ベクトル、1-形式、テンソル

テンソルの話を数学よりにして見直します。カルタンの方程式を出すことを目的にしています。
ベクトル、1-形式、テンソルは太字で書いています。
より細かい話は「多様体」のほうでしています。

空間上にベクトルを与えるところから始めます。空間上のある点 p を通る適当な曲線 $\lambda(t)$ を用意します。t は曲線のパラメータで、$t=t_0$ が点 p に対応するとします。$\lambda(t)$ を n 次元の座標 $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ によって指定できるとします。曲線 $\lambda(t)$ を変数とする任意の関数 $f(\lambda(t))$ を $t=t_0$ で微分すると

$$f(\lambda(t)) = f(x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

から

$$\frac{df(\lambda(t))}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{dx^i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}f(x^1, \ldots, x^n)\Big|_{t=t_0}$$

曲線の座標 x^i をパラメータ t で微分しているので、dx^i/dt は曲線の $t=t_0$ での接ベクトルの成分と言えます。ここで、関数 f は任意なので f を省いて

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

として、ベクトルの基底による展開 $\boldsymbol{V} = V^i\boldsymbol{e}_i$ と比べてみると対応が取れているのが分かります。これから、点 p において、dx^i/dt を成分、微分部分 $\partial/\partial x^i$ を基底とするベクトルが作れたことになります。このときの微分演算子としての作用は方向微分になっています。なので、接ベクトルを方向微分によって導入したことになります。方向微分と対応して出てくる基底 $\partial/\partial x^i$ は座標基底 (coordinate bases) と呼ばれます。
　というわけで、接ベクトル $\boldsymbol{X}$ はベクトル成分 $X^i = dx^i/dt$ と基底 $\partial/\partial x^i$ から

$$\boldsymbol{X} = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

として与えられます。そして、点 p を通る別の曲線 $\gamma(s)$ に対して同じことをしても ($s=s_0$ で点 p)

$$\frac{df(\gamma(s))}{ds}\Big|_{s=s_0} = \frac{dx^i(s)}{ds}\frac{\partial}{\partial x^i}f(x^1, \ldots, x^n)\Big|_{s=s_0}$$

となるだけなので、基底は同じ $\partial/\partial x^i$ で成分が異なった形になります。さらに、成分の部分が

$$\frac{dx^i(t)}{dt} + \frac{dx^i(s)}{ds}$$

となる曲線を作ることは可能です。なぜなら、曲線を作ることは、初期条件を与え、微分方程式

$$\frac{dx^i(u)}{du} = X^i(x^1, \ldots, x^n)$$

を解くことに対応し、これの解は存在するからです。なので、接ベクトル同士の和も適当な曲線の接ベクトルになります。
　これらのため、点 p を通る曲線から作られる全ての接ベクトルを集めたものはベクトル空間となり、$\partial/\partial x^i$ はその基底となります。このベクトル空間を接ベクトル空間 (接空間、tangent space) と呼び、点 p であることを強調

するために接ベクトル空間は T_p のように表記されます。他の点 q でも同様に接ベクトル空間を作ることが出来ますが、点 p でのベクトルと点 q でのベクトルは別のベクトル空間にいるので (各点ごとに異なるベクトル空間が与えられる)、それらの和を計算することは出来ません (点 p で作られるベクトル同士、点 q で作られるベクトル同士の和が定義されている)。接ベクトル空間を作ってしまえば、それはベクトル空間でしかないので、ここから $\boldsymbol{X}$ はベクトルと呼んでいきます (T_p のベクトル)。

基底が微分演算子であるために、ベクトルの話で出てくる基底との対応が分かりづらいので、2 次元ユークリッド空間におけるデカルト座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の場合を見ておきます。曲線を具体的に $\lambda(t) = (x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t)$ (半径 r の円) とします。曲線上の適当な関数 f の t 微分は

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin t\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos t\frac{\partial f}{\partial y}$$

よって、演算子部分は

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin t\frac{\partial}{\partial x} + r\cos t\frac{\partial}{\partial y}$$

これが曲線の接ベクトルになります。そして、曲線のパラメータ t を θ とすれば

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

となり、右辺は (x, y) と (r, θ) との変換の式そのものです。

実際に、デカルト座標と極座標の関係は、それぞれの基底を $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ として

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$$

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y\ ,\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y}$$

であり、このとき微分は

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

となるので、基底との比較をすれば

$$\frac{\partial}{\partial x}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{e}_x\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{e}_y$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{e}_r\ ,\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{e}_\theta$$

となっています。

座標変換を求めます。今は曲線の座標を $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ としていたものを $(x'^1(t), x'^2(t), \ldots, x'^n(t))$ に変えるので、$x'^i = x'^i(x)$ という変換で

$$\frac{dx'^i}{dt} = \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}X^j$$

