テトラッド

テトラッドについて見ていき、リーマンテンソルをテトラッドによって表現します。
ここでは「;」という記号を定義しますが、よく使われる共変微分と同じ記号になっているので注意してください。

テトラッド (tetrad) は簡単に言えば 4 成分の正規直交ベクトルによる組のことです。反変な基底ベクトル $e^\mu_{(a)}(a=0,1,2,3)$ というのを用意します (ベクトル (a) の成分 μ という意味です)。この括弧のついた添え字 (a) がテトラッドの添え字を表し、$a=0,1,2,3$ の 4 つによる組がテトラッドと呼ばれるもので、このテトラッドをテンソルの非座標基底としたときにテトラッド基底と呼びます。基底ベクトルは反変ベクトルでしかないので、添え字 μ の上げ下げはその空間での計量 $g_{\mu\nu}$ で行い

$$g_{\mu\nu}e^\mu_{(a)}=e_{(a)\nu}$$

として、共変な基底ベクトルになります。$e^\mu_{(a)}$ の逆は $e^{(b)}_\mu$ で定義して

$$e^\mu_{(a)}e^{(b)}_\mu=\delta^{(b)}_{(a)}$$

ちなみに、テンソルの添え字 μ を列、テトラッドの添え字 (a) を行として行列で表現できます。テトラッドの添え字を潰すようにとると

$$e^\mu_{(a)}e^{(a)}_\nu=\delta^\mu_\nu$$

そして、大抵の場合

$$e^\mu_{(a)}e_{(b)\mu}=\eta_{(a)(b)}$$

として、$\eta_{(a)(b)}$ をミンコフスキー空間の計量と同じ $(+1,-1,-1,-1)$ にとり、直交しているとします。つまり

$$\eta_{(a)(b)}\eta^{(b)(c)}=\delta^{(c)}_{(a)}$$

$$\eta_{(a)(b)}e^{(b)}_\mu=e_{(a)\mu}$$

$$\eta^{(a)(b)}e_{(b)\mu}=e^{(a)}_\mu$$

これとは逆にテトラッドの添え字を潰すようにすると

$$e_{(a)\mu}e^{(a)}_\nu=g_{\mu\nu}$$

元の空間での計量になります。

テンソルのテトラッド成分はテトラッドによる系に射影することで

$$T_{(a)(b)} = e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = e^{(a)}_\mu e^{(b)}_\nu T_{(a)(b)}$$

微分に関しては、接ベクトルが方向微分になっていることから、スカラー関数 ϕ の微分を接ベクトル $\boldsymbol{e}_{(a)}$ を用いて

$$\phi_{|(a)} = \boldsymbol{e}_{(a)}\phi$$

として与えます。テトラッドによる展開の形を持つとして

$$\boldsymbol{e}_{(a)} = e^\mu_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

を使うことで

$$\phi_{|(a)} = e^\mu_{(a)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = e^\mu_{(a)} \phi_{|\mu}$$

ベクトル $A_{(a)}$ に対しては

$$\begin{aligned}
A_{(a)|(b)} &= e^\mu_{(b)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_{(a)} \\
&= e^\mu_{(b)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^\nu_{(a)} A_\nu \qquad (A_{(a)} = e^\nu_{(a)} A_\nu) \\
&= e^\mu_{(b)} (e^\nu_{(a)|\mu} A_\nu + A_{\nu|\mu} e^\nu_{(a)}) \\
&= e^\mu_{(b)} ((e^\nu_{(a)|\mu} + \Gamma^\nu_{\gamma\mu} e^\gamma_{(a)}) A_\nu + (A_{\nu|\mu} - \Gamma^\gamma_{\nu\mu} A_\gamma) e^\nu_{(a)}) \\
&= e^\mu_{(b)} (e^\nu_{(a)} A_\nu)_{||\mu} \\
&= e^\nu_{(a)} A_{\nu||\mu} e^\mu_{(b)} + e^\nu_{(a)||\mu} e^\mu_{(b)} A_\nu \\
&= e^\nu_{(a)} A_{\nu||\mu} e^\mu_{(b)} + e^\nu_{(a)||\mu} e^\mu_{(b)} e_{(c)\nu} A^{(c)} \\
&= e^\nu_{(a)} A_{\nu||\mu} e^\mu_{(b)} + e_{(a)\nu||\mu} e^\mu_{(b)} e^\nu_{(c)} A^{(c)}
\end{aligned}$$

ここで

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e^\nu_{(c)} e_{(a)\nu||\mu} e^\mu_{(b)}$$

というのを定義します。これをリッチ回転係数 (Ricci rotation coefficient) と呼びます。これは

$$
\begin{aligned}
e^{\nu}_{(c)}e_{(a)\nu||\mu}e^{\mu}_{(b)} &= \gamma_{(c)(a)(b)} \\
e^{(c)}_{\alpha}e^{\nu}_{(c)}e_{(a)\nu||\mu}e^{\mu}_{(b)}e^{(b)}_{\beta} &= e^{(c)}_{\alpha}\gamma_{(c)(a)(b)}e^{(b)}_{\beta} \\
e_{(a)\alpha||\beta} &= e^{(c)}_{\alpha}\gamma_{(c)(a)(b)}e^{(b)}_{\beta} \qquad (e^{\mu}_{(a)}e^{(a)}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu})
\end{aligned} \tag{1}
$$

