シュバルツシルト解とタイプ

「リーマンテンソルの成分」でリーマンテンソルの成分がわかったので、それを利用してシュバルツシルト解を導出します。
最後に、シュバルツシルト空間がペトロフタイプ D になっていることを示します。
「リーマンテンソルの成分」では計量を $dx^0 = cdt,\ dx^1 = d\varphi,\ dx^2 = dr,\ dx^3 = d\theta$ にしたので、対応づけるときに注意が必要です。
「リーマンテンソルの成分」で定義した記号を使っています。

「リーマンテンソルの成分」での計量の形

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(dx^1 - q_2 dx^2 - q_3 dx^3 - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2$$

に対して、静的で球対称として

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(dx^1)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2$$

$x^1 = \varphi,\ x^2 = r,\ x^3 = \theta$ として極座標にして

$$ds^2 = e^{2\nu}c^2dt^2 - e^{2\mu_2}dr^2 - (r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

これを使っていきます。球対称であるために ψ, ν, μ_2, μ_3 は r にのみ依存します。また、μ^3, ψ は

$$\mu_3 = \log r \qquad (e^{2\mu_3} = r^2)$$

$$\psi = \log[r\sin\theta] \qquad (e^{2\psi} = r^2\sin^2\theta)$$

ここから、未知関数 $e^{2\nu}, e^{2\mu_2}$ をリーマンテンソルを利用して求めていきます。
　リーマンテンソルの計算に必要なものを先に出しておくと

$$\mu_{3|2} = \frac{1}{r}\ ,\ \Psi_1 = \psi_{:1} = \psi_{|1} = 0\ ,\ \Psi_2 = \psi_{|2} = \frac{1}{r}\ ,\ \Psi_3 = \psi_{|3} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

また、ψ, ν, μ_2 は r にのみ依存させるので、それ以外の微分は 0 です (ν, μ_2 が時間依存しているとしても計算によって自動的に時間依存性が落とされて同じ結果になります)。後は虚数時間 ($x^0 \to -ix^4$) を導入するので

$$\nu = \mu_4\ ,\ \Psi_4 = \psi_{|4} = -i\psi_{|0} = 0$$

となり、これらによってリーマンテンソルの成分を全て計算できます。R_{1212} は「リーマンテンソルの成分」の結果から (添え字はテトラッドによる成分)

$$
\begin{aligned}
-R_{1212} = & -e^{-\psi-\mu_2}\mathcal{D}_2(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2) - e^{-2\mu_3}\Psi_3\mu_{2:3} - e^{-2\mu_4}\Psi_4\mu_{2:4} \\
& -e^{-\psi-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{|1} + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}(Q_{23})^2 + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}(Q_{24})^2 \\
= & -e^{-\psi-\mu_2}\mathcal{D}_2(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2) \\
= & -e^{-\psi-\mu_2}(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)_{|2} \\
= & -e^{-\psi-\mu_2}(e^{\psi-\mu_2}(\psi-\mu_2)_{|2}\Psi_2 + e^{\psi-\mu_2}\Psi_{2|2}) \\
= & -e^{-2\mu_2}(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu_{2|2}}{r} - \frac{1}{r^2}) \\
= & \frac{e^{-2\mu_2}}{r}\mu_{2|2}
\end{aligned}
$$

R_{1313} は

$$
\begin{aligned}
-R_{1313} = & -e^{-\psi-\mu_3}\mathcal{D}_3(e^{\psi-\mu_3}\Psi_3) - e^{-2\mu_2}\Psi_2\mu_{3:2} \\
= & -e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_3}\Psi_3\psi_{|3} + e^{\psi-\mu_3}\Psi_{3|3}) - e^{-2\mu_2}\frac{1}{r^2} \\
= & -e^{-2\mu_3}(\cot^2\theta + 1 - \cot^2\theta) - e^{-2\mu_2}\frac{1}{r^2} \\
= & \frac{1-e^{-2\mu_2}}{r^2} \qquad (e^{-2\mu_3} = r^{-2})
\end{aligned}
$$

