シュバルツシルト解〜内部〜

相対論的な安定した星の内部構造としてのシュバルツシルト解を求めます。
ここでは理想化して完全流体のエネルギー・運動量テンソルを使います。
「$'$」は r の微分です。

静的で球対称として星の内部をシュバルツシルト解によって与えます。使う条件として、静的で球対称に質量が分布しているとし、星の内部の物質は完全流体で近似し、核融合はすでに行われていなく、安定しているとします。また、状態方程式 $P=P(\rho)$ (P は圧力、ρ は密度) が局所的には存在すると仮定します。
粘性等を無視した完全流体のエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\alpha\beta}=\rho u_\alpha u_\beta+\frac{P}{c^2}(u_\alpha u_\beta-g_{\alpha\beta})$$

と与えられています。ρ は質量密度、P は圧力、u^μ は流体の各点の 4 元速度ベクトルです。今の場合、内部の物質（流体）は静止しているとして、４元速度ベクトルを $u^\mu=(u^0,0,0,0)$ とします。計量の形は、静的で球対称な場合での一般的な形

$$ds^2=e^\nu c^2dt^2-(e^\lambda dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2))$$

を使います。なので、$g_{\mu\nu}=0\ (\mu\neq\nu)$ です。
まず、エネルギー・運動量テンソルを計算していきます。することは簡単で、４元速度の内積

$$g_{00}(u^0)^2=1$$

から、u_0 は

$$u_0=g_{0\alpha}u^\alpha=g_{00}u^0=\sqrt{g_{00}}$$

これを $T_{\alpha\beta}$ に入れて

$$\begin{aligned}T_{\alpha\beta}&=\rho g_{00}+\frac{P}{c^2}(g_{00}-g_{\alpha\beta})\\&=\rho\begin{pmatrix}g_{00}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\frac{P}{c^2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&g_{11}&0&0\\0&0&g_{22}&0\\0&0&0&g_{33}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\rho e^\nu&0&0&0\\0&\dfrac{P}{c^2}e^\lambda&0&0\\0&0&\dfrac{P}{c^2}r^2&0\\0&0&0&\dfrac{P}{c^2}r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これが流体が静止している場合でのエネルギー・運動量テンソルになります。
　アインシュタイン方程式を

$$R_{\alpha\beta}=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T)$$

とした形で使うことにします。なので、$T_{\alpha\beta}$ の縮約 T が必要になり

$$T^{\alpha}_{\ \alpha}=T=\rho u_\alpha u^\alpha+\frac{P}{c^2}(u_\alpha u^\alpha-g^\alpha_\alpha)=\rho+\frac{P}{c^2}(1-4)=\rho-\frac{3P}{c^2}$$

これによって、アインシュタイン方程式の右辺は、成分ごとに書くと

- 00 成分

$$T_{00}-\frac{1}{2}g_{00}T=\rho e^\nu-\frac{1}{2}e^\nu(\rho-\frac{3P}{c^2})=\frac{e^\nu}{2}(\rho+\frac{3P}{c^2})$$

- 11 成分

$$T_{11}-\frac{1}{2}g_{11}T=\frac{P}{c^2}e^\lambda+\frac{1}{2}e^\lambda(\rho-\frac{3P}{c^2})=\frac{1}{2}e^\lambda(\rho-\frac{P}{c^2})$$

- 22 成分

$$T_{22}-\frac{1}{2}g_{22}T=\frac{P}{c^2}r^2+\frac{1}{2}r^2(\rho-\frac{3P}{c^2})=\frac{1}{2}r^2(\rho-\frac{P}{c^2})$$

- 33 成分

$$T_{33}-\frac{1}{2}g_{33}T=\frac{P}{c^2}r^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta(\rho-\frac{3P}{c^2})=\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta(\rho-\frac{P}{c^2})$$

後は左辺のリーマンテンソルですが、計量の形は「シュバルツシルト解〜外部〜」と同じなので、「シュバルツシルト解〜外部〜」で求めたものがそのまま使えて

$$\begin{aligned}
R_{00}=&\ \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{2}+\frac{2\nu'}{r})\\
R_{11}=&\ -\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\lambda'}{r}\\
R_{22}=&\ 1-(e^{-\lambda}r)'-re^{-\lambda}\frac{\lambda'+\nu'}{2}=1-e^{-\lambda}(1+\frac{\nu'r}{2}-\frac{\lambda'r}{2})\\
R_{33}=&\ R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