となっています。基底の変換も求めます。$\boldsymbol{X}$ を基底 $\boldsymbol{e}_i = \partial/\partial x^i$ から別の基底 $\boldsymbol{e}'_i$ へ変換します。これは

$$\boldsymbol{X} = X^i \boldsymbol{e}_i = X'^a \boldsymbol{e}'_a$$

基底 $\boldsymbol{e}_i$ を展開係数 $U_i{}^a$ と基底 $\boldsymbol{e}'_a$ で展開して

$$\boldsymbol{e}_i = U^a_{\ i} \boldsymbol{e}'_a$$

同様に

$$\boldsymbol{e}'_a = \overline{U}^j_{\ a} \boldsymbol{e}_j$$

これらから

$$\boldsymbol{e}_i = U^a_{\ i} \overline{U}^j_{\ a} \boldsymbol{e}_j$$

よって $U_i{}^j$ は

$$U^a_{\ i} \overline{U}^j_{\ a} = \delta^j_i$$

という関係を持ちます。この基底の変換を使って $\boldsymbol{X}$ を見ると

$$X'^a \boldsymbol{e}'_a = X'^a \overline{U}^j_{\ a} \boldsymbol{e}_j$$

なので、

$$\begin{aligned} X^i \boldsymbol{e}_i &= X'^a \boldsymbol{e}'_a \\ &= X'^a \overline{U}^j_{\ a} \boldsymbol{e}_j \\ X^j &= X'^a \overline{U}^j_{\ a} \\ U^b_{\ j} X^j &= X'^a \overline{U}^j_{\ a} U^b_{\ j} \\ U^a_{\ j} X^j &= X'^a \end{aligned}$$

という基底の変換に伴う $\boldsymbol{X}$ の成分の変換が求められます。$U^a_{\ j}$ は

$$U^a_{\ j} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^j}$$

となっています。
　これらの変換に従うのが反変ベクトルで、見てきて分かるように、反変ベクトルは通常ベクトルと呼んでいるものです。このようにして「テンソル解析」での変換則が出てきます。
　ベクトル空間の話を続けていきます。ユークリッド空間での直交基底の関係 $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ (「$\cdot$」はユークリッド空間の内積) と同じ形を作るように新しいベクトル空間を定義します。
　そのために、1-形式 $\boldsymbol{\omega}$ を定義します。$\boldsymbol{\omega}$ はベクトル空間 V の双対空間 V^* のベクトルに対応します。なので、1-形式 $\boldsymbol{\omega}$ は接ベクトル空間 T_p の双対空間 T^*_p のベクトルで、T_p のベクトル $\boldsymbol{X}$ から実数を作るものと定義されます。これを

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}) =< \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} >= \text{実数}$$

と表記することにします。接ベクトル空間 T_p を実数にする双対空間を、余接ベクトル空間 (cotangent vector space) とも呼びます。また、$\boldsymbol{\omega}$ は線形代数では双対ベクトルや線形汎関数と呼ばれます。ここでの話は分野的には微分幾何なので、微分幾何での呼び方である 1-形式を使います

1-形式での基底 $\boldsymbol{e^i}$ は

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}) =<\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X}>= \omega_i X^k <\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_k>= \omega_i X^k \delta^i_k = \omega_i X^i$$

$$<\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_k>= \delta^i_k \ , \ <\boldsymbol{\omega}, a\boldsymbol{X}>= a <\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X}>$$

と定義されます。a は実数、ω_i が成分です。$\boldsymbol{e^i}$ は双対基底と呼ばれます。$\boldsymbol{e^i}$ は

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) =<\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{X}>=<\boldsymbol{e}^i, X^j \boldsymbol{e}_j>= X^i$$

のようにベクトルの成分を取り出します。また、1-形式はベクトルを実数にしますが、その逆の $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega})$ は $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X})$ と定義します。簡単に言えば、$\boldsymbol{\omega}$ をベクトル空間と思えば、$\boldsymbol{X}$ がその双対空間となるからです (T^*_p の双対を $(T^*_p)^* = T_p$ とする)。

座標基底の双対を求めます。そのために、関数 f があり、これから 1-形式 df を定義したとします。$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{X} = X^i \partial/\partial x^i$ から微分演算子になっているので、df は $\boldsymbol{X}$ に対し

$$df(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} f$$

と作用するとします。f を座標の関数 x^j とすれば

$$dx^j(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} x^j = X^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = X^i \delta^j_i = X^j$$

なので、dx^j は双対基底です。そして

$$dx^j(\boldsymbol{X}) = X^i \delta^j_i$$
$$X^i dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = X^i \delta^j_i$$
$$dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta^j_i$$

なので、dx^i は座標基底に対応する双対基底です。基底として dx^i を使うと

$$\boldsymbol{\omega}(X^k \frac{\partial}{\partial x^k}) = \omega_i < dx^i, X^k \frac{\partial}{\partial x^k}>= \omega_i X^k < dx^i, \frac{\partial}{\partial x^k}>= \omega_i X^i$$