R_{1414} は

$$
-R_{1414} = -e^{-2\mu_2}\Psi_2\mu_{4:2} = -\frac{e^{-2\mu_2}}{r}\nu_{|2}
$$

R_{2323} は

$$
\begin{aligned}
-R_{2323} = & -e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3:2})_{:2} \\
= & -e^{-\mu_2-\mu_3}(\frac{e^{\mu_3-\mu_2}}{r})_{:2} \\
= & -e^{-2\mu_2}(\frac{(\mu_3-\mu_2)_{|2}}{r} - \frac{1}{r^2}) \\
= & -e^{-2\mu_2}(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu_{2|2}}{r} - \frac{1}{r^2}) \\
= & \frac{e^{-2\mu_2}}{r}\mu_{2|2}
\end{aligned}
$$

R_{2424} は

$$
-R_{2424} = -e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{\mu_4-\mu_2}\mu_{4:2})_{:2} = -e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{\mu_4-\mu_2}\nu_{|2})_{|2}
$$

R_{3434} は

$$-R_{3434} = -e^{-2\mu_2}\mu_{4:2}\mu_{3:2} = -\frac{e^{-2\mu_2}}{r}\nu_{|2}$$

これが 0 にならない全ての成分です。

リーマンテンソルの成分が分かったので、それらを使って真空でのアインシュタイン方程式を見ていきます。真空でのアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} = 0$$

なので、今考えられる $R_{\alpha\alpha}$ は

$$R_{22} = R^1{}_{212} + R^3{}_{232} = 0$$

$$R_{44} = R^1{}_{414} + R^3{}_{434} = 0$$

そして、リーマンテンソルの添え字を上げ下げすると符号が変わるので

$$\begin{aligned} R_{22} - R_{44} = & -R_{1212} - R_{2323} + R_{1414} + R_{3434} \\ = & -\frac{e^{-2\mu_2}}{r}\mu_{2|2} - \frac{e^{-2\mu_2}}{r}\mu_{2|2} - \frac{e^{-2\mu_2}}{r}\nu_{|2} - \frac{e^{-2\mu_2}}{r}\nu_{|2} \\ = & -\frac{2e^{-2\mu_2}}{r}(\nu + \mu_2)_{|2} = 0 \end{aligned}$$

なので

$$(\nu + \mu_2)_{|2} = 0$$

を積分して

$$\nu = -\mu_2 + C$$

となります。ここでの積分定数 C は「シュバルツシルト解〜外部〜」と同じように、0 にして問題ありません。後は R_{33} での

$$\begin{aligned} R_{33} &= R^1{}_{313} + R^2{}_{323} + R^4{}_{343} \\ &= \frac{1 - e^{-2\mu_2}}{r^2} + \frac{e^{-2\mu_2}}{r}\mu_{2|2} - \frac{e^{-2\mu_2}}{r}\nu_{|2} = 0 \end{aligned}$$

そして $\nu = -\mu_2$ なので

$$\frac{1-e^{-2\mu_2}}{r^2} = -\frac{2e^{-2\mu_2}}{r}\mu_{2|2}$$

これは変形させると

$$\begin{aligned}1-e^{-2\mu_2} =& -2re^{-2\mu_2}\mu_{2|2}\\ 1 =& -2re^{-2\mu_2}\mu_{2|2}+e^{-2\mu_2}\\ =& (e^{-2\mu_2}r)_{|2}\end{aligned}$$

なので、積分すると

$$e^{-2\mu_2}r = r + C$$

積分定数 C を $-2m$ として

$$e^{-2\mu_2} = 1-\frac{2m}{r} = e^{2\nu}$$

というわけで、計量は

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{r})c^2dt^2 - (1-\frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - (r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

となり、シュバルツシルト解になります。「シュバルツシルト解〜外部〜」の導出と違うところは、クリストッフェル記号を計算していくのでなくリーマンテンソルを使っているというだけです。比べてみれば分かりますが同じ計算をしています。

今まで見てきたリーマンテンソルの成分はテトラッド成分で、その直交基底テトラッドは

$$e_{(a)\mu}e^{(a)}_{\nu} = g_{\mu\nu}\ ,\ e^{\mu}_{(a)}e_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)} \quad (\eta_{(a)(b)} = (+,-,-,-))$$