「$'$」は r 微分を表しています。
　というわけで、アインシュタイン方程式の成分は

- 00 成分

$$\frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{2}+\frac{2\nu'}{r})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{1}{2}e^{\nu}(\rho+\frac{3P}{c^2})$$
$$e^{-\lambda}(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'}{r})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\frac{\rho}{2}+\frac{3P}{2c^2})$$

- 11 成分

$$-e^{-\lambda}(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\lambda'}{r})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\frac{\rho}{2}-\frac{P}{2c^2})$$

- 22 成分

$$1-e^{-\lambda}(1+\frac{\nu' r}{2}-\frac{\lambda' r}{2})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}r^2(\frac{\rho}{2}-\frac{P}{2c^2})$$
$$\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{2r}-\frac{\lambda'}{2r})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{1}{2}(\rho-\frac{P}{c^2})$$

R_{33} は R_{22} と同じになるので全部で 3 個です。これらから密度 ρ と圧力 P についての式を求めたいので、ρ,P に関する方程式を作っていきます。

まず 00 成分と 11 成分の式を足すことで

$$e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho+\frac{P}{c^2}) \tag{1}$$

これから、ρ と P が 0 以上なら $\nu'+\lambda'$ も 0 以上です。また、$\rho,P=0$ で真空になるので、$\nu'+\lambda'=0$ が出てきます。

(1) の右辺は 22 成分の右辺と同じ形にできます。-2ρ を入れることで

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho+\frac{P}{c^2}-2\rho)=-\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho-\frac{P}{c^2})$$

もしくは、$-2P/c^2$ を入れることで

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho+\frac{P}{c^2}-\frac{2P}{c^2})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho-\frac{P}{c^2})$$

このように二通りの方法で 22 成分と同じ形を作ることができます。そうすると (1) は

$$e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho+\frac{P}{c^2})\ \Rightarrow\ e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})-2\frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho=-\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho-\frac{P}{c^2}) \tag{2a}$$
$$e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho+\frac{P}{c^2})\ \Rightarrow\ e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})-\frac{2P}{c^2}\frac{8\pi\kappa}{c^2}=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho-\frac{P}{c^2}) \tag{2b}$$

とできて、これらを 22 成分の式に入れます。

(2a) を入れると

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{r^2}-2e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{2r}-\frac{\lambda'}{2r}) &= -e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})+2\frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \\
\frac{2}{r^2}-e^{-\lambda}(\frac{2}{r^2}+\frac{\nu'}{r}-\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'+\lambda'}{r}) &= 2\frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \\
\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}) &= \frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \qquad (3)
\end{aligned}
$$

これが ρ の式になります。(2b) を入れた場合は

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{r^2}-2e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{2r}-\frac{\lambda'}{2r}) &= e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})-2\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{P}{c^2} \\
\frac{2}{r^2}+e^{-\lambda}(\frac{-2}{r^2}-\frac{\nu'}{r}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'+\lambda'}{r}) &= -2\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{P}{c^2} \\
\frac{2}{r^2}+e^{-\lambda}(\frac{-2}{r^2}-\frac{2\nu'}{r}) &= -2\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{P}{c^2} \\
\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}) &= -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{P}{c^2} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

これが P の式になります。また、11 成分と 22 成分の式を足すことで

$$
\begin{aligned}
0 &= e^{-\lambda}(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}-\frac{\nu'}{2r}+\frac{\lambda'}{2r})+\frac{1}{r^2} \\
\frac{e^{\lambda}}{r^2} &= (-\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{2r}-\frac{\lambda'}{2r}) \\
&= \frac{1}{r^2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'+\lambda'}{2r}-\frac{\nu''}{2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

これは ν,λ の式になります。

しかし、今求めたのは (3),(4),(5) の 3 個に対して、求めるべきものは ν、λ、ρ、P の 4 つなので、1 つ式が足りません。足りない後 1 つは、ρ と P をつなぐ状態方程式 $P=P(\rho)$ によって与えます。

