Vaidya 解

エネルギー放射のある静的でない球対称な空間でのアインシュタイン方程式の解を求めます。
求め方はシュバルツシルト解と同じです。

「シュバルツシルト解～外部～」で触れたように、静的の条件を外しても真空ではシュバルツシルト解になってしまいます。なので、真空とせずにエネルギー・運動量テンソルに値を持たせます。このとき、単にエネルギーが放射されている空間を考え、物質分布はないとします。つまり、静的でなく球対称でエネルギー放射している物体による空間の解を求めます。この解を Vaidya 解と言います。Vaidya 解は宇宙検閲仮説 (cosmic censorship conjecture) と呼ばれるものを扱うときに使われたりします (「ペンローズ過程」参照)。

アインシュタインテンソルを求めます。「シュバルツシルト解～外部～」では時間 t を s の関数としてましたが、ここでは最初から時間の微分の形にして求めます (「シュバルツシルト解～外部～」での測地線方程式を使った場合でも同じ結果になる)。計量の形はシュバルツシルト解と同じように

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \ , \ g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

静的の条件を外しても ds^2 の形は変わりませんが、ν と λ を t と r に依存するようにしています。

クリストッフェル記号を求めていきます。直接、クリストッフェル記号を計量から求めます。クリストッフェル記号は計量を使えば

$$\begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda})$$

$\mu = 0, 1$ では

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{\lambda 0}(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda})$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{\lambda 1}(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda})$$

$\alpha = 0$ とすれば

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{\lambda 0}(\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^\lambda}) = \frac{1}{2}g^{00}(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^0})$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{\lambda 1}(\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^\lambda}) = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 1}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^1})$$

$\beta=0,1$ のときだけが消えずに残って

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{00}(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}+\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}) = \frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{00}(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}) = \frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\ 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0}+\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}) = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}) = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}$$

$\beta=2,3$ で消えるのは、( ) 内の第一項は t,r に依存しているので $\beta=2,3$ では消えるからです。
$\alpha=1$ とすれば

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ \beta \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\lambda 0}(\frac{\partial g_{\lambda 1}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{1\beta}}{\partial x^\lambda}) = \frac{1}{2}g^{00}(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{1\beta}}{\partial x^0})$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1\ \beta \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\lambda 1}(\frac{\partial g_{\lambda 1}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{1\beta}}{\partial x^\lambda}) = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\beta 1}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{1\beta}}{\partial x^1})$$

このときも $\beta=0,1$ だけが消えずに

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{00}(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}) = -\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}) = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

これらに計量の成分を入れていけば

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\,0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} e^{-\nu} \frac{\partial e^{\nu}}{\partial x^0} = \frac{\dot{\nu}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\,1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} e^{-\nu} \frac{\partial e^{\nu}}{\partial x^1} = \frac{\nu'}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\,1 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda - \nu}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\,0 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \frac{\partial e^{\nu}}{\partial x^1} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu - \lambda}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\,1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \frac{\dot{\lambda}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1\,1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{\lambda'}{2}$$

ドットは x^0、「$'$」は $x^1 = r$ の偏微分です。ν, λ の t 依存性がなければ「シュバルツシルト解〜外部〜」と同じです。
　残っているクリストッフェル記号もシュバルツシルト解と同じになるので、まとめれば

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\,0 \end{array} \right\} = \frac{\dot{\nu}}{2} \, , \, \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\,1 \end{array} \right\} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda - \nu} \, , \, \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\,0 \end{array} \right\} = \frac{\nu'}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\,0 \end{array} \right\} = \frac{\nu' e^{\nu - \lambda}}{2} \, , \, \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\,1 \end{array} \right\} = \frac{\dot{\lambda}}{2} \, , \, \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1\,1 \end{array} \right\} = \frac{\lambda'}{2} \, , \, \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\,2 \end{array} \right\} = -r e^{-\lambda} \, , \, \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 3\,3 \end{array} \right\} = -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1\,2 \end{array} \right\} = \frac{1}{r} \, , \, \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 3\,3 \end{array} \right\} = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 1\,3 \end{array} \right\} = \frac{1}{r} \, , \, \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2\,3 \end{array} \right\} = \cot \theta$$

これが静的の条件を外したときのクリストッフェル記号の成分です。
　アインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi\kappa}{c^2} T_{\mu\nu}$$