から

$$\boldsymbol{\omega}(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \omega_i < dx^i, \frac{\partial}{\partial x^k}>= \omega_i$$

となります。

双対基底 $\boldsymbol{e}^i$ の変換を求めます。まず、$\boldsymbol{e}^i$ と $\boldsymbol{e}'^i$ の $\boldsymbol{X}$ への作用を

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) = X^i \ , \ \boldsymbol{e}'^i(\boldsymbol{X}) = X'^i$$

とします。このときの X^i と X'^i は異なった基底 $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_i$ による成分なので、基底の変換に従って

$$X^i = \overline{U}^i{}_a X'^a \qquad (X'^a = U^a_j X^j \ , \ U^j_i \overline{U}^k{}_j = \delta^k_i)$$

と与えることができます。そうすると

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) = X^i = \overline{U}^i{}_a X'^a = \overline{U}^i{}_a \boldsymbol{e}'^a(\boldsymbol{X})$$

となって、双対空間での基底の変換が出てきます。これから、$\boldsymbol{\omega}$ を

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \boldsymbol{e}^i = \omega'_a \boldsymbol{e}'^a$$

と展開すれば

$$\omega_i \boldsymbol{e}^i = \omega'_a \boldsymbol{e}'^a$$

$$\omega_j \overline{U}^j{}_a \boldsymbol{e}'^a = \omega'_a \boldsymbol{e}'^a$$

$$\omega_j \overline{U}^j{}_a = \omega'_a$$

となって、成分の変換が出てきます。

これから反変と共変の名称の由来が分かります。ベクトルの基底の変換 $\boldsymbol{e}'_i = \overline{U}^j{}_i \boldsymbol{e}_j$ と同じ変換規則を $\boldsymbol{\omega}$ の成分は持つので共変、$\boldsymbol{X}$ の成分は反対の変換規則 $X'^a = U^a_j X^j$ を持つので反変となります。なので、ベクトルの成分が反変ベクトル、1-形式の成分が共変ベクトルと呼んでいるものに対応します

変換をまとめておきます。$\overline{U}^j{}_i$ を $U_i{}^j$ と書くことにすれば

$$\boldsymbol{e}'_a = U_a{}^j \boldsymbol{e}_j \ , \ \boldsymbol{e}'^a = U^a_j \boldsymbol{e}^j$$

成分の変換は

$$X'^a = U^a_j X^j \ , \ \omega'_a = U_a{}^j \omega_j$$

基底と双対基底から

$$\delta^b_a =< \boldsymbol{e}'^b, \boldsymbol{e}'_a >= U_i{}^b U^j_a < \boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_j >= U_i{}^b U^j_a \delta^i_j = U_i{}^b U^i{}_a$$

となるので、U^j_i の逆が $U_j{}^i$ $(\overline{U}^i{}_j)$ であることも確かめられます。$U_i{}^j$ は

$$U^a_j = \frac{\partial x'^a}{\partial x^j}$$

なので、逆は

$$U_a{}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^a}$$

となります。

次にテンソルに移ります。テンソルは r 個の $\boldsymbol{\omega}$ と s 個の $\boldsymbol{X}$ を実数にする $\boldsymbol{T}$ として定義され、これは

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\ldots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_s)=\text{実数}$$

と表記することにします ($\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{X}$ の添え字は区別のために付けています)。このとき、(r,s) 型もしくは (r,s) 階のテンソルと言います。そして、テンソルは、α,β を実数、$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ を T_p のベクトルとして

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\ldots,\boldsymbol{\omega}^r,\alpha\boldsymbol{X}+\beta\boldsymbol{Y},X_2\cdots,\boldsymbol{X}_s)=\alpha\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\ldots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_s)+\beta\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\ldots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_s)$$

という性質を持つと定義されています。これは多重線形性 (multilinear) と呼ばれます。$\boldsymbol{X}$ に対して書きましたが $\boldsymbol{\omega}$ でも同様です。

テンソルは文字を替えずに $\boldsymbol{T}$ だけで表記しているので、区別に気を付けてください。

$(0,s)$ 階の場合では、座標基底から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_s)&=\boldsymbol{T}(X_1^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ldots,X_s^n\frac{\partial}{\partial x^n})\\&=X_1^i\cdots X_s^n\boldsymbol{T}(\frac{\partial}{\partial x^i},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n})\\&=\boldsymbol{T}(\frac{\partial}{\partial x^i},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n})dx^i(\boldsymbol{X}_1)\cdots dx^n(\boldsymbol{X}_s)\end{aligned}$$