より

$$e_{(0)\mu} = (e^{\nu},0,0,0)\ ,\ e_{(1)\mu} = (0,-r\sin\theta,0,0)\ ,\ e_{(2)\mu} = (0,0,e^{\mu_2},0)\ ,\ e_{(3)\mu} = (0,0,0,-r)$$

$$e^{\mu}_{(0)} = (e^{-\nu},0,0,0)\ ,\ e^{\mu}_{(1)} = (0,(r\sin\theta)^{-1},0,0)\ ,\ e^{\mu}_{(2)} = (0,0,e^{-\mu_2},0)\ ,\ e^{\mu}_{(3)} = (0,0,0,r^{-1})$$

となっていて、これによってリーマンテンソルのテトラッド成分が構成されています。ただし、虚数時間を使っているので、$e_{(0)}$ は計量 $(-1,-1,-1,-1)$ による $e_{(4)}$ に変更されます。注意ですが、今の場合 $e_{(1)}$ は φ に対応しているものです。これから、共変なテンソル成分は (括弧をつけたほうがテトラッド成分)

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{(a)(b)(c)(d)}e^{(a)}_{\mu}e^{(b)}_{\nu}e^{(c)}_{\rho}e^{(d)}_{\lambda}$$

によって求められます。例えばテンソル成分での R_{1313} は

$$
\begin{aligned}
R_{1313} &= R_{(a)(b)(c)(d)} e_1^{(a)} e_3^{(b)} e_1^{(c)} e_3^{(d)} \\
&= R_{(1)(3)(1)(3)} e_1^{(1)} e_3^{(3)} e_1^{(1)} e_3^{(3)} \\
&= -\frac{1-e^{-2\mu_2}}{r^2}(r\sin\theta)^2 r^2 \\
&= -\frac{1}{r^2}\frac{2m}{r}(r\sin\theta)^2 r^2 \\
&= -2mr\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

となります。虚数時間にしているので、$R_{(1)(4)(1)(4)}$ のように (4) 成分を持っているものを $R_{(1)(0)(1)(0)}$ と通常の時間に戻すときには

$$
R_{(1)(4)(1)(4)} = i^2 R_{(1)(0)(1)(0)} = -R_{(1)(0)(1)(0)}
$$

として、1 つ元に戻すときに i が出てきます。実際にやってみれば

$$
\begin{aligned}
-R_{(1)(4)(1)(4)} &= R_{(1)(0)(1)(0)} \\
&= -\frac{e^{-2\mu_2}}{r}\nu_{|2} \\
&= -\frac{e^{-2\mu_2}}{r}\frac{e^{2\mu_2}-1}{2r} \qquad (\nu_{|2} = -\mu_{2|2} = \frac{e^{2\mu_2}-1}{2r}) \\
&= -\frac{1-e^{-2\mu_2}}{2r^2} \\
&= -\frac{m}{r^3}
\end{aligned}
$$

このようになります。ちなみに、$r=2m$ とすれば

$$
-R_{(1)(0)(1)(0)}(r=2m) = \frac{1}{8}\frac{1}{m^2}
$$

となるので、m が大きくなれば曲率が小さくなることが分かります (他の成分も $1/m^2$ に比例)。つまり、m が大きければテトラッドの系にいる観測者に対して、$r=2m$ での地平面は特異性を持っていません (観測者は通過できる)。

また、最初の計量の形を

$$
ds^2 = f^2((dx^0)^2 - (dx^2)^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)
$$

とすれば、手間はかなり増えますがクルスカル座標でのシュバルツシルト解も求まります。

次にジュバルツシルト空間がペトロフタイプ D であることを示します。必要なのはヌル測地線ですが、これは「光の軌道」のところで求めたもので、$ds^2=0$ から

$$0 = (1 - \frac{2m}{r})^{-1} c^2 l^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = h$$

$$(1 - \frac{2m}{r}) \dot{t} = l$$

h はエネルギー、l は角運動量に対応する定数です。今知りたいのは動径に対するヌル測地線なので、$h = 0$ として

$$\frac{dr}{ds} = \pm cl \tag{1}$$

$$(1 - \frac{2m}{r}) \frac{dt}{ds} = l \tag{2}$$

そうすると、ヌル測地線の接ベクトルとして

$$\frac{dt}{ds} = l(1 - \frac{2m}{r})^{-1} \ , \ \frac{dr}{ds} = \pm cl \ , \ \frac{d\theta}{ds} = 0 \ , \ \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad (l(1 - \frac{2m}{r})^{-1}, \pm cl, 0, 0)$$