を解くために、アインシュタインテンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

を求めます。リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ は

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \beta \end{matrix} \right\}_{|\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau\ \mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta\ \nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau\ \beta \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{|\alpha} - (\log\sqrt{-g})_{|\mu|\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau\ \mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta\ \nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\} (\log\sqrt{-g})_{|\tau}
\end{aligned}
$$

各成分を見ていきます。R_{00} では

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\}_{|\alpha} - (\log\sqrt{-g})_{|0|0} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} (\log\sqrt{-g})_{|\tau} \\
&= \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\}_{|0} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\}_{|1} - (\log\sqrt{-g})_{|0|0} - \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} \\
&\quad - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} (\log\sqrt{-g})_{|0} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} (\log\sqrt{-g})_{|1} \\
&= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\}_{|1} - \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} (\log\sqrt{-g})_{|1} \\
&\quad + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\}_{|0} - (\log\sqrt{-g})_{|0|0} - \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} (\log\sqrt{-g})_{|0} \\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}) + \frac{\ddot{\nu}}{2} - \frac{1}{2}(\ddot{\nu} + \ddot{\lambda}) - \frac{\dot{\nu}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\nu}}{2}\frac{1}{2}(\dot{\nu} + \dot{\lambda}) \\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}) - \frac{1}{2}\ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4}
\end{aligned}
$$

R_{11} では

$$
\begin{aligned}
R_{11} =& \left\{\begin{matrix} \alpha \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}_{|\alpha} - (\log\sqrt{-g})_{|1|1} - \left\{\begin{matrix} \beta \\ \tau\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \tau \\ \beta\ 1 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \tau \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|\tau} \\
=& \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}_{|0} + \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}_{|1} - (\log\sqrt{-g})_{|1|1} - \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0\ 1 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1 \\ 0\ 1 \end{matrix}\right\} \\
& - \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 3 \\ 3\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 3 \\ 3\ 1 \end{matrix}\right\} \\
& + \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|0} + \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|1} \\
=& \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}_{|1} - (\log\sqrt{-g})_{|1|1} - \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0\ 1 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\} \\
& - \left\{\begin{matrix} 3 \\ 3\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 3 \\ 3\ 1 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|1} \\
& + \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}_{|0} - 2\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1 \\ 0\ 1 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|0} \\
=& -\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{\ddot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot\lambda}{2}(\dot\lambda - \dot\nu)e^{\lambda-\nu} - \frac{\dot\lambda^2}{2}e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}\frac{1}{2}(\dot\lambda + \dot\nu) \\
=& -\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + (\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{2} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{2} - \frac{\dot\lambda^2}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{4} + \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4})e^{\lambda-\nu} \\
=& -\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + (\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4})e^{\lambda-\nu}
\end{aligned}
$$

R_{22} と R_{33} は静的な場合と同じになります。
　そうすると、リッチスカラーは

$$
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
g^{00}R_{00} &= \frac{e^{-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}) - e^{-\nu}(\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4}) \\
g^{11}R_{11} &= -\frac{e^{-\lambda}}{2}(-\nu'' - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{2\lambda'}{r}) - e^{-\nu}(\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4}) \\
g^{22}R_{22} &= -r^{-2}(1 - (e^{-\lambda}r)' - re^{-\lambda}\frac{\lambda' + \nu'}{2}) = -r^{-2}(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2}) \\
g^{33}R_{33} &= g^{33}R_{22}\sin^2\theta = -r^{-2}(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2})
\end{aligned}
$$

これらを足すことでリッチスカラーは

$$R=e^{-\lambda}(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r})-e^{-\nu}(\ddot{\lambda}+\frac{\dot{\lambda}^2}{2}-\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2})-2r^{-2}(1-e^{-\lambda}+re^{-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2})$$