として、1-形式の基底の積が出てきます。これは

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_s)=(\boldsymbol{T}(\frac{\partial}{\partial x^i},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n})dx^i\otimes\cdots\otimes dx^n)(\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_s)\\&\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\frac{\partial}{\partial x^i},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n})dx^i\otimes\cdots\otimes dx^n\end{aligned}$$

と表記されます。「$\otimes$」はテンソル積と呼ばれます。$dx^i\otimes\cdots\otimes dx^n$ （s 個の積）は双対基底のテンソル積なので、$(0,s)$ 階のテンソルの基底となります。そして、$(0,s)$ 階のテンソルは共変ベクトルの変換規則に従っていることも分かります。なので、s 階の共変テンソルとも呼ばれます。

同様に $(r,0)$ 階でも行うと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\ldots,\boldsymbol{\omega}^r)&=\boldsymbol{T}(\omega_i^1dx^i,\ldots,\omega_n^rdx^n)\\&=\omega_i^1\cdots\omega_n^r(\frac{\partial}{\partial x^n})\boldsymbol{T}(dx^i,\ldots,dx^n)\\&=\boldsymbol{\omega}^1(\frac{\partial}{\partial x^i})\cdots\boldsymbol{\omega}^r(\frac{\partial}{\partial x^n})\boldsymbol{T}(dx^i,\ldots,dx^n)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X})$ から

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\ldots,\boldsymbol{\omega}^r)=(\boldsymbol{T}(dx^i,\ldots,dx^n)\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^n})(\boldsymbol{\omega}^1\cdots\boldsymbol{\omega}^1)\\&\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(dx^i,\ldots,dx^n)\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^n}\end{aligned}$$

となり、$\partial/\partial x^i\otimes\cdots\otimes\partial/\partial x^n$ が $(r,0)$ 階のテンソルの基底となります。このため $(r,0)$ 階のテンソルは反変ベクトルの変換規則に従うことになり、r 階の反変テンソルとも呼ばれます。

ベクトルと 1-形式の基底を $\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}^i$ として $(0,s)$ 階と $(r,0)$ 階を合わせれば、(r,s) 階のテンソルの基底は

$$\boldsymbol{e}^{i_1\cdots i_s}_{k_1\cdots k_r} = \boldsymbol{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{k_r}\otimes\boldsymbol{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{i_s}$$

となり、

$$\boldsymbol{T} = T^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s}\boldsymbol{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{k_r}\otimes\boldsymbol{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{i_s}$$

として、成分 $T^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s}$ が与えられます。これは基底と双対基底の定義 $<\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_j>=\delta^i_j$ から

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}^{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}^{k_r},\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_s}) = T^{k_1\cdots k_r}_{i_1\cdots i_s}$$

また、テンソルの基底は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(\boldsymbol{\omega}^1,\ldots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_s) &= \boldsymbol{e}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(\omega^1_{k_1}\boldsymbol{e}^{k_1},\ldots,\omega^r_{k_r}\boldsymbol{e}^{k_r},X^{h_1}_1\boldsymbol{e}_{h_1},\ldots,X^{h_s}_s\boldsymbol{e}_{h_s}) \\
&= (\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{j_r}\otimes\boldsymbol{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{i_s})(\omega^1_{k_1}\boldsymbol{e}^{k_1},\ldots,\omega^r_{k_r}\boldsymbol{e}^{k_r},X^{h_1}_1\boldsymbol{e}_{h_1},\ldots,X^{h_s}_s\boldsymbol{e}_{h_s}) \\
&= \omega^1_{k_1}\cdots\omega^r_{k_r}X^{h_1}_1\cdots X^{h_s}_s(\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{j_r}\otimes\boldsymbol{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{i_s})(\boldsymbol{e}^{k_1},\ldots,\boldsymbol{e}^{k_r},\boldsymbol{e}_{h_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{h_s}) \\
&= \omega^1_{j_1}\cdots\omega^r_{j_r}X^{i_1}_1\cdots X^{i_s}_s
\end{aligned}$$

として、$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\omega}$ の成分を取り出します。

テンソルの座標変換は、成分表示を見れば分かるように基底と双対基底の組み合わせでしかないので、${U_i}^j, {U^i}_j$ が対応する数だけ表れるだけです。テンソルの成分は変化してもテンソル自体は変化しないことから、例えば $(2,0)$ 階では

$$\boldsymbol{T}' = T'^{an}\boldsymbol{e}'_a\otimes\boldsymbol{e}'_n = T'^{ab}{U_a}^i{U_b}^j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = T^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{T}$$

これからテンソルの成分の変換規則

$$T'^{ab} = {U^a}_i{U^b}_jT^{ij} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^j}T^{ij}$$

が出てきます。なので、この変換規則 (変換規則は「テンソル解析」と同じ) に従うものとしてテンソルの定義を与えることもできます。

テンソルの分類として例えば $(0,2)$ 階では

$$T_{ij} = T_{ji}\ ,\ T_{ij} = -T_{ji}$$

というような成分が対称か反対称がありますが、これに対応して

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\ ,\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$$

