テンソルの対称、反対称

テンソル解析の続きです。

対称テンソルは、添え字の入れ替えに対して符号が変わらないテンソルのことです。例えば

$$T_{ikl} = T_{kil} = T_{lik}$$

となっています。計量テンソルはこれにあたります。
対称テンソルに対して、反対称テンソルは

$$T_{ikl} = -T_{kil} = T_{lik}$$

となります。添え字の動きが奇置換 (奇数回の入れ替え) であるときに符号が変わります。
対称テンソルと反対称テンソルは座標変換後も対称テンソルは対称テンソル、反対称テンソルは反対称テンソルになります。このことは、例えば 2 階のテンソルでは

$$\overline{T}_{ik} = \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^k}T_{ab}$$

$$\overline{T}_{ki} = \frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^i}T_{ba}$$

という変換になるので、$T_{ab} = T_{ba}$ であるなら $\overline{T}_{ik} = \overline{T}_{ki}$、$T_{ab} = -T_{ba}$ なら $\overline{T}_{ik} = -\overline{T}_{ki}$ になることから分かります（任意の階数で成り立つ）。
また、独立な成分について見ていくと、例えば 4 次元での 2 階の対称テンソル $\Gamma_{\mu\nu}$ は添え字の部分だけを取り出し (μ, ν) として書き出すと

$$(0,0)(1,1)(2,2)(3,3)(0,1)(0,2)(0,3)(1,2)(1,3)(2,3)$$

という 10 個、反対称では

$$(0,1)(0,2)(0,3)(1,2)(1,3)(2,3)$$

という 6 個になります。添え字が $(0,0)$ のように同じでは反対称テンソルは 0 です。これは $T_{00} = -T_{00}$ として矛盾するからです。こういったことから、4 次元での 4 階の反対称テンソルの独立な成分は 1 個 $(0,1,2,3)$ になります。n 次元での m 階反対称テンソルにおいて $n < m$ では添え字に同じものが出てきてしまうので、そのテンソルは 0 です。
これからテンソルの対称性による性質を見ていきます。

- **回転**

  共変ベクトルの共変微分は

$$A_{i||k} = A_{i|k} - \left\{ \begin{array}{c} r \\ i\ k \end{array} \right\} A_r$$

これの添え字をひっくり返した

$$A_{k||i} = A_{k|i} - \left\{ \begin{array}{c} r \\ k\ i \end{array} \right\} A_r$$

というのを引くと、クリストッフェル記号の下側の添え字は交換しても同じなので

$$\begin{aligned} A_{i||k} - A_{k||i} &= A_{i|k} - A_{k|i} - \left\{ \begin{array}{c} r \\ i\ k \end{array} \right\} A_r + \left\{ \begin{array}{c} r \\ k\ i \end{array} \right\} A_r \\ &= A_{i|k} - A_{k|i} \end{aligned}$$

これはベクトル A_i の回転 (rotation) で、例えば $A_{1|2} - A_{2|1} = -(A_{2|1} - A_{1|2})$ から反対称テンソルです。反変ベクトルと共変ベクトルのクリストッフェル記号の文字の配置からわかるように、これは反変ベクトルには適用されず、共変ベクトルでしか成立しません。また、回転の回転は 0 です。

- **微分形式**

　微分形式については「多様体」や数学の「微分形式」のほうを見てください。ここでは反対称に関する部分を抜き出して説明します。

　n 次元でのリーマン空間において微小体積要素 $dx^1dx^2\cdots dx^n$ は

$$dx^1dx^2\cdots dx^n \neq dx^2dx^1\cdots dx^n$$

となっています。簡単に示しておきます。ヤコビアンを使った微小体積要素の変換

$$d\overline{x}^1 d\overline{x}^2 = |\frac{\partial(\overline{x}^1, \overline{x}^2)}{\partial(x^1, x^2)}| dx^1 dx^2$$

に対して

$$\overline{x}^1 = x^2\ ,\ \overline{x}^2 = x^1$$

とすれば

$$\frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} = 0\ ,\ \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} = 0\ ,\ \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} = 1\ ,\ \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} = 1$$

となっているので、ヤコビアンは

$$\frac{\partial(\overline{x}^1,\overline{x}^2)}{\partial(x^1,x^2)}=\frac{\partial\overline{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^2}-\frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^1}=-1$$

これによって

$$d\overline{x}^1d\overline{x}^2=dx^2dx^1=-dx^1dx^2$$

となって、交換すると符号が反転します。このことは外積の概念につながっていて、外積の方向は

$$a\times b=-b\times a$$

として交換すると方向 (符号) が反転します。このことから

$$dx^i\wedge dx^k=-dx^k\wedge dx^i$$

$$dx^i\wedge dx^i=0$$

という記号を定義します。$\wedge$ による積を exterior product、もしくは wedge product と呼び、日本語だと外積、もしくはウェッジ積と呼んでいます。

別のよくある導入の仕方として、閉曲線の積分をストークスの定理を用いて面積分に変えると、$\boldsymbol{n}$ を面の法線ベクトルとして

$$\int dS\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=\int\Big((\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})dydz+(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y})dxdy\Big)$$

となっているので、ウェッジ積によって

$$\int\Big[(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})dy\wedge dz+(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x})dz\wedge dx+(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y})dx\wedge dy\Big]$$

