スピノールの共変微分

テトラッドの応用例として、スピノールの共変微分を作ります。ここで扱うのは相対論で出てくるスピノール算の詳細でなく、平坦な空間の作用上での微分を、曲がった空間での共変微分に変える方法です。
ギリシャ文字は時空の添え字、ローマ文字はテトラッドの添え字とし、η_{ab} はミンコフスキー計量とします。

作用を作る時に要求されるのは、共変的であることと、局所的に慣性系が作れるというものです。これを満たすためには、スカラーであることと、ローレンツ変換によって各慣性系が繋がっているというのを満たせばいいです。この要求のもとで、曲がった空間でのスピノールの共変微分を作ります。
共変微分を作る前に、スピノールのローレンツ変換の必要な性質を見ておきます (相対論的量子力学の「ローレンツ変換」、「ディラック方程式の共変性」参照)。ローレンツ変換は

$$x^i \ \Rightarrow \ \Lambda^i{}_j x^j \qquad \Lambda^i{}_j \Lambda_i{}^k = \delta_j^k$$

と与えられ、$\Lambda^i{}_j$ がローレンツ変換の演算子です。スピノール ψ は座標の関数なので、ψ に対してローレンツ変換を行うことは形式的に

$$\psi \ \Rightarrow \ D(\Lambda)\psi$$

と書けます。このとき、$D(\Lambda)$ は

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2) \tag{1}$$

という性質を持ちます。次に無限小ローレンツ変換

$$\Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + \omega^i{}_j$$

を考えます。$\omega^i{}_j$ は微小で、$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ という性質を持ちます。無限小ローレンツ変換に対する $D(\Lambda)$ は $\omega^i{}_j$ の 1 次のオーダまでで

$$D(\Lambda) = 1 + \omega = 1 + \frac{1}{2}\omega^{ij}\sigma_{ij}$$
$$D(\Lambda^{-1}) = 1 - \omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^{ij}\sigma_{ij}$$

と展開します。Λ^{-1} は Λ の逆行列、σ_{ij} は何かしらの定数行列です。ω^{ij} が反対称なので、σ_{ij} も $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$ です。この σ_{ij} は任意でなく、制限がつきます。それをみるために

$$D(\Lambda)D(1+\omega)D(\Lambda^{-1})$$

こんな変換を考えます。これは (1) によって

$$D(\Lambda)D(1+\omega)D(\Lambda^{-1}) = D(1+\Lambda\omega\Lambda^{-1})$$

となります。両辺の $D(1+\cdots)$ 部分を ω_{ij} の 1 次のオーダまでを取り出すと

$$1+\frac{1}{2}\omega^{cd}D(\Lambda)\sigma_{cd}D(\Lambda^{-1}) = 1+\frac{1}{2}\Lambda^a{}_c\omega^{cd}\sigma_{ab}\Lambda^b{}_d$$

両辺の第二項を見れば

$$D(\Lambda)\sigma_{cd}D(\Lambda^{-1}) = \sigma_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^{bj}_{d}$$

となっていることが要求されます。さらに、左辺が無限小変換として、$(1+\omega)\sigma_{cd}(1-\omega)$ の ω^{ab} の 1 次のオーダを拾うと、左辺は

$$\omega\sigma_{cd}-\sigma_{cd}\omega = \frac{1}{2}\omega^{ab}\sigma_{ab}\sigma_{cd}-\frac{1}{2}\omega^{ab}\sigma_{cd}\sigma_{ab} = \frac{1}{2}\omega^{ab}[\sigma_{ab},\sigma_{cd}]$$

[,] は交換関係の記号で

$$[A,B] = AB-BA$$

右辺も無限小変換

$$\sigma_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d = \sigma_{ab}(\delta^a_c+\omega^a{}_c)(\delta^b_d+\omega^b{}_d)$$