シュバルツシルト解での結果から解の形を与えてみます。「シュバルツシルト解〜外部〜」での λ の解

$$
e^{-\lambda}=1-\frac{2m}{r}
$$

において、m を r の関数 $m(r)$ としてみます。これを r で微分して

$$
\begin{aligned}
2m(r) &= r(1-e^{-\lambda}) \\
(2m)' &= 1-e^{-\lambda}+r\lambda' e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

さらに、$1/r^2$ をかけることで

$$
\frac{1}{r^2}(2m)'=\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r})
$$

となり、(3) の左辺と同じになります。よって、(3) は

$$\frac{1}{r^2}(2m)' = \frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho$$
$$m' = \frac{\kappa}{c^2}4\pi r^2\rho$$

と与えられます。積分すれば

$$m(r) = \frac{4\pi\kappa\rho}{c^2}\int_0^r dr\ r^2$$

積分範囲の下限において、$r = 0$ で $m(r) = 0$ として、計量が発散しないようにします (m は r よりも早く 0 に近づく)。この式から、$m(r)$ は半径 r での星の全質量に相当することがわかります。外部の解での m は定数で

$$m = \frac{\kappa M}{c^2}$$

と与えられていて、M は星の全質量なので、$m(r)$ は半径 r での星の全質量と解釈できます。というわけで、星の内側では $m(r)$、外側では m とすることで、内側と外側の境界を横切って計量 $e^\lambda = g_{11}$ は連続に繋がります。

次に、星が安定して存在しているとしているので、圧力勾配 P' (P を r で微分したもの）が重力と釣り合っているとします (重力平衡の条件)。

まず準備として、(4) を変形して

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}) &= -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{P}{c^2} \qquad (e^\lambda = \frac{r}{r-2m}) \\ \nu' &= \frac{8\pi\kappa P}{c^4}\frac{r^2}{r-2m} + \frac{1}{r-2m} - \frac{1}{r} \\ &= \frac{8\pi\kappa P r^3/c^4 + 2m}{r(r-2m)} \end{aligned} \tag{6}$$

次に、これとは別に (4) を r で微分して

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}) &= -\frac{8\pi\kappa P}{c^4} \\ \frac{-2}{r^3} + \lambda' e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}) - e^{-\lambda}(\frac{-2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2}) &= -\frac{8\pi\kappa P'}{c^4} \\ \frac{-2}{r^3} + e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r^2} + \frac{\nu'\lambda'}{r} + \frac{2}{r^3} - \frac{\nu''}{r} + \frac{\nu'}{r^2}) &= -\frac{8\pi\kappa P'}{c^4}\end{aligned}$$

ここの左辺の ν'' が邪魔なので (5) を使って置き換えます。(5) は

$$\nu'' = -\frac{2e^\lambda}{r^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' + \lambda'}{r}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{-2}{r^3}+e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r^2}+\frac{\nu'\lambda'}{r}+\frac{2}{r^3}+\frac{\nu'}{r^2}+\frac{2e^\lambda}{r^3}-\frac{2}{r^3}+\frac{\nu'^2}{2r}-\frac{\nu'\lambda'}{2r}-\frac{\nu'+\lambda'}{r^2})&=e^{-\lambda}(\frac{\nu'\lambda'}{2r}+\frac{\nu'^2}{2r})\\&=\frac{\nu'}{2}e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\nu'}{2}e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})=-\frac{8\pi\kappa P'}{c^4}$$

これと (1)

$$e^{-\lambda}(\frac{\nu'+\lambda'}{r})=\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho+\frac{P}{c^2})$$

を比べると、$\nu'/2$ があるだけの違いなので

$$\begin{aligned}-\frac{8\pi\kappa P'}{c^4}&=\frac{\nu'}{2}\frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho+\frac{P}{c^2})\\\frac{P'}{c^2}&=-(\frac{\nu'}{2}\rho+\frac{\nu'P}{2c^2})\end{aligned}$$

ν' を (6) で置き換えて

$$\begin{aligned}\frac{P'}{c^2}&=-\frac{\nu'}{2}(\rho+\frac{P}{c^2})\\P'&=-\frac{c^2(4\pi\kappa Pr^3/c^4+m)}{r(r-2m)}(\rho+\frac{P}{c^2})\end{aligned}$$