と書けます。( ) 部分は文字の入れ替えに対して反対称なので、ウェッジ積の反対称性に対応します。

2 階テンソルの微分形式はウェッジ積を使って

$$G=A_{ik}dx^i\wedge dx^k$$

と定義されます。この性質についてみていきます。まず、単純に

$$G=A_{ik}dx^i\wedge dx^k=\frac{1}{2}(A_{ik}dx^i\wedge dx^k+A_{ki}dx^k\wedge dx^i)$$

とします。この変形は i,k がダミーインデックスなので添え字を書き換えて問題ないので行えます。展開してどうなっているのかを一応示しておきます。面倒なので i,k は 1〜2 までとして

$$A_{ik}dx^i\wedge dx^k=A_{11}dx^1\wedge dx^1+A_{22}dx^2\wedge dx^2+A_{12}dx^1\wedge dx^2+A_{21}dx^2\wedge dx^1$$

これと添え字を $A_{ki}dx^k\wedge dx^i$ としたものは同じになっているので、足して 1/2 を前につければ元の式になります。

　ウェッジ積の性質より

$$G=A_{ik}dx^i\wedge dx^k\frac{1}{2}(A_{ik}dx^i\wedge dx^k+A_{ki}dx^k\wedge dx^i)=\frac{1}{2}(A_{ik}-A_{ki})dx^i\wedge dx^k$$

となり、最右辺の ( ) 部分は明らかに反対称です。つまり、微分形式の係数 (A_{ik}) は反対称であるということです。というわけで、$(A_{ik}-A_{ki})/2$ は反対称テンソルになり、これが微分形式を考えていくときの結果で、任意のテンソルから反対称部分を取り出せます。このことはリーマン曲率テンソルの対称性を見るときに使います。

反対称になることは $C_{ik}=A_iB_k-A_kB_i$ というのを作れば分かりやすく、これは添え字をひっくり返すと明らかに符号が逆転したものになるために、C_{ik} は反対称なテンソルになります。

　3 階のテンソルでも同様にしていくことで

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3!}(A_{ikl}-A_{kil}+A_{kli}-A_{ilk}+A_{lik}-A_{lki})dx^i\wedge dx^k\wedge dx^l\\&=A_{\{ikl\}}dx^i\wedge dx^k\wedge dx^l\end{aligned}$$

ここで

$$A_{\{ikl\}}=\frac{1}{3!}(A_{ikl}-A_{kil}+A_{kli}-A_{ilk}+A_{lik}-A_{lki})$$

このような記号を定義します。もしくは、

$$\{A_{ikl}\}=\frac{1}{3!}(A_{ikl}-A_{kil}+A_{kli}-A_{ilk}+A_{lik}-A_{lki})$$

と使います。$\{A_{ikl}\}$ の添え字の偶置換ではプラス、奇置換ではマイナスになるとしています。この記号で書かれたものは線形性を持っていて

$$\{A_{ikl}+B_{ikl}\}=\{A_{ikl}\}+\{B_{ikl}\}$$

とできます。

$\{A_{kil}\}$ を見てみると

$$
\begin{aligned}
\{A_{kil}\} &= \frac{1}{3!}(A_{kil} - A_{ikl} + A_{ilk} - A_{kli} + A_{lki} - A_{lik}) \\
&= \frac{1}{3!}(-A_{ikl} + A_{kil} - A_{kli} + A_{ilk} - A_{lik} + A_{lki}) \\
&= -\{A_{ikl}\}
\end{aligned}
$$

なので、反対称になっているのが分かります。このため、$\{\ \}$ を反対称化と言います。

同様に

$$
A_{(ikl)} = (A_{ikl}) = \frac{1}{3!}(A_{ikl} + A_{kil} + A_{kli} + A_{ilk} + A_{lik} + A_{lki})
$$

という記号も定義します。このときは対称なので、( ) は対称化と言います。

共変微分に対しては

$$
A_{ikl||m}dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m = A_{\{ikl||m\}}dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m
$$

このとき

$$
A_{\{ikl||m\}} = A_{\{ikl|m\}}
$$

という関係にもなっていて、このことからわかるようにクリストッフェル記号に依存していません。

また、ベクトル A_i の共変微分をとって反対称化すると

$$
A_{\{i||k\}} = A_{\{i|k\}} = \frac{1}{2}(A_{i|k} - A_{k|i})
$$

というように回転が現れてきます。

必要になる反対称化の性質を求めておきます。まず、偏微分による $A_{i|j|k}$ は微分の性質から $A_{i|j|k} = A_{i|k|j}$ です。これをそのまま反対称化すれば

$$
\{A_{i|j|k}\} = \{A_{i|k|j}\} = -\{A_{i|j|k}\} = \{A_{j|i|k}\}
$$

となるのが分かります。しかし、$\{A_{i|j|k}\}$ は反対称なので $\{A_{i|j|k}\} = -\{A_{j|i|k}\}$ です。なので

$$
\{A_{i|j|k}\} = 0
$$

が要求されます。

今度は $\{A_{i|j}\}_{|k}$ を反対称化したものを見ると

$$\{\{A_{i|j}\}_{|k}\} = \frac{1}{2}\{(A_{i|j} - A_{j|i})_{|k}\} = \frac{1}{2}\{A_{i|j|k} - A_{j|i|k}\} = \frac{1}{2}(\{A_{i|j|k}\} - \{A_{j|i|k}\})$$

第一項と第二項は反対称化されているので、

$$\{A_{i|j|k}\} = -\{A_{j|i|k}\}$$

から

$$\{\{A_{i|j}\}_{|k}\} = \{A_{i|j|k}\}$$

なので、$\{\{A_{i|j}\}_{|k}\} = 0$ となります。これは「リーマン曲率テンソル・ビアンきの恒等式」で使います。