とし、ω^{ab} の 1 次のオーダを見ていくと

$$\begin{aligned}
\omega^a{}_c\sigma_{ab}\delta^b_d+\omega^b{}_d\sigma_{ab}\delta^a_c &= \omega^{ai}\eta_{ic}\sigma_{ad}+\omega^{bi}\eta_{id}\sigma_{cb} \\
&= \frac{1}{2}(\omega^{ai}\eta_{ic}\sigma_{ad}+\omega^{ai}\eta_{ic}\sigma_{ad})+\frac{1}{2}(\omega^{bi}\eta_{id}\sigma_{cb}+\omega^{bi}\eta_{id}\sigma_{cb}) \\
&= \frac{1}{2}(\omega^{ai}\eta_{ic}\sigma_{ad}-\omega^{ia}\eta_{ic}\sigma_{ad})+\frac{1}{2}(\omega^{bi}\eta_{id}\sigma_{cb}-\omega^{ib}\eta_{id}\sigma_{cb}) \\
&= \frac{1}{2}(\omega^{ai}\eta_{ic}\sigma_{ad}-\omega^{ab}\eta_{ac}\sigma_{bd})+\frac{1}{2}(\omega^{ab}\eta_{bd}\sigma_{ca}-\omega^{ab}\eta_{ad}\sigma_{cb}) \\
&= \frac{1}{2}\omega^{ab}(\eta_{bc}\sigma_{ad}-\eta_{ac}\sigma_{bd}+\eta_{bd}\sigma_{ca}-\eta_{ad}\sigma_{cb})
\end{aligned}$$

なので

$$[\sigma_{ab},\sigma_{cd}] = \eta_{bc}\sigma_{ad}-\eta_{ac}\sigma_{bd}+\eta_{bd}\sigma_{ca}-\eta_{ad}\sigma_{cb} \tag{2}$$

となっているのが分かります。つまり、σ_{ab} はこの交換関係を満たすように選ぶ必要があります。

ここから、スピノールの共変微分を求めていきます。局所的に慣性系 (局所ローレンツ系) がいることから、テトラッドを導入すればいいです。テトラッドのローレンツ変換は

$$e_a^\mu \ \Rightarrow \ \Lambda_a^b e_b^\mu$$

ギリシャ文字が空間の添え字、ローマ文字がテトラッドの添え字です。

そして、ディラック方程式によるスピノールを扱うときにはガンマ行列というのがくっついて出てきます。これらは特殊相対論の段階で導入されるものです。なので、テトラッドを使って局所ローレンツ系を作れば、そこでスピノールを特殊相対論での場合と同じように扱うことができます。

スピノール ψ は局所ローレンツ変換 $\Lambda_a^b(x)$(テトラッド成分に対する変換) によって

$$\psi \ \Rightarrow \ D(\Lambda)\psi$$

と変換されます。そして、スピノールに対する共変微分 ∇_a はスピノールと同じように変換されると考えます。つまり、

$$\nabla_a\psi \ \Rightarrow \ {\Lambda_a}^b D(\Lambda)\nabla_b\psi \tag{3}$$

と変換されると考えます。局所ローレンツ変換はある点での局所ローレンツ系 (慣性系) を違う点での局所ローレンツ系に移す変換なので、テトラッドの添え字に対するローレンツ変換がいます。

この変換則を満たすような ∇_a を作っていきます。まず、微分演算子

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

にテトラッド e_a^μ をくっつけて

$$e_a^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

とします。これをスピノール ψ に作用させて、ローレンツ変換 $\Lambda_a^b(x)$ を行うと

$$e_a^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi \ \Rightarrow \ {\Lambda_b}^a e_a^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}(D(\Lambda)\psi) = {\Lambda_b}^a e_a^\mu\big(D(\Lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial D(\Lambda)}{\partial x^\mu}\psi\big)$$

と書けます。これがテトラッド成分を持つ微分をローレンツ変換した形ですが、(3) とこの式を比べると右辺第二項が邪魔そうな雰囲気です。なので、これを上手いこと打ち消してくれるように

$$\nabla_a = e_a^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu)$$

という形を仮定し、Γ_μ はローレンツ変換に対して

$$\Gamma_\mu \ \Rightarrow \ D(\Lambda)\Gamma_\mu D^{-1}(\Lambda) - \big(\frac{\partial D(\Lambda)}{\partial x^\mu}\big)D^{-1}(\Lambda)$$