このようなものが求まり、これによってヌルベクトル $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}$ をつくります。

ベクトル成分の並びを t, r, θ, φ に戻します。定数 l と面倒なので c も無視してしまい (幾何学単位系)、dr/ds の $\pm$ によって区別することで 2 つのヌルベクトルの成分は

$$l^\mu = \frac{1}{\Delta}(r^2, \Delta, 0, 0) \ , \ n^\mu = \frac{1}{2r^2}(r^2, -\Delta, 0, 0)$$

$$l_\mu = (1, -\frac{r^2}{\Delta}, 0, 0) \ , \ n_\mu = \frac{1}{2r^2}(\Delta, r^2, 0, 0) \quad (\Delta = r^2 - 2mr)$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$ に対して t, r, θ, φ です。$\boldsymbol{n}$ では、直交条件 $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = 1$(ギリシャ文字の添え字の上げ下げはシュバルツシルト計量を使う) を満たさせるために $\Delta/2r^2$ をかけています。残りのヌルベクトルは、シュバルツシルト空間の直交基底ベクトルによるテトラッド (今の添え字の並びに合わせるために上での並びを変更させています)

$$e_{(1)\mu} = (e^\nu, 0, 0, 0) \ , \ e_{(2)\mu} = (0, -e^{\mu_2}, 0, 0) \ , \ e_{(3)\mu} = (0, 0, -r.0) \ , \ e_{(4)\mu} = (0, 0, 0, -r \sin\theta)$$

$$e^\mu_{(1)} = (e^{-\nu}, 0, 0, 0) \ , \ e^\mu_{(2)} = (0, e^{-\mu_2}, 0, 0) \ , \ e^\mu_{(3)} = (0, 0, r^{-1}, 0) \ , \ e^\mu_{(4)} = (0, 0, 0, (r \sin\theta)^{-1})$$

から、実ヌルテトラッドの組 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ での $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{e}_{(3)}, \boldsymbol{e}_{(4)}$ と思い

$$
\begin{aligned}
m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\mu + ib^\mu) = \frac{1}{r\sqrt{2}}((0,0,1,0) + i(0,0,0,(\sin\theta)^{-1})) \\
&= \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,i(\sin\theta)^{-1}) \\
\overline{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\mu - ib^\mu) = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,-i(\sin\theta)^{-1}) \\
m_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu - ib_\mu) = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,-r^2,-ir^2\sin\theta) \\
\overline{m}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu + ib_\mu) = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,-r^2,ir^2\sin\theta)
\end{aligned}
$$

のように作ります ($\boldsymbol{m}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = -1$)。

スピン係数を求めるために、まずは「テトラッド」のところで定義した $\lambda_{(a)(b)(c)}$ の値をこの複素ヌルテトラッド $\boldsymbol{l},\boldsymbol{n},\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}}$ を使って求めます。$\lambda_{(a)(b)(c)}$ は

$$
\lambda_{(a)(b)(c)} = (e_{(b)\mu|\nu} - e_{(b)\nu|\mu})e^\mu_{(a)}e^\nu_{(c)}
$$

と与えているので、

$$
\begin{aligned}
\lambda_{(1)(2)(2)} &= e^\mu_{(1)}(e_{(2)\mu|\nu} - e_{(2)\nu|\mu})e^\nu_{(2)} \\
&= (n_{\mu|\nu} - n_{\nu|\mu})l^\mu n^\nu \\
&= n_{0|0}l^0n^0 + n_{0|1}l^0n^1 + n_{1|0}l^1n^0 + n_{1|1}l^1n^1 - n_{0|0}l^0n^0 - n_{0|1}l^1n^0 - n_{1|0}l^0n^1 - n_{1|1}l^1n^1 \\
&= \frac{-\Delta}{2r^2}\frac{r^2}{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Delta}{2r^2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Delta}{2r^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(1 - \frac{2m}{r}) \\
&= -\frac{m}{r^2}
\end{aligned}
$$