まだ消えずに残るリッチテンソルがあって

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \left\{\begin{array}{c}\alpha\\ 0\,1\end{array}\right\}_{|\alpha}-(\log\sqrt{-g})_{|0|1}-\left\{\begin{array}{c}\beta\\ \tau\,0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\tau\\ \beta\,1\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}\tau\\ 0\,1\end{array}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|\tau}\\
&= \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\,1\end{array}\right\}_{|0}+\left\{\begin{array}{c}1\\ 0\,1\end{array}\right\}_{|1}-(\log\sqrt{-g})_{|0|1}-\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\,0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\,1\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{c}0\\ 1\,0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}1\\ 0\,1\end{array}\right\}\\
&\quad -\left\{\begin{array}{c}1\\ 0\,0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}0\\ 1\,1\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{c}1\\ 1\,0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}1\\ 1\,1\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\,1\end{array}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|0}+\left\{\begin{array}{c}1\\ 0\,1\end{array}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|1}\\
&= \frac{\dot{\nu}'}{2}+\frac{\dot{\lambda}'}{2}-\frac{1}{2}(\dot{\lambda}'+\dot{\nu}')-\frac{\dot{\nu}\nu'}{4}-\frac{\dot{\lambda}\nu'}{4}-\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}-\frac{\dot{\lambda}\lambda'}{4}\\
&\quad +\frac{\nu'}{2}\frac{1}{2}(\dot{\lambda}+\dot{\nu})+\frac{\dot{\lambda}}{2}(\frac{1}{2}(\lambda'+\nu')+2\frac{1}{r})\\
&= -\frac{\dot{\nu}\nu'}{4}-\frac{\dot{\lambda}\nu'}{4}-\frac{\dot{\lambda}\nu'}{4}-\frac{\dot{\lambda}\lambda'}{4}+\frac{\dot{\lambda}\nu'}{4}+\frac{\dot{\nu}\nu'}{4}+\frac{\dot{\lambda}\lambda'}{4}+\frac{\dot{\lambda}\nu'}{4}+\frac{\dot{\lambda}}{r}\\
&= \frac{\dot{\lambda}}{r}
\end{aligned}$$

これらを使うことでアインシュタインテンソルは求まります。

G_{00} は

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}) - \frac{1}{2}\ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{\nu}\big(e^{-\lambda}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}) - e^{-\nu}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}) - 2r^{-2}(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2})\big) \\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}) - \frac{1}{2}\ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} \\
&\quad - \big[\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}) - \frac{1}{2}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}) - e^{\nu}r^{-2}(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2})\big] \\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}) - \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}) \\
&\quad + e^{\nu}r^{-2}(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2}) - \frac{1}{2}\ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \frac{1}{2}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}) \\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}\frac{\nu'+\lambda'}{r} + e^{\nu}r^{-2}\big(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2}\big) \\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}\frac{\lambda'+\nu'}{r} + \frac{e^{\nu} - e^{\nu-\lambda}}{r^2} + e^{\nu-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2r} \\
&= e^{\nu-\lambda}\frac{\lambda'}{r} + \frac{e^{\nu} - e^{\nu-\lambda}}{r^2}
\end{aligned}
$$

添え字を上にあげれば

$$
{G_0}^0 = g^{00}G_{00} = e^{-\nu}(e^{\nu-\lambda}\frac{\lambda'}{r} + \frac{e^{\nu} - e^{\nu-\lambda}}{r^2}) = e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2}
$$

G_{11} では

$$
\begin{aligned}
G_{11} = &- \frac{1}{2}\nu'' - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + (\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4})e^{\lambda-\nu} \\
&+ \frac{1}{2}e^{\lambda}\big(e^{-\lambda}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}) - e^{-\nu}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}) - 2r^{-2}(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2})\big) \\
= &- \frac{1}{2}\nu'' - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + (\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4})e^{\lambda-\nu} \\
&+ \frac{1}{2}\big(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}\big) - \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}) - e^{\lambda}r^{-2}\big(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2}\big) \\
= &- \frac{1}{2}\big(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} - \frac{2\lambda'}{r}\big) + \frac{1}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}) - e^{\lambda}r^{-2}\big(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda'-\nu'}{2}\big) \\
= &\frac{1}{2}\frac{\lambda'+\nu'}{r} - \frac{e^{\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'-\nu'}{2r} \\
= &\frac{\nu'}{r} - \frac{e^{\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2}
\end{aligned}
$$

添え字を上げれば

$$G_1{}^1 = -e^{-\lambda}(\frac{\nu'}{r} - \frac{e^{\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2}) = -e^{-\lambda}(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2}$$