という変換を受けるとします。これによって

$$\nabla_a\psi = e^\mu_a(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\Gamma_\mu)\psi$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \Lambda_a{}^b e^\mu_b\big(D(\Lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}+\frac{\partial D(\Lambda)}{\partial x^\mu}\psi\big)+\Lambda_a{}^b e^\mu_b\big(D(\Lambda)\Gamma_\mu D^{-1}(\Lambda)-\frac{\partial D(\Lambda)}{\partial x^\mu}D^{-1}(\Lambda)\big)D(\Lambda)\psi\\
&\qquad=\Lambda_a{}^b e^\mu_b\big(D(\Lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}+\frac{\partial D(\Lambda)}{\partial x^\mu}\psi\big)+\Lambda_a{}^b e^\mu_b\big(D(\Lambda)\Gamma_\mu-\frac{\partial D(\Lambda)}{\partial x^\mu}\big)\psi\\
&\qquad=\Lambda_a{}^b e^\mu_b D(\Lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}+\Lambda_a{}^b e^\mu_b D(\Lambda)\Gamma_\mu\psi\\
&\qquad=\Lambda_a{}^b D(\Lambda)e^\mu_b\big(\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}+\Gamma_\mu\psi\big)\\
&\qquad=\Lambda_a{}^b D(\Lambda)\nabla_b\psi
\end{aligned}$$

となって、(3) と一致した変換則を持ちます。

ここで問題になってくるのは Γ_μ がどうなっているのかです。そのために、無限小ローレンツ変換

$$\Lambda^a{}_b(x)=\delta^a{}_b+\omega^a{}_b(x)\quad(\omega_{ab}=-\omega_{ba})$$

を考えます ($\omega^a{}_b(x)$ は微小量)。$D(\Lambda)$ は $\omega^a{}_b(x)$ の 1 次までで

$$D(1+\omega(x))=1+\frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\sigma_{ab}$$

$$D^{-1}(1+\omega(x))=1-\frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\sigma_{ab}$$

と展開できます (σ_{ab} は定数行列、$\sigma_{ab}=-\sigma_{ba}$)。これによって Γ_μ は ($\omega^a{}_b(x)$ の 1 次までで)

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu\ \Rightarrow\ &D(\Lambda)\Gamma_\mu D^{-1}(\Lambda)-\frac{\partial D(\Lambda)}{\partial x^\mu}D^{-1}(\Lambda)\\
&=(1+\frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\sigma_{ab})\Gamma_\mu(1-\frac{1}{2}\omega^{cd}(x)\sigma_{cd})-\frac{1}{2}\frac{\partial\omega^{ab}(x)\sigma_{ab}}{\partial x^\mu}(1-\frac{1}{2}\omega^{cd}(x)\sigma_{cd})\\
&=\Gamma_\mu+\frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\sigma_{ab}\Gamma_\mu-\frac{1}{2}\Gamma_\mu\omega^{cd}(x)\sigma_{cd}-\frac{1}{2}\sigma_{ab}\frac{\partial\omega^{ab}(x)}{\partial x^\mu}\\
&=\Gamma_\mu+\frac{1}{2}\omega^{ab}(\sigma_{ab}\Gamma_\mu-\Gamma_\mu\sigma_{ab})-\frac{1}{2}\sigma_{ab}\frac{\partial\omega^{ab}}{\partial x^\mu}\\
&=\Gamma_\mu+\frac{1}{2}\omega^{ab}[\sigma_{ab},\Gamma_\mu]-\frac{1}{2}\sigma_{ab}\frac{\partial\omega^{ab}}{\partial x^\mu}
\end{aligned}\tag{4}$$