となっています。

1-形式に戻ります。1-形式は微分形式と呼ばれるもので定義されています。細かいことは無視して、必要な部分だけを見ていきます。より詳しいことは「多様体」や数学の「微分形式」を見てください。

微分形式での外微分を与えます。外微分 d は、座標基底 $\partial/\partial x^i$ を選んで、スカラー（0-形式）f に作用させたときは

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

と定義されます。dx^i は座標基底に対応する双対基底です。すでに見たように、df は 1-形式になっていて

$$df(\boldsymbol{X}) =< df, \boldsymbol{X} >= \boldsymbol{X} f$$

となります。
ここで、$(0, 2)$ 階の反対称テンソルを持ち込みます。$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ と $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) &= (T_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = T_{ij} \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{Y}) \\
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) &= (T_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j)(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = T_{ij} \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{Y}) \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{X}) = T_{ji} \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{Y})
\end{aligned}$$

なので、反対称なら $T_{ij} = -T_{ji}$ です。そして、反対称テンソルとしたとき

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})) \\
&= \frac{1}{2} T_{ij} (\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{Y}) \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{X})) \\
&= \frac{1}{2} T_{ij} (\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{Y})) \\
&= \frac{1}{2} T_{ij} (\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j - \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^i)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})
\end{aligned}$$

となることが分かります。このテンソル積部分をウェッジ積「∧」

$$dx^i \wedge dx^k = -dx^k \wedge dx^i \ , \ dx^i \wedge dx^i = 0$$

に対応させて

$$dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i)$$

と定義します（1/2 を外して定義する場合もあります)。そうすると、$(0, 2)$ 階の反対称テンソルは

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = (T_{ij} dx^i \wedge dx^j)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

このウェッジ積部分が 2-形式となります。
定義だけ書けば、任意の p-形式 $(p = 0, 1, 2, \ldots) A$ は

$$A = A_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_p}$$

と与えられています。外微分 d の作用の仕方は

$$
\begin{aligned}
dA &= d(A_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge dx^{i_p})\\
&= dA_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge dx^{i_p}\\
&= \frac{\partial A_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\\
&= A_{i_1\cdots i_p|j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}
\end{aligned}
$$

となります。このように外微分は、p-形式だったものを $(p+1)$-形式にします。性質としては

$$d(aA+bB)=\alpha dA+\beta dB$$

$$d(dA)=0$$

$$d(A\wedge B)=dA\wedge B+(-1)^pA\wedge dB$$

α,β は定数で、A,B は両方とも同じ p-形式です。$d(dA)$ は実際にやってみれば

$$
\begin{aligned}
d(dA) &= d(A_{i_1\cdots i_p|j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\\
&= A_{i_1\cdots i_p|j|k}dx^k\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}
\end{aligned}
$$

これはウェッジ積の部分が k,j の交換に対して反対称なので 0 になります。

リー微分 (Lie derivative) を作ります。ここでのベクトルには方向微分の意味があるので、ベクトル同士の交換関係は関数に作用することを踏まえて

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]f=(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})f=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}f)-\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}f)$$

とします。これはヤコビの恒等式

$$[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}],\boldsymbol{X}]+[[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}],\boldsymbol{Y}]=0$$

も満たします。$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ の基底が座標基底 $\partial/\partial x^i$ になっているなら、x^i に作用させることで $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$ の成分は

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]^i=[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]x^i &= (\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})x^i\\
&= \boldsymbol{X}Y^i-\boldsymbol{Y}X^i \quad (\boldsymbol{Y}=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i})\\
&= X^kY^i_{|k}-Y^kX^i_{|k} \quad (\boldsymbol{X}=X^i\frac{\partial}{\partial x^i})
\end{aligned}
$$

となります。この交換関係によって

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]=-[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]=-\mathcal{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}$$

と表されるものが $\boldsymbol{Y}$ の $\boldsymbol{X}$ 方向へのリー微分です。成分で書けば

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} Y^i == X^k Y^i_{|k} - Y^k X^i_{|k}$$

スカラーに対しては

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} f = \boldsymbol{X} f$$

また、リー微分はテンソルの型を変更させせません。
　1-形式を $\boldsymbol{\omega}$、ベクトルを $\boldsymbol{Y}$ として後で使う関係を出します。座標基底とします。リー微分を $<\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y}>$ に作用させると

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} <\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y}> = <(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{Y}> + <\boldsymbol{\omega}, (\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})>$$

$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})$ の成分を $(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})_i$ と書くことにすれば

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(\omega_i Y^i) = (\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})_i Y^i + \omega_i (\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^i (\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})_i Y^i = \quad \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(\omega_i Y^i) - \omega_i (\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^i = X^k(\omega_i Y^i)_{|k} - \omega_i [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]^i = \quad X^k(\omega_{i|k} Y^i +$$