G_{22} は

$$\begin{aligned}
G_{22} &= 1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2} \\
&\quad - \frac{1}{2}g_{22}\big(e^{-\lambda}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}) - e^{-\nu}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}) - 2r^{-2}(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2})\big) \\
&= 1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2}r^2\big[e^{-\lambda}\big(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\big) - e^{-\nu}\big(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\big) - 2r^{-2}\big(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2}\big)\big] \\
&= 1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2} + \frac{1}{2}r^2e^{-\lambda}\big(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\big) - \big(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2}\big) \\
&\quad - \frac{1}{2}r^2e^{-\nu}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}) \\
&= \frac{1}{2}r^2e^{-\lambda}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}) - \frac{1}{2}r^2e^{-\nu}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2})
\end{aligned}$$

添え字を上げて

$$\begin{aligned}
G_2{}^2 &= -\frac{1}{r^2}\big(\frac{1}{2}r^2e^{-\lambda}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}) - \frac{1}{2}r^2e^{-\nu}(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2})\big) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\big(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\big) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\big(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\big)
\end{aligned}$$

G_{33} は

$$G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R = R_{22}\sin^2\theta - \frac{1}{2}g_{22}\sin^2\theta R = G_{22}\sin^2\theta$$

なので、G_{22} に $\sin^2\theta$ をかければよくて、さらに $G^3{}_3$ は

$$G_3{}^3 = g^{33}G_{33} = g^{22}\sin^{-2}\theta G_{33} = g^{22}G_{22}$$

となっているので

$$G_3{}^3 = G_2{}^2$$

と分かります。残っている $G_0{}^1$ は単純に

$$G_{01} = R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r}\ ,\ G_0{}^1 = -e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r}$$

まとめると

$$
\begin{aligned}
&{G_0}^0 = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \\
&{G_0}^1 = -e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} \\
&{G_1}^1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \\
&{G_2}^2 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\right) \\
&{G_3}^3 = {G_2}^2
\end{aligned}
$$

これが静的の条件を外した球対称なアインシュタインテンソルです。これを使って真空のアインシュタイン方程式を解けば、シュバルツシルト解となります (静的という条件を入れなくても)。

今は真空でなくエネルギー放射のある空間を考えます。放射しているのが電磁場とすれば、エネルギー・運動量テンソルは

$$
T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(F^{\mu}_{\ \alpha}\ F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})
$$

各成分は

$$
\begin{aligned}
c^2T^{00} &= g^{00}F_{0\alpha}F^{\alpha 0} + \frac{1}{4}g^{00}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\
&= (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + \frac{1}{2}g^{00}(-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\
c^2T^{11} &= g^{11}F_{1\alpha}F^{\alpha 1} + \frac{1}{4}g^{11}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\
&= -(E_x^2 - B_z^2 - B_y^2) + \frac{1}{2}g^{11}(-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\
&= -\frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + B_x^2 - B_z^2 - B_y^2) \\
c^2T^{10} &= g^{11}F_{1\alpha}F^{\alpha 0} = B_zE_y - B_yE_z \\
c^2T^{12} &= g^{11}F_{1\alpha}F^{\alpha 2} = -E_xE_y - B_yB_x
\end{aligned}
$$

このとき、電場が y 軸に沿っているなら電場と磁場の関係から $E_x = E_z = B_x = B_y = 0,\ E_y = B_z$ となっているので、エネルギー密度 ρ_E を表す T^{00} は

$$
c^2T^{00} = c^2T^{11} = c^2T^{10} = \frac{1}{2}(E_y^2 + B_z^2) = \rho_E
$$

また、質量密度の次元にするために

$$
T^{00} = \rho_E/c^2 = \rho
$$

として、質量密度 ρ を定義します (物質の密度ではない)。
　一般的な座標系に移して使います。そのためには単純に座標変換の形にすればいいだけなので

$$\overline{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^\beta}T^{\alpha\beta} = \Big(\frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^0}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^0}T^{00} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^1}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^1}T^{11} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^1}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^0}T^{10} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^0}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^1}T^{01}\Big)$$
$$= \Big(\frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^0}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^0} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^1}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^1} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^1}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^0} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^0}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^1}\Big)\rho$$