これを Tolman-Openheimer-Volkov(TOV) 方程式と呼び、流体力学の結果を相対論に一般化したものです。
実際に流体力学との対応が取れていることを見ておきます。ニュートンの重力理論から、重力は

$$F=\frac{\kappa M(r)}{r^2}\rho drdS$$

$M(r)$ は半径 r までの全質量、dS は微小面積で、$\rho drdS$ は微小領域での質量です。圧力は力を面で割ったものなので、$drdS$ の領域での圧力差による力は $P'drdS$ です。これと重力が釣り合っているなら

$$P'=-\frac{\kappa M\rho}{r^2}$$

これが非相対論的な場合です。
これに対して TOV 方程式を、r は十分大きい、密度と圧力は十分小さいとします。そうすると

$$r-2m\simeq r\ ,\ \frac{4\pi\kappa Pr^3}{c^4}+m\simeq m\ ,\ \rho+\frac{P}{c^2}\simeq\rho$$

と近似され

$$P' = -\frac{c^2 m}{r^2}\rho = -\frac{\kappa M}{r^2}\rho$$

よって、非相対論的な場合と一致するので、相対論的に一般化されたものと考えられます。また、今の近似、半径がシュバルツシルト半径より大きい、密度と圧力が小さいという近似は星の構造に適したものです。

これで計量を求めるのに必要なものが一通り揃ったことになります。まとめれば

$$P = P(\rho) \tag{7a}$$

$$m' = \frac{4\pi\kappa\rho r^2}{c^2} \tag{7b}$$

$$\frac{P'}{c^2} = -\frac{(4\pi\kappa P r^3/c^4 + m)}{r(r-2m)}(\rho + \frac{P}{c^2}) \tag{7c}$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{7d}$$

$$\nu' = -\frac{2P'}{\rho c^2 + P} \tag{7e}$$

さらに条件として、星の表面となる半径 r_0 で圧力が $P(r_0) = 0$、内部と外部は連続的に繋がるとします。

ここで、話を簡単にするために、ここから密度 ρ は定数とします。これで g_{11} は簡単に求められます。まず、(7b) を積分して

$$m(r) = \frac{4\pi\kappa\rho r^3}{3c^2}$$

$r = 0$ で $m(r) = 0$ としています。これを (7d) に入れて

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi\kappa\rho r^2}{3c^2} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \qquad (R^2 = \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho})$$

e^{λ} が g_{11} なので、これの逆が g_{11} です。R を使ってますがはリッチスカラーとは無関係です。

次に、(7e) を積分して

$$\begin{aligned}\int d\nu =& -\int \frac{2dP}{\rho c^2 + P}\\ \nu =& -2\log[\rho c^2 + P] + C\\ Ce^{-\frac{\nu}{2}} =& \rho c^2 + P\end{aligned}$$

C は任意定数です。任意なので、係数を

$$Ce^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho + \frac{P}{c^2}) \tag{8}$$

としておきます。そうすると、これは (1) との対応から

$$
\begin{aligned}
Ce^{-\frac{\nu}{2}} &= e^{-\lambda}(\frac{\nu' + \lambda'}{r}) \\
&= e^{-\lambda}\frac{\nu'}{r} + e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{r} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\nu'}{r} - \frac{(e^{-\lambda})'}{r}
\end{aligned}
$$

$e^{-\lambda}$ はわかっているので

$$
rCe^{-\frac{\nu}{2}} = (1 - \frac{r^2}{R^2})\nu' + \frac{2r}{R^2}
$$

これを解くために

$$
e^{\frac{\nu}{2}} = f\ ,\ f' = \frac{\nu'}{2}e^{\frac{\nu}{2}}
$$

と置き換えて

$$
\begin{aligned}
rC &= (1 - \frac{r^2}{R^2})\nu' e^{\frac{\nu}{2}} + \frac{2r}{R^2}e^{\frac{\nu}{2}} \\
&= 2(1 - \frac{r^2}{R^2})f' + \frac{2r}{R^2}f
\end{aligned}
$$

$$
(1 - \frac{r^2}{R^2})f' + \frac{r}{R^2}f = \frac{C}{2}r
$$

これは非同次の微分方程式です。なので、まずは右辺の形から特解を

$$
f_p = \frac{C}{2}R^2
$$

とします。そして、同次での一般解は

$$
(1 - \frac{r^2}{R^2})f_0' + \frac{r}{R^2}f_0 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{df_0}{f_0} &= -\frac{r}{R^2}\frac{R^2}{R^2 - r^2}dr \\
\int \frac{df_0}{f_0} &= -\int dr \frac{r}{R^2 - r^2} \\
\log f_0 &= \frac{1}{2}\log[R^2 - r^2] + D \\
f_0 &= D(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