となり、両辺から Y^i を落として

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})_i = X^k \omega_{i|k} + \omega_k X^k_{|i}$$

次にこの関係を使うことで

$$\begin{aligned}
<\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y}> - \boldsymbol{Y} <\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X}> &= (X^k \omega_{i|k} + \omega_k X^k_{|i}) Y^i - \boldsymbol{Y}(\omega_i X^i) \\
&= (X^k \omega_{i|k} + \omega_k X^k_{|i}) Y^i - Y^k(\omega_{i|k} X^i + \omega_i X^i_{|k}) \\
&= (X^k \omega_{i|k} + \omega_k X^k_{|i}) Y^i - Y^i(\omega_{k|i} X^k + \omega_k X^k_{|i}) \\
&= (\omega_{i|k} - \omega_{k|i}) X^k Y^i
\end{aligned}$$

1-形式 $\boldsymbol{\omega}$ の外微分は

$$d\boldsymbol{\omega} = d(\omega_i dx^i) = \omega_{i|j} dx^j \wedge dx^i$$

なので、$(dx^j \wedge dx^i)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ は

$$(dx^j \wedge dx^i)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}(dx^j \otimes dx^i - dx^i \otimes dx^j)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}(X^j Y^i - X^i Y^j)$$

そうすると

$$d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \omega_{i|j}(dx^j \wedge dx^i)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}\omega_{i|j}(X^j Y^i - X^i Y^j) = \frac{1}{2}(\omega_{i|j} - \omega_{j|i}) X^j Y^i$$

から

$$< \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} > -\boldsymbol{Y} < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} >= 2d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

と表せます。$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} >=< (\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}), Y > + < \boldsymbol{\omega}, (\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}) >$ にこれを入れて

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} > -\boldsymbol{Y} < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} + < \boldsymbol{\omega}, (\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}) >) \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{X} < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} > -\boldsymbol{Y} < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} > + < \boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] >) \end{aligned} \tag{1}$$

こんな関係を導けます。

今度は共変微分 $\nabla_{\boldsymbol{X}}$ を作ります (∇ についている多様体上でのベクトル $\boldsymbol{X}$ の微分であることを表わしています)。導出は省いてしまって、$\nabla_{\boldsymbol{X}}$ の性質を並べると

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} f = \boldsymbol{X} f$$

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(f\boldsymbol{Y}) = \nabla_{\boldsymbol{X}} f + f\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}\ ,\ \nabla_{f\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} = f\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{\omega}^i{}_j(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_i\ ,\ \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}^j = -\boldsymbol{\omega}^j{}_i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}^i$$

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ はベクトル、$\boldsymbol{\omega}^l{}_j$ は 1-形式です。これらによって、任意のベクトル $\boldsymbol{Y}$ に作用させた $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ を実際に計算していくことで、見たことのある共変微分が導けます。

$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ を変形していくと

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} &= \nabla_{\boldsymbol{X}}(Y^i\boldsymbol{e}_i) \\ &= (\nabla_{\boldsymbol{X}}Y^i)\boldsymbol{e}_i + Y^i\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_i \\ &= \boldsymbol{X}Y^i\boldsymbol{e}_i + Y^i\boldsymbol{\omega}^l{}_i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_l \\ &= (\boldsymbol{X}Y^i + Y^k\boldsymbol{\omega}^i{}_k(\boldsymbol{X}))\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{2}$$

左辺でも $\boldsymbol{e}_i$ を分離し、成分を取り出すなら

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^i = \boldsymbol{X}Y^i + Y^k\boldsymbol{\omega}^i{}_k(\boldsymbol{X})$$

途中出てきた $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_i$ は

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_i = \nabla_{X^k\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_i = X^k\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_i = X^k\boldsymbol{\omega}^l{}_i(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_l$$

と変形することもできて

$$\boldsymbol{\omega}^l{}_i(\boldsymbol{e}_k) =< \boldsymbol{\omega}^l_i, \boldsymbol{e}_k >= \omega^l_{ij} < \boldsymbol{e}^j, \boldsymbol{e}_k >= \omega^l_{ik}$$

$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^i$ に対して座標基底を使うと、$\boldsymbol{X} = X^i_{|i}$ より

$$X^j(\nabla_{\partial_j}\boldsymbol{Y})^i = X^jY^i_{|j} + Y^kX^j\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{e}_j)$$

$$(\nabla_{\partial_j}\boldsymbol{Y})^i = Y^i_{|j} + Y^k\omega^i_{kj}$$

つまり、ω^i_{kj} がクリストッフェル記号 Γ^i_{kj} となり、成分による共変微分の式になります。というわけで、通常言っている共変微分は、座標基底を取った場合に対応します。そして、クリストッフェル記号は基底ベクトルを微分することで定義され