そして、電磁場なのでヌル測地線を通るとして $ds^2 = 0$ から

$$d\overline{x}^0 = d\overline{x}^1$$

とします。このときの ds を $d\tau$ と書くことにして

$$d\tau = d\overline{x}^0 = d\overline{x}^1$$

と定義します。$ds^2 = 0$ はどの座標系でも成り立つので

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$$

となっていることから

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^\nu}\frac{d\overline{x}^\nu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^0}\frac{d\overline{x}^0}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^1}\frac{d\overline{x}^1}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^0} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \overline{x}^1}$$

よって

$$\overline{T}^{\mu\nu} = (\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^0} + \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial \overline{x}^1})\rho = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\rho$$

と求まります。$dx^\mu/d\tau$ は 4 元速度 u_μ(無次元) になって

$$\overline{T}^{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \quad (u_\mu u^\mu = 0)$$

と書けます (エネルギー・運動量テンソルは質量密度の次元)。これを放射している空間でのエネルギー・運動量テンソルとします。これ以降は $\overline{T}^{\mu\nu}$ を $T^{\mu\nu}$ と書きます。
　先に u^μ の関係を出しておきます。動径方向のみに放射されているとすれば、$u_2 = u_3 = 0$ なので

$${T_0}^0 = \rho u_0 u^0 \ , \ {T_1}^1 = \rho u_1 u^1 \ , \ {T_1}^0 = \rho u_1 u^0$$

また、$u_\mu u^\mu = 0$ から

$$u_0 u^0 + u_1 u^1 = g_{00}u^0 u^0 + g_{11}u^1 u^1 = e^{\nu(r,t)}(u^0)^2 - e^{\lambda(r,t)}(u^1)^2 = 0$$

となっているので、u^0 と u^1 は

$$e^{\nu/2}u^0 = e^{\lambda/2}u^1$$

という関係になっています。

ここで境界条件を加えておきます。現実的な状況を考えれば、星の内部 (半径 $R_i(t)$) の放射のエネルギーと物質がいる領域 ($r \leq R_i(t)$)、星の外側の放射エネルギーのみの領域 ($R_i(t) \leq r \leq R_e(t)$)、そして放射がなくなる領域 ($r \geq R_e(t)$) の 3 つに分割できます。ここでは放射エネルギーのみの領域を考えますが、$r = R_e(t)$ でシュバルツシルト解とつながるようにします (例えば、t_1, r_1 で境界に行くなら $r_1 = R_e(t_1)$)。しかし、これから作る計量は特殊なことをしなくても $r = R_e(t)$ で連続的になるので特に気にする必要はないです。

消えないアインシュタインテンソルは $G_{00}, G_{01}, G_{11}, G_{22}, G_{33}$ です。それに対して、0 でないエネルギー・運動量テンソルは T_{00}, T_{01}, T_{11} です。G_{22}, G_{33} に対してはエネルギー・運動量テンソルが 0 なので、特に気にする必要はありません。他の場合は、右辺が 0 になるように組み合わせて行きます。

${T_0}^0, {T_1}^1$ を足せば ${T_0}^0 + {T_1}^1 = 0$ なので

$${G_0}^0 + {G_1}^1 = \frac{8\pi\kappa}{c^2}({T_0}^0 + {T_1}^1) = 0 \tag{1}$$

${T_0}^1$ と ${T_0}^0$ を足すと

$$\begin{aligned}
{T_0}^1 + {T_0}^0 &= \rho u_0 u^1 + \rho u_0 u^0 \\
&= \rho g_{00} u^0 u^1 + \rho g_{00} u^0 u^0 \\
&= \rho e^{\nu} u^0 u^1 + \rho e^{\nu} u^0 u^0 \\
&= \rho e^{\nu} e^{\nu/2} e^{-\lambda/2} (u^0)^2 + \rho e^{\nu} (u^0)^2 \\
&= \rho e^{(3\nu-\lambda)/2} (u^0)^2 + \rho e^{\nu} (u^0)^2
\end{aligned}$$

となるので

$$-{T_0}^1 e^{-(\nu-\lambda)/2} + {T_0}^0 = 0$$

から

$$-{G_0}^1 e^{-(\nu-\lambda)/2} + {G_0}^0 = \frac{8\pi\kappa}{c^2}(-{T_0}^1 e^{-(\nu-\lambda)/2} + {T_0}^0) = 0 \tag{2}$$