D は任意定数です。というわけで、特解とこれを足して

$$f = e^{\frac{\nu}{2}} = f_p + f_0 = \frac{C}{2}R^2 - D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

これの 2 乗が g_{00} になります。

これでの g_{00} と g_{11} は

$$g_{00} = e^{\nu} = (\frac{C}{2}R^2 - D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^2 = (A - D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^2$$
$$g_{11} = e^{\lambda} = (1 - \frac{r^2}{R^2})^{-1}$$

$A = CR^2/2$ としています。よって、内部のシュバルツシルト解は

$$ds^2 = (A - D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^2 c^2 dt^2 - (1 - \frac{r^2}{R^2})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

後は、これに星の表面で圧力が 0、外部のシュバルツシルト解と連続に繋がっているという条件を入れて任意定数 A, D を決定します。また、g_{11} を見れば分かるように $r = R$ で特異点が存在します。

まずは任意定数 A を決定させます。そのために

$$A = \frac{C}{2}R^2 = \frac{3c^2}{16\pi\kappa\rho}C \quad (C = \frac{2A}{R^2})$$

と (9) での

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{C}{2}R^2 - D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}$$

の二つを (8) に入れて

$$Ce^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho + \frac{P}{c^2})$$
$$\frac{2A}{R^2}(\frac{1}{2}\frac{2A}{R^2}R^2 - D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^{-1} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}(\rho + \frac{P}{c^2})$$
$$\frac{2A}{R^2}(A - D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^{-1} = \frac{3}{\rho R^2}(\rho + \frac{P}{c^2})$$
$$\frac{2\rho}{3}A(A - D(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^{-1} = (\rho + \frac{P}{c^2})$$

これに条件 $r = r_0$ で $P = 0$ を与えて

$$\frac{2}{3}A(A-D(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^{-1}=1$$

$$\frac{2}{3}A=A-D(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$A=3D(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}$$

となります。

任意定数 D を求めます。今度は、連続になるという条件を使います。g_{00} が r_0 で外部の計量と連続であることは

$$(A-D(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^2=1-\frac{2m}{r_0}$$

g_{11} では

$$1-\frac{r_0^2}{R^2}=1-\frac{2m}{r_0}$$

g_{00} に求めた A を入れて

$$\begin{aligned}(A-D(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^2 &= A^2+D^2(1-\frac{r_0^2}{R^2})-2AD(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}\\ &= 9D^2(1-\frac{r_0^2}{R^2})+D^2(1-\frac{r_0^2}{R^2})-6D^2(1-\frac{r_0^2}{R^2})\\ &= 4D^2(1-\frac{r_0^2}{R^2})\\ &= 4D^2(1-\frac{8\pi\kappa\rho r_0^2}{3c^2})\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}4D^2(1-\frac{8\pi\kappa\rho r_0^2}{3c^2}) &= 1-\frac{2m}{r_0}\\ &= 1-\frac{2}{r_0}\frac{\kappa M}{c^2}\end{aligned}$$

これが成立するためには

$$\begin{aligned}D &= \pm\frac{1}{2}\\ M &= \frac{4\pi}{3}\rho r_0^3 \qquad (10)\end{aligned}$$

であればいいです。$D=+1/2$ に選びます。

任意定数 A, D が分かったので、線素は

$$ds^2 = (\frac{3}{2}(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^2 c^2 dt^2 - (1-\frac{r^2}{R^2})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