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j = \omega^k_{ji}\boldsymbol{e}_k = \Gamma^k_{ji}\boldsymbol{e}_k$$

そもそも $\nabla_{\boldsymbol{X}}$ は、ある曲線にそってベクトルを平行移動させても変化しないということから来ているので

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = 0$$

のとき、これはベクトル $\boldsymbol{X}$ に対してベクトル $\boldsymbol{Y}$ が平行移動していることを表します。

Γ^i_{kj} のことをクリストッフェル記号と呼んでいるように、Γ^i_{kj} の定義は第二種クリストッフェル記号に合わせます。つまり、接続係数 Γ^i_{kj} の符号を反転させて定義します。

$\nabla_{\boldsymbol{X}}$ を使って表される

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} - [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$$

というテンソルを考えます。これはねじれ (torsion) テンソルと呼ばれるもので、$(1,2)$ 階です。$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}$ は (2) を使えば

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} &= \big(\boldsymbol{X}Y^i + Y^k\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{X}) - (\boldsymbol{Y}X^i + X^k\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{Y}))\big)\boldsymbol{e}_i \\ &= (\boldsymbol{X}\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{Y}))\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

なので、基底 $\boldsymbol{e}^i$ を使って

$$\boldsymbol{T}^i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = <\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})>$$

とすることで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = &<\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{X}\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{e}_i> + <\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_i> - <\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{Y}\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_i> \\ &- <\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{e}_i> - <\boldsymbol{e}^i, [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]> \\ =& \boldsymbol{X}\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{Y}) - <\boldsymbol{e}^i, [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]> \\ =& \boldsymbol{X}<\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{Y}> - \boldsymbol{Y}<\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{X}> + \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{Y}) - <\boldsymbol{e}^i, [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]>\end{aligned}$$

これに (1) を使うことで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) &= \boldsymbol{X} < \boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{Y} > -\boldsymbol{Y} < \boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{X} > +\boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{Y}) + 2d\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \\ &\quad - \boldsymbol{X} < \boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{Y} > +\boldsymbol{Y} < \boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{X} > \\ &= 2d\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^i_k(\boldsymbol{Y}) \\ &= 2d\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{e}^k(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = (d\boldsymbol{e}^i + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{e}^k)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$$

$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ は任意なので

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^i = d\boldsymbol{e}^i + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{e}^k$$

これはカルタン (Cartan) の方程式と呼ばれ、ねじれが 0 なら

$$d\boldsymbol{e}^i + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{e}^k = 0$$

相対論では一般的にねじれは 0 です。
　リーマンテンソルの結果だけを示します。リーマンテンソルは

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} = \nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} - \nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{Z}$$

これで定義されます。これによってリーマンテンソルの成分は

$$\frac{1}{2}R^i{}_{jkl}\boldsymbol{e}^k \wedge \boldsymbol{e}^l = d\boldsymbol{\omega}^i_j + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\omega}^k_j$$

と表現され、クリストッフェル記号を使わずに表すことができ、これもカルタンの方程式です。クリストッフェル記号で表すには座標基底をとって

$$\boldsymbol{\omega}^k_j = \Gamma^k_{ji}dx^i \quad (\omega^k_{ji}\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{\omega}^k_j)$$

これを代入すればいいです。
　最後に計量テンソル $\boldsymbol{g}$ を定義します。多様体に計量の定義を入れることでリーマン空間になります。計量テンソルは $(0,2)$ 階の対称テンソルとして定義され、2 つのベクトル $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ を実数にします。なので、$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ となっています。そして、逆 $\boldsymbol{g}^{-1}$ も存在すると定義されます。計量はテンソルなのでテンソル積で

$$\boldsymbol{g} = g_{ij}\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$$

と表現でき、座標基底の双対基底 dx^i を使えば

$$\boldsymbol{g} = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$$

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ はベクトルの内積「$\cdot$」として与えられ

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$$

と表記します。

計量テンソルの逆 $\boldsymbol{g}^{-1}$ は $(2,0)$ 階のテンソルで、2 つの 1-形式を実数にすると定義され

$$\boldsymbol{g}^{-1} = g^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

このときも内積によって

$$\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega})$$

となります。g_{ij} と g^{jk} は逆の関係なので $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$ です。

計量テンソルを基底に作用させると

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) = (g_{ij}\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j)(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) = g_{kl} = \boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_l$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{X}) = (g_{ij}\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j)(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{X}) = g_{kl}X^l$$

から

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = g_{ij}X^iY^j$$

となり、成分による内積となります。

ベクトル空間 V から双対空間 V^* への写像を考えます。全単射の写像 L を

$$< L(\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{X} >=< \overline{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{X} >= \overline{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{X} \quad (L(\boldsymbol{Y}) = \overline{\boldsymbol{\omega}}\in V^*)$$