と書くこともできます。そして、$\eta_{(a)(b)}$ が定数なので

$$
\eta_{(a)(b)|\mu} = (e_{(a)\nu}e^{\nu}_{(b)})_{|\mu} = (e_{(a)\nu}e^{\nu}_{(b)})_{||\mu} = 0
$$

これから

$$
(e_{(a)\nu}e^{\nu}_{(b)})_{||\mu} = e_{(a)\nu||\mu}e^{\nu}_{(b)} + e_{(a)\nu}e^{\nu}_{(b)||\mu} = 0 \;\Rightarrow\; e^{\nu}_{(b)}e_{(a)\nu||\mu} = -e^{\nu}_{(a)}e_{(b)\nu||\mu}
$$

$\gamma_{(c)(a)(b)}$ の前二つの添え字 $(c)(a)$ の交換に対して反対称になっていることが分かります。
(**??**) を書き換えて

$$
e^{\nu}_{(a)}A_{\nu||\mu}e^{\mu}_{(b)} = A_{(a)|(b)} - \eta^{(n)(m)}\gamma_{(n)(a)(b)}A_{(m)}
$$

これの左辺を $e_{(b)}$ 方向の $A_{(a)}$ の intrinsic derivative と呼びます。intrinsic derivative の記号を「;」によって

$$
A_{(a);(b)} = e^{\nu}_{(a)}A_{\nu||\mu}e^{\mu}_{(b)}
$$

とします (よくある共変微分の記号とここでの記号「||」が完全に混ざった状況になるので気をつけてください)。これはそのままテンソルに適用できて、リーマンテンソルを使うとテトラッドによる

$$
R_{(a)(b)(c)(d);(f)} \;=\; R_{\alpha\beta\mu\nu||\rho}e^{\alpha}_{(a)}e^{\beta}_{(b)}e^{\mu}_{(c)}e^{\nu}_{(d)}e^{\rho}_{(f)}
$$

から

$$
\begin{aligned}
R_{(a)(b)(c)(d);(f)} = \; & R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} - \eta^{(n)(m)}\big(\gamma_{(n)(a)(f)}R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)}R_{(a)(m)(c)(d)} \\
& + \gamma_{(n)(c)(f)}R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)}R_{(a)(b)(c)(m)}\big)
\end{aligned} \tag{2}
$$

もう一つ記号として

$$
\begin{aligned}
\lambda_{(a)(b)(c)} &= e_{(b)\mu|\nu}(e^{\mu}_{(a)}e^{\nu}_{(c)} - e^{\nu}_{(a)}e^{\mu}_{(c)}) \\
&= (e_{(b)\mu|\nu} - e_{(b)\nu|\mu})e^{\mu}_{(a)}e^{\nu}_{(c)}
\end{aligned}
$$

というのを定義します。この式は $e_{(b)\mu|\nu}$ と $e_{(b)\nu|\mu}$ は μ, ν が入れ替わっているだけなので、クリストッフェル記号の対称性から共変微分にしても式の形は変わらないために

$$\begin{aligned}\lambda_{(a)(b)(c)} &= (e_{(b)\mu||\nu} - e_{(b)\nu||\mu})e^{\mu}_{(a)}e^{\nu}_{(c)} \\ &= \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}\end{aligned}$$

γ で構成されているので、λ も前の二つの添え字の交換に対して反対称です。そして、$\lambda_{(a)(b)(c)}$ は

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = -\lambda_{(c)(b)(a)}$$

と、1 番目と 3 番目の添え字の交換に対しても反対称になっています。また、λ を

$$\begin{aligned}\lambda_{(c)(a)(b)} &= \gamma_{(c)(a)(b)} - \gamma_{(b)(a)(c)} = \gamma_{(c)(a)(b)} + \gamma_{(a)(b)(c)} \\ \lambda_{(b)(c)(a)} &= \gamma_{(b)(c)(a)} - \gamma_{(a)(c)(b)} = -\gamma_{(c)(b)(a)} + \gamma_{(c)(a)(b)}\end{aligned}$$

とすると、$\lambda_{(a)(b)(c)}$ は

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2}(\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)})$$

という関係を持っているのがわかります。

最後にリッチ恒等式とビアンキ恒等式のテトラッドでの表現を与えます。リッチ恒等式は

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}Z_{\mu} = Z_{\nu||\alpha||\beta} - Z_{\nu||\beta||\alpha}$$

で与えられるものです。これの Z^{μ} を $e^{\mu}_{(a)}$ に置き換えることでテトラッドを含めた形として

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}e^{\mu}_{(a)} = e_{(a)\nu||\alpha||\beta} - e_{(a)\nu||\beta||\alpha}$$