(1),(2) から、$e^{\nu(r,t)}, e^{\lambda(r,t)}$ を決めるための方程式を導きます。

シュバルツシルト解との対応から

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r,t)}{r}$$

とおきます (放射のなくなる空間ではシュバルツシルト解と一致する)。これから $\lambda(r,t)$ の時間微分と r 微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{-\lambda} = -\dot{\lambda}e^{-\lambda}\ ,\ \frac{\partial}{\partial r}e^{-\lambda} = -\lambda' e^{-\lambda}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}(1-\frac{2m}{r}) = -\frac{2\dot{m}}{r}\ ,\ \frac{\partial}{\partial r}(1-\frac{2m}{r}) = -\frac{2m'}{r}+\frac{2m}{r^2}\Big)$$

から

$$\dot{\lambda} = \frac{2\dot{m}}{r}e^{\lambda}\ ,\ \lambda' = e^{\lambda}(\frac{2m'}{r}-\frac{2m}{r^2})$$

となっています。

(2) を変形していけば

$$\begin{aligned}
0 =&\ -{G_0}^1 e^{-(\nu-\lambda)/2} + {G_0}^0 \\
&= e^{-(\nu+\lambda)/2}\frac{\dot{\lambda}}{r} + e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2} \\
&= e^{-\nu/2}e^{\lambda/2}\frac{2\dot{m}}{r^2} + e^{-\lambda}(\frac{1}{r}e^{\lambda}(\frac{2m'}{r}-\frac{2m}{r^2}) - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2} \\
&= e^{-\nu/2}e^{\lambda/2}\frac{2\dot{m}}{r^2} + \frac{2m'}{r^2} - \frac{2m}{r^3} - \frac{1}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \\
&= e^{-\nu/2}e^{\lambda/2}\frac{2\dot{m}}{r^2} + \frac{2m'}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2}(1-\frac{2m}{r}) \\
&= e^{-\nu/2}e^{\lambda/2}\frac{2\dot{m}}{r^2} + \frac{2m'}{r^2} \\
&= e^{-\nu/2}\dot{m} + e^{-\lambda/2}m'
\end{aligned}$$

この式から

$$e^{\nu/2} = -\frac{\dot{m}}{m'}e^{\lambda/2} = -\frac{\dot{m}}{m'}(1-\frac{2m}{r})^{-1/2}$$

という $e^{\nu/2}$ の式が出てきます。これを (1) に使います。ν' が出てくるので、それを先に求めておくと

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}e^{\nu/2} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu/2} \\
&\frac{\partial}{\partial r}e^{\nu/2} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\dot{m}}{m'}e^{\lambda/2} = -\frac{\dot{m}'}{m'}e^{\lambda/2} + \frac{\dot{m}m''}{m'^2}e^{\lambda/2} - \frac{\lambda'}{2}\frac{\dot{m}}{m'}e^{\lambda/2}
\end{aligned}$$

これらから ν' は

$$\nu' = -\frac{2\dot{m}'}{m'}e^{(\lambda-\nu)/2} + 2\frac{\dot{m}m''}{m'^2}e^{(\lambda-\nu)/2} - \lambda'\frac{\dot{m}}{m'}e^{(\lambda-\nu)/2}$$