これとは別に、

$$e^b_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}e^{a\nu}$$

に対するローレンツ変換を行ってみます。テトラッドに対する無限小ローレンツ変換は

$$e_a^\mu \ \Rightarrow\ e_a^\mu + \omega_a{}^b e_b^\mu$$

なので

$$\begin{aligned}
e_\nu^b \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{a\nu} \ &\Rightarrow\ (e_\nu^b + \omega^b{}_c e_\nu^c)\frac{\partial}{\partial x^\mu}(e^{a\nu} + \omega^{ad} e_d^\nu) \\
&= e_\nu^b \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{a\nu} + e_\nu^b e_d^\nu \frac{\partial \omega^{ad}}{\partial x^\mu} + \omega^b{}_c e_\nu^c \frac{\partial e^{a\nu}}{\partial x^\mu} + e_\nu^b \omega^{ad} \frac{\partial e_d^\nu}{\partial x^\mu} \\
&= e_\nu^b \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{a\nu} + \eta^b{}_d \frac{\partial \omega^{ad}}{\partial x^\mu} + \omega^b{}_c e_\nu^c \frac{\partial e^{a\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^{ad} e_\nu^b \frac{\partial e_d^\nu}{\partial x^\mu} \\
&= e_\nu^b \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{a\nu} + \frac{\partial \omega^{ab}}{\partial x^\mu} + \omega^b{}_c e_\nu^c \frac{\partial e^{a\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^a{}_c e_\nu^b \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu}
\end{aligned} \tag{5}$$

この結果は (4) となんとなく似ています。(4) には $[\sigma_{ab}, \Gamma_\mu]$ という項がいるので、σ_{ab} の交換関係

$$[\sigma_{ab}, \sigma_{cd}] = \eta_{cb}\sigma_{ad} - \eta_{ca}\sigma_{bd} + \eta_{db}\sigma_{ca} - \eta_{da}\sigma_{cb}$$

を使うと

$$\begin{aligned}
\omega^{ab}[\sigma_{ab}, \sigma_{cd}] e_\nu^c \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} &= (\eta_{cb}\sigma_{ad} - \eta_{ca}\sigma_{bd} + \eta_{db}\sigma_{ca} - \eta_{da}\sigma_{cb}) e_\nu^c \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} \\
&= \omega^{ab}\eta_{cb}\sigma_{ad} e_\nu^c \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} - \omega^{ab}\eta_{ca}\sigma_{bd} e_\nu^c \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^{ab}\eta_{db}\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} - \omega^{ab}\eta_{da}\sigma_{cb} e_\nu^c \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} \\
&= \omega^{ab}\sigma_{ad} e_{b\nu} \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} - \omega^{ab}\sigma_{bd} e_{a\nu} \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^{ab}\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e_b^\nu}{\partial x^\mu} - \omega^{ab}\sigma_{cb} e_\nu^c \frac{\partial e_a^\nu}{\partial x^\mu} \\
&= \omega^{ab}\sigma_{ac} e_{b\nu} \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu} - \omega^{ba}\sigma_{ac} e_{b\nu} \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^{ab}\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e_b^\nu}{\partial x^\mu} - \omega^{ba}\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e_b^\nu}{\partial x^\mu} \\
&= 2\omega^{ab}\sigma_{ac} e_{b\nu} \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu} + 2\omega^{ab}\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e_b^\nu}{\partial x^\mu} \\
&= 2\omega^a{}_b\sigma_{ac} e_\nu^b \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu} + 2\omega^a{}_b\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e^{b\nu}}{\partial x^\mu}
\end{aligned}$$

この結果は、(5) の最後の二項に σ_{ba} をかけた

$$\sigma_{ab}(\omega^b{}_c e_\nu^c \frac{\partial e^{a\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^a{}_c e_\nu^b \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu}) = -(\omega^a{}_b\sigma_{ac} e_\nu^b \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^a{}_b\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e^{b\nu}}{\partial x^\mu})$$