他の消えずに残る成分は

$$
\lambda_{(2)(4)(3)} = -\frac{r-2m}{2r^2}\ ,\ \lambda_{(3)(4)(1)} = -\frac{1}{r}\ ,\ \lambda_{(3)(4)(3)} = \frac{\cot\theta}{r\sqrt{2}}
$$

そうすると、リッチ回転係数は

$$
\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2}(\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)})
$$

と定義されているので、スピン係数は

- $\gamma_{(3)(1)(4)}$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{(3)(1)(4)} = \rho = \frac{1}{2}(\lambda_{(3)(1)(4)} + \lambda_{(4)(3)(1)} - \lambda_{(1)(4)(3)}) \\
= \frac{1}{2}(\lambda_{(3)(1)(4)} + (\lambda_{(3)(4)(1)})^* + \lambda_{(3)(4)(1)}) \\
= \frac{1}{2}(-\frac{2}{r}) \\
= -\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

- $\gamma_{(2)(4)(3)}$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{(2)(4)(3)} = \mu = \frac{1}{2}(\lambda_{(2)(4)(3)} + \lambda_{(3)(2)(4)} - \lambda_{(4)(3)(2)}) \\
= \frac{1}{2}(\lambda_{(2)(4)(3)} + \lambda_{(3)(2)(4)} + (\lambda_{(2)(4)(3)})^*) \\
= -\frac{r-2m}{2r^2}
\end{aligned}
$$

- $\gamma_{(2)(1)(2)} + \gamma_{(3)(4)(2)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\gamma_{(2)(1)(2)} + \gamma_{(3)(4)(2)}) = \gamma = \frac{1}{4}(\lambda_{(2)(1)(2)} + \lambda_{(2)(2)(1)} - \lambda_{(1)(2)(2)} + \lambda_{(3)(4)(2)} + \lambda_{(2)(3)(4)} - \lambda_{(4)(2)(3)}) \\
= \frac{1}{4}(\lambda_{(2)(1)(2)} + \lambda_{(2)(2)(1)} - \lambda_{(1)(2)(2)} - \lambda_{(2)(4)(3)} + (\lambda_{(2)(4)(3)})^* - \lambda_{(4)(2)(3)}) \\
= \frac{1}{4}(-2\lambda_{(1)(2)(2)} + \lambda_{(2)(1)(2)}) \\
= \frac{m}{2r^2}
\end{aligned}
$$

- $\gamma_{(2)(1)(4)} + \gamma_{(3)(4)(4)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\gamma_{(2)(1)(4)} + \gamma_{(3)(4)(4)}) = \alpha = \frac{1}{4}(\lambda_{(2)(1)(4)} + \lambda_{(4)(2)(1)} - \lambda_{(1)(4)(2)} + \lambda_{(3)(4)(4)} + \lambda_{(4)(3)(4)} - \lambda_{(4)(4)(3)}) \\
= \frac{1}{4}(-2(\lambda_{(3)(3)(4)})^*) \\
= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\cot\theta}{r}
\end{aligned}
$$

- $\gamma_{(2)(1)(3)} + \gamma_{(3)(4)(3)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\gamma_{(2)(1)(3)} + \gamma_{(3)(4)(3)}) = \beta = \frac{1}{4}(\lambda_{(2)(1)(3)} + \lambda_{(3)(2)(1)} - \lambda_{(1)(3)(2)} + \lambda_{(3)(4)(3)} + \lambda_{(3)(3)(4)} - \lambda_{(4)(3)(3)}) \\
= \frac{1}{4}(2\lambda_{(3)(3)(4)}) \\
= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\cot\theta}{r}
\end{aligned}
$$

残りは 0 になるので、結果は

$$\rho = -\frac{1}{r} \ , \ \mu = -\frac{r-2m}{2r^2} \ , \ \gamma = \frac{m}{2r^2} \ , \ \alpha = -\frac{\cot\theta}{2r\sqrt{2}} \ , \ \beta = \frac{\cot\theta}{2r\sqrt{2}}$$

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \epsilon = \pi = \tau = 0$$

よって、$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0$ なので、$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}$ はヌル測地線で shear-free となります。というわけで、ゴールドバーグ・ザックスの定理より、シュバルツシルト空間はペトロフタイプ D です。