そうすると、(1) は

$$
\begin{aligned}
0 = {G_0}^0 + {G_1}^1 &= e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2} \\
&= e^{-\lambda}(\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2}) + \frac{2}{r^2} \\
&= e^{-\lambda}\big(\frac{1}{r}e^{\lambda}(\frac{2m'}{r} - \frac{2m}{r^2}) - \frac{\nu'}{r} - \frac{2}{r^2}\big) + \frac{2}{r^2} \\
&= \frac{1}{r}(\frac{2m'}{r} - \frac{2m}{r^2}) - \frac{\nu'}{r}e^{-\lambda} - \frac{2}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{2}{r^2} \\
&= \frac{1}{r}(\frac{2m'}{r} - \frac{2m}{r^2}) - \frac{1}{r}\big(- \frac{2\dot{m}'}{m'}e^{(\lambda-\nu)/2} + 2\frac{\dot{m}m''}{m'^2}e^{(\lambda-\nu)/2} - \lambda'\frac{\dot{m}}{m'}e^{(\lambda-\nu)/2}\big)e^{-\lambda} \\
&\quad - \frac{2}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{2}{r^2} \\
&= \frac{1}{r}(\frac{2m'}{r} - \frac{2m}{r^2}) - \frac{1}{r}\big(- \frac{2\dot{m}'}{m'} + 2\frac{\dot{m}m''}{m'^2} - \lambda'\frac{\dot{m}}{m'}\big)e^{-(\lambda+\nu)/2} - \frac{2}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{2}{r^2} \\
&= \frac{2m'}{r^2} - \frac{1}{r}\big(- \frac{2\dot{m}'}{m'} + 2\frac{\dot{m}m''}{m'^2} - \lambda'\frac{\dot{m}}{m'}\big)(1 - \frac{2m}{r})^{1/2}\frac{m'}{\dot{m}}(1 - \frac{2m}{r})^{1/2} \\
&\quad - \frac{2}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2m}{r}) + \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{2m'}{r^2} + \frac{1}{r}\big(- \frac{2\dot{m}'}{\dot{m}} + 2\frac{m''}{m'} - \lambda'\big)e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{2m'}{r^2} + \frac{1}{r}\Big(- \frac{2\dot{m}'}{\dot{m}} + 2\frac{m''}{m'} - e^{\lambda}(\frac{2m'}{r} - \frac{2m}{r^2})\Big)e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{2m'}{r^2} + \frac{1}{r}\big(- \frac{2\dot{m}'}{\dot{m}} + 2\frac{m''}{m'}\big)e^{-\lambda} - \big(\frac{2m'}{r^2} - \frac{2m}{r^3}\big) - \frac{1}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{1}{r}\big(- \frac{2\dot{m}'}{\dot{m}} + 2\frac{m''}{m'}\big)e^{-\lambda} + \frac{2m}{r^3} - \frac{1}{r^2}\big(1 - \frac{2m}{r}\big) + \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{1}{r}\big(- \frac{2\dot{m}'}{\dot{m}} + 2\frac{m''}{m'}\big)e^{-\lambda} + \frac{4m}{r^3} \\
(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'})e^{-\lambda} &= \frac{2m}{r^2} \\
(\frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'})\big(1 - \frac{2m}{r}\big) &= \frac{2m}{r^2}
\end{aligned}
$$

というわけで、m に関する微分方程式を導けます。

この微分方程式に対する保存量 (第一積分、first integral) として、

$$
\big(1 - \frac{2m}{r}\big)m' = f(m) \tag{3}
$$

というのが求められます。$f(m)$ は m の任意関数です。保存量なので、これは微分方程式の解に対して定数となる量です（力学で言えば、運動方程式での保存量)。

そうすると計量は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= e^{\nu(r,t)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= \big(\frac{\dot{m}}{m'}\big)^2\big(1 - \frac{2m}{r}\big)^{-1}c^2dt^2 - \big(1 - \frac{2m}{r}\big)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= \big(\frac{\dot{m}}{f(m)}\big)^2\big(1 - \frac{2m}{r}\big)c^2dt^2 - \big(1 - \frac{2m}{r}\big)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)
\end{aligned}
$$

という形に求まります (ドットは x^0 の偏微分、$'$ は r の偏微分)。これが Vaidya 解で、球対称で放射している場合での最も一般的な形になっています。このときの m は $m(r,t)$ で、$m(r,t)$ と $f(m)$ は (3) に従います。しかし、$f(m)$ はこの段階で決定することができません。決定させるためには星の内部と外部との間の境界条件 $r = R_i(t)$ を必要とします (放射がなくなる領域との境界条件だけでは決定できない)。なので、星の内部構造と関係してくるために、外部だけを考えている今の場合では決定できません。

例えば簡単な状況として、星の内部に物質も放射エネルギーもないとして、$r = t$ で内部と外部の境界が与えられているなら、放射領域のエネルギー $F(r,t)$ をエネルギー密度 ρ_E を使って ($d\Omega_3$ は三次元角度積分部分)

$$
F(r,t) = \int d\Omega_3 \int_t^r dR\ R^2\rho_E(R,t)
$$

とすることで

$$
F(r = t, t) = 0
$$

という境界条件が導けます。

外側の放射がなくなる領域との境界条件は単純で

$$
m(r = R_e(t), t) = M
$$

とすればいいです。このときの M はシュバルツシルト解でのものです。