と与えます (リースの表現定理)。$L(\boldsymbol{Y}) = 0$ となる $\boldsymbol{Y}$ に対して $< L(\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{Y} >= (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}) = 0$ なので、$\boldsymbol{Y}$ は 0 です。つまり、L のカーネルは 0 なので ($\mathrm{Ker}L = \{0\}$)、単射です。そして、V と V^* の次元は同じなので全射です。よって、L は全単射です。また、内積の性質から

$$< L(\alpha\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{X} >= (\alpha\boldsymbol{Y})\cdot\boldsymbol{X} = \alpha(\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{X}) = \alpha < L(\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{X} >$$

なので、線形性 $L(\alpha\boldsymbol{Y}) = \alpha L(\boldsymbol{Y})$ を持ちます。

そうすると

$$< \overline{\boldsymbol{\omega}, X} >= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$$

$$\overline{\omega}_i\boldsymbol{e}^iX^j\boldsymbol{e}_j = g_{ij}Y^iX^j$$

$$\overline{\omega}_jX^j = g_{ij}Y^iX^j$$

これから

$$\overline{\omega}_j = g_{ij}Y^i$$

$\overline{\omega}_j$ を v_j、Y^i を v^i と書けば

$$v_j = g_{ij} v^i$$

となり、ベクトル成分で書いたときの反変、共変ベクトルの添え字の上げ下げの規則を与えます。これから、反変はベクトル、共変はその双対ベクトルの成分であることがはっきりします。

ちなみに、$\boldsymbol{\varpi}$ は数学の本では $\boldsymbol{\omega}^\flat$ ($\boldsymbol{\omega}^\flat(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$) と書かれることもあります。$\flat$ がベクトル空間 V ($\boldsymbol{Y}$) から双対空間 V^* ($\boldsymbol{\omega}^\flat = \boldsymbol{\varpi}$) への写像を表します。$\flat$ は音楽記号のフラットなので musical isomorphism と呼ばれます。シャープ $\#$ も当然あって、これは逆の写像 (V^* から V への写像) です (V^* での $\boldsymbol{\omega}$、V での $\boldsymbol{X}$ によって $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\omega}^\#, \boldsymbol{X})$)。

また、V^* の基底 $\boldsymbol{e}^i$ と $L(\boldsymbol{e}_i) = \tilde{\boldsymbol{e}}_i$ が一致する必要はないです。$\boldsymbol{e}^i$ は V の基底 $\boldsymbol{e}_i$ との対応から与えられるのに対して、$\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ は内積によって与えられるからです。実際に

$$< L(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{X} >= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{X}$$

から

$$< \tilde{\boldsymbol{e}}_i, \boldsymbol{e}_j >=< L(\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{e}_j >= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij}$$

これと $< \boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_j >= \delta^i_j$ を比べると、計量の成分がクロネッカーデルタでないと $\boldsymbol{e}^i$ と $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ は一致しません。

計量テンソルは共変微分に対して 0 という性質は

$$\nabla \boldsymbol{g} = 0$$

と書けます (このときの ∇ はレヴィ・チビタ接続と呼ばれます)。これは $\nabla_{\boldsymbol{X}}$ を使って展開すると

$$\begin{aligned}
\nabla_X \boldsymbol{g} &= \nabla_X (g_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j) \\
&= \boldsymbol{X} g_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j + g_{ij} (\nabla_X \boldsymbol{e}^i) \otimes \boldsymbol{e}^j + g_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes (\nabla_X \boldsymbol{e}^j) \\
&= \boldsymbol{X} g_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j - g_{ij} \boldsymbol{\omega}^i{}_l(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{e}^l \otimes \boldsymbol{e}^j - g_{ij} \boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^l \qquad (\nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{e}^j = -\boldsymbol{\omega}^j{}_i(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{e}^i)
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
0 &= (\boldsymbol{X} g_{ij} - g_{kj} \boldsymbol{\omega}^k{}_i(\boldsymbol{X}) - g_{ik} \boldsymbol{\omega}^k{}_j(\boldsymbol{X})) \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \\
&= (d g_{ij}(\boldsymbol{X}) - g_{kj} \boldsymbol{\omega}^k{}_i(\boldsymbol{X}) - g_{ik} \boldsymbol{\omega}^k{}_j(\boldsymbol{X})) \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \\
&= d g_{ij}(\boldsymbol{X}) - g_{kj} \boldsymbol{\omega}^k{}_i(\boldsymbol{X}) - g_{ik} \boldsymbol{\omega}^k{}_j(\boldsymbol{X})
\end{aligned}$$

となります。これから、$d g_{ij}(\boldsymbol{X})$ が 0 のとき $\boldsymbol{\omega}^k{}_i$ は反対称になります。