトルの大きさなので l によって時間を測れることを考え

ると (物体の周期的な動きから時間を与えられる)、各経路ごとで時計の刻み方が異なることになります。もっと単純化して、φ_0 のみとし、φ_0 は x^0 に依存していないとすれば

$$l = l_0 \exp[\int_0^{x_0} \varphi_0 dx'^0] = l_0 \exp[\varphi_0 x^0]$$

$x^0 = 0$ のときを l_0 としています。l を周期 (時間間隔)τ と見なせば

$$\tau = \tau_0 \exp[\varphi_0 x^0]$$

φ_0 は x^0 以外には依存しているので、その依存性から、同じ x^0 が与えられていても位置によって τ の値が異なることが分かります。なので、異なった φ_0 を持つ位置にいる時計は異なった進み方をします。

この話からでは、原子時計 (原子のスペクトル) は原子が現在の位置と過去にどこにいたかに依存していることになります。しかし、原子のスペクトルでそんなことは起きていません。というわけで、この統一場理論は数学としては問題ないが、物理としては使えないとされました。

このようにして統一場理論としては失敗しましたが、ゲージ変換の考え方は量子力学に組み込まれていきました。ここら辺の話は物理学史でも見れば書いてあると思います (例えば基研研究会の場の量子論 2004 での「ゲージ理論をめぐって」(九後汰一郎著) というのにも書いてあります)。この 1918 年にワイルによって示されたゲージ変換の考えは、素粒子の標準模型にまで繋がっていき、現代物理の基本的な原理となっています (約 100 年にわたってゲージ理論をおいかけているとも言えます)。

・補足

計量の変換をゲージ変換と言ってきましたが、これは共形変換と呼ばれるものと一致しています。リーマン空間における計量 $g_{\mu\nu}$ から変換

$$\overline{g}_{\mu\nu}(x) = f(x) g_{\mu\nu}(x)$$

によって $\overline{g}_{\mu\nu}$ を作ります。この計量 $\overline{g}_{\mu\nu}$ をリーマン空間の計量としたとき、ベクトル v^μ の長さは

$$\bar{l}^2 = \overline{g}_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = f(x) g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = f(x) l^2$$

と変化します (計量を変更するたけなのでベクトルは v^μ のまま)。これに対して、2 つのベクトル v^μ, w^μ の間の角度は（内積の定義 $g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = |v||w| \cos\theta$ から）

$$\cos\theta = \frac{\overline{g}_{\mu\nu} v^\mu w^\nu}{\sqrt{\overline{g}_{\mu\nu} v^\mu v^\nu} \sqrt{\overline{g}_{\mu\nu} w^\mu w^\nu}} = \frac{f(x) g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu}{f(x) \sqrt{g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu} \sqrt{g_{\mu\nu} w^\mu w^\nu}} = \frac{g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu} \sqrt{g_{\mu\nu} w^\mu w^\nu}}$$

となって変化しません。このように角度を変えない変換を共形変換と言います。上ではこの変換をゲージ変換と呼んできましたが、現在では共形変換をゲージ変換と呼ぶことはないです (ワイル変換と呼ぶことはあります)。この変換の形だと $\log f$ が出てくるので、$f(x)$ を

$$\overline{g}_{\mu\nu}(x) = e^{\Lambda(x)} g_{\mu\nu}(x)$$

とすることも多いです。

これは計量に対する変換ですが、座標の無限小変換としても共形変換を作ることができて、それによって作られる理論が共形場理論です (場の量子論の「共形変換」参照)。