これと一致しています (見やすくするために添え字を付け直しているだけです)。状況をまとめると

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ba} e_\nu^b \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{a\nu} \ \Rightarrow\ \sigma_{ba} e_\nu^b \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{a\nu} - \sigma_{ab}\frac{\partial \omega^{ab}}{\partial x^\mu} - (\omega^a{}_b\sigma_{ac} e_\nu^b \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^a{}_b\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e^{b\nu}}{\partial x^\mu}) \\
&\frac{1}{2}\omega^{ab}[\sigma_{ab}, \sigma_{cd}] e_\nu^c \frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} = \omega^a{}_b\sigma_{ac} e_\nu^b \frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^a{}_b\sigma_{ca} e_\nu^c \frac{\partial e^{b\nu}}{\partial x^\mu}
\end{aligned}$$

そして、求めたいのは

$$\Gamma_\mu \ \Rightarrow\ \Gamma_\mu + \frac{1}{2}\omega^{ab}[\sigma_{ab}, \Gamma_\mu] - \frac{1}{2}\sigma_{ab}\frac{\partial \omega^{ab}(x)}{\partial x^\mu}$$

という変換則に従う Γ_μ です。これらを見比べてみると

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\sigma_{ab}e^a_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}e^{b\nu}$$

となっていれば、変換則が満たされます。実際に変換してみれば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma_{ab}e^a_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}e^{b\nu} \ &\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma_{ab}e^b_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}e^{a\nu} + \frac{1}{2}\sigma_{ab}(\frac{\partial \omega^{ba}}{\partial x^\mu} + \omega^a{}_c e^c_\nu\frac{\partial e^{b\nu}}{\partial x^\mu} + \omega^b{}_c e^a_\nu\frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu}) \\
&= \frac{1}{2}\sigma_{ab}e^b_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}e^{a\nu} + \frac{1}{2}\omega^a{}_b(\sigma_{ac}e^b_\nu\frac{\partial e^{c\nu}}{\partial x^\mu} + \sigma_{ca}e^c_\nu\frac{\partial e^{b\nu}}{\partial x^\mu}) - \frac{1}{2}\sigma_{ba}\frac{\partial \omega^{ba}}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{1}{2}\sigma_{ab}e^b_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}e^{a\nu} + \frac{1}{2}\omega^{ab}[\sigma_{ab}, \sigma_{cd}]e^c_\nu\frac{\partial e^{d\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\sigma_{ba}\frac{\partial \omega^{ba}}{\partial x^\mu} \\
&= \Gamma_\mu + \frac{1}{2}\omega^{ab}[\sigma_{ab}, \Gamma_\mu] - \frac{1}{2}\sigma_{ab}\frac{\partial \omega^{ab}}{\partial x^\mu}
\end{aligned}$$

となって、Γ_μ の変換則を再現します。そして、微分演算子は一般座標系では共変微分 (ベクトルに対する) に置き換えられるので

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\sigma_{ab}e^a_\nu e^{b\nu}_{||\mu}$$

よって、スピノールに対する共変微分 ∇_a は

$$\nabla_a = e^\mu_a(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu) = e^\mu_a\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\sigma_{ab}e^\mu_a e^a_\nu e^{b\nu}_{||\mu}$$

となります。これによってラグランジアンでのスピノールの共変微分は表現されます。

というわけで、特殊相対論的に書かれたラグランジアンにおける微分演算子を、この共変微分に置き換えることで曲がった空間へと移行されます。例えば、質量 0 でのディラック方程式に対するラグランジアン

$$\psi^\dagger\gamma_0\gamma^a\partial_a\psi$$

での微分を共変微分に置き換えることで

$$\psi^\dagger\gamma_{\hat{0}}\gamma^{\hat{a}}\nabla_{\hat{a}}\psi = \psi^\dagger\gamma_{\hat{0}}\gamma^{\hat{a}}e^\mu_{\hat{a}}(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu)\psi = \psi^\dagger\gamma_{\hat{0}}\gamma^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu)\psi \quad (\gamma^\mu = e^\mu_{\hat{a}}\gamma^{\hat{a}})$$

となります (区別するためにローレンツ系の添え字にはハットをつけています)。このとき、ガンマ行列の代数は

$$\{\gamma_{\hat{a}}, \gamma_{\hat{b}}\} = 2\eta_{\hat{a}\hat{b}}\ ,\ \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

というのに従います。$g_{\mu\nu}$ は空間の計量です。