これによってリーマンテンソルは、(1) を使って

$$
\begin{aligned}
R_{(a)(b)(c)(d)} &= R_{\mu\nu\alpha\beta}e^{\mu}_{(a)}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} \\
&= (e_{(a)\nu||\alpha||\beta} - e_{(a)\nu||\beta||\alpha})e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} \\
&= \big(-(\gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\alpha})_{||\beta} + (\gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\beta})_{||\alpha}\big)e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} \\
&= -\gamma_{(a)(f)(g)||\beta}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\alpha}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} - \gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu||\beta}e^{(g)}_{\alpha}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} - \gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\alpha||\beta}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} \\
&\quad + \gamma_{(a)(f)(g)||\alpha}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\beta}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} + \gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu||\alpha}e^{(g)}_{\beta}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} + \gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\beta||\alpha}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} \\
&= -\gamma_{(a)(f)(g)|\beta}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\alpha}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} - \gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu||\beta}e^{(g)}_{\alpha}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} - \gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\alpha||\beta}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} \\
&\quad + \gamma_{(a)(f)(g)|\alpha}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\beta}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} + \gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu||\alpha}e^{(g)}_{\beta}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} + \gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}_{\nu}e^{(g)}_{\beta||\alpha}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)} \\
&= -\gamma_{(a)(f)(g)|(d)}\delta^{(f)}_{(b)}\delta^{(g)}_{(c)} - \gamma_{(a)(f)(g)}(-\gamma^{(f)}_{\nu\beta}e^{\nu}_{(b)}e^{\beta}_{(d)}\delta^{(g)}_{(c)}) - \gamma_{(a)(f)(g)}(-\gamma^{(g)}_{\alpha\beta}\delta^{(f)}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)}) \\
&\quad + \gamma_{(a)(f)(g)|(c)}\delta^{(f)}_{(b)}\delta^{(g)}_{(d)} + \gamma_{(a)(f)(g)}(-\gamma^{(f)}_{\nu\alpha}\delta^{(g)}_{(d)}e^{\nu}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}) + \gamma_{(a)(f)(g)}(-\gamma^{(g)}_{\beta\alpha}\delta^{(f)}_{(b)}e^{\alpha}_{(c)}e^{\beta}_{(d)}) \\
&= -\gamma_{(a)(b)(c)|(d)} + \gamma_{(a)(f)(c)}\gamma^{(f)}{}_{(b)(d)} + \gamma_{(a)(b)(g)}\gamma^{(g)}{}_{(c)(d)} \\
&\quad + \gamma_{(a)(b)(d)|(c)} - \gamma_{(a)(f)(d)}\gamma^{(f)}{}_{(b)(c)} - \gamma_{(a)(b)(g)}\gamma^{(g)}{}_{(d)(c)} \\
&= -\gamma_{(a)(b)(c)|(d)} + \gamma_{(a)(b)(d)|(c)} + \gamma_{(a)(b)(f)}(\gamma^{(f)}{}_{(c)(d)} - \gamma^{(f)}{}_{(d)(c)}) + \gamma_{(a)(f)(c)}\gamma^{(f)}{}_{(b)(d)} - \gamma_{(a)(f)(d)}\gamma^{(f)}{}_{(b)(c)} \\
&= -\gamma_{(a)(b)(c)|(d)} + \gamma_{(a)(b)(d)|(c)} + \gamma_{(b)(a)(f)}(\gamma_{(c)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}{}^{(f)}{}_{(c)}) + \gamma_{(f)(a)(c)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(c)}
\end{aligned}
$$

ここでもクリストッフェル記号の対称性のために通常の微分になります。よって

$$
\begin{aligned}
R_{(a)(b)(c)(d)} = &-\gamma_{(a)(b)(c)|(d)} + \gamma_{(a)(b)(d)|(c)} + \gamma_{(b)(a)(f)}(\gamma_{(c)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}{}^{(f)}{}_{(c)}) \\
&+ \gamma_{(f)(a)(c)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(c)}
\end{aligned}
$$

ビアンキ恒等式は反対称化の { } によって

$$
R_{\mu\nu\{\alpha\beta||\rho\}} = \frac{1}{3!}(R_{\mu\nu\alpha\beta||\rho} + R_{\mu\nu\rho\alpha||\beta} + R_{\mu\nu\beta\rho||\alpha}) = 0
$$

これはそのまま (2) に添え字の入れ替えを加えればいいので

$$
\begin{aligned}
R_{(a)(b)\{(c)(d);(f)\}} = \frac{1}{6}\sum_{\{(c)(d)(f)\}} \big(&R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} \\
&- \eta^{(n)(m)}\big(\gamma_{(n)(a)(f)}R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)}R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)}R_{(a)(b)(m)(d)} \\
&+ \gamma_{(n)(d)(f)}R_{(a)(b)(c)(m)}\big)\big) = 0
\end{aligned}
$$

Σ についてる $\{(c)(d)(f)\}$ は、{ } の規則に従って $(c)(d)(f)$ を置換して足していけというの意味です。