これが $r \le r_0$ でのシュバルツシルト解になり、$r \ge r_0$ で外部解と同じになります。そして、g_{11} は $r = R$ で特異点を持っています。しかし、星の半径 r_0 はシュバルツシルト半径 $2m$ よりも大きいとすることで、$r > r_0$ で特異点は出てこなくなります。これによって、星の全質量に対して

$$\begin{aligned} r_0 &> \frac{2\kappa M}{c^2} \\ M &< \frac{c^2 r_0}{2\kappa} \end{aligned}$$

という制限があることになります。このときは外部解より、$r > r_0$ において特異点は存在しません。

今度は内部解で $r_0 < R$ と仮定してみると

$$r_0^2 < R^2 = \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho}$$

で ρ と M の関係 (10) より

$$r_0^2 < \frac{3c^2}{8\pi\kappa}\frac{4\pi r_0^3}{3M} = \frac{c^2 r_0^3}{2\kappa M}$$

$$M < \frac{c^2 r_0}{2\kappa}$$

となって全質量に対して同じ制限を与えています。また、$r_0 < R$ と制限することで、内部解 $r < r_0$ では、$r = R$ の特異点は出てきません。

これよりも厳密に質量の上限を見積もることができます。圧力の式

$$(\rho + \frac{P}{c^2}) = \frac{2\rho}{3} A(A - D(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}})^{-1}$$

を見て分かるように分母が 0 にならない限り圧力は無限大になりません。そして $r = 0$ の中心圧力と考えてしまい、A と D の関係式

$$A = 3D(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}$$

より分母は

$$\frac{3}{2}(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} > 0$$

という条件がかかるので

$$\frac{3}{2}(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$$

という関係になります。これは

$$\frac{9}{4}(1-\frac{r_0^2}{R^2}) > \frac{1}{4}$$

$$r_0^2 < \frac{8}{9}R^2 = \frac{c^2}{3\pi\kappa\rho}R^2$$

ρ と M の関係 (10) を使うことで、M の制限は

$$M < \frac{4}{9}\frac{c^2 r_0}{\kappa}$$

これは前に出てきた上限よりも小さな値になります。この上限は今のような理想化された星だけでなく、一般的な星に対しても当てはめられます。

・補足

密度に関する話をしておきます。最初に 3 次元での体積要素を求めます。「共変微分」での発散で出てきたのと同じことをします。

シュバルツシルト解での内部の 3 次元計量は

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (1-\frac{r^2}{R^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

これの行列式のルートは

$$\sqrt{g} = (1-\frac{r^2}{R^2})^{-\frac{1}{2}} r^2 \sin\theta$$

よって、3 次元での不変体積要素は

$$dV = (1-\frac{r^2}{R^2})^{-\frac{1}{2}} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

これが内部での物理的な体積要素です。見て分かるように通常の三次元極座標での体積要素に $(1-r^2/R^2)^{-\frac{1}{2}}$ がいて、これは 1 よりも大きいです。

これを星の半径 r_0 までで積分して

$$
\begin{aligned}
V &= \int drd\theta d\varphi \sin\theta (1-\frac{r^2}{R^2})^{-\frac{1}{2}} r^2 \\
&= 4\pi \int_0^{r_0} dr \frac{r^2}{(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}} \\
&= 4\pi \int_0^{x_0} dx \frac{R^3 \sin^2 x \cos x}{\cos x} \qquad (\sin x = \frac{r}{R}\ ,\ dx\cos x = \frac{1}{R} dr) \\
&= 4\pi R^3 \int_0^{x_0} \sin^2 x dx \\
&= 4\pi R^3 \big[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\big]_0^{x_0} \\
&= 2\pi R^3 (x_0 - \sin x_0 \cos x_0)
\end{aligned}
$$

( ) の中を逆三角関数に置き換えれば

$$
V = 2\pi R^3 (\arcsin\frac{r_0}{R} - \frac{r_0}{R}(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}) \qquad (\cos x = \frac{(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}{R})
$$

これが、内部の計量から求められた半径 r_0 での星の 3 次元体積です。

$r_0 < R$ として、r_0/R は小さいとすれば、arcsin は

$$
\arcsin\frac{r_0}{R} = \frac{r_0}{R} + \frac{1}{6}(\frac{r_0}{R})^3 + \frac{3}{40}(\frac{r_0}{R})^5 \cdots + \qquad (\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}})
$$

と展開できます。残っている項は

$$
\frac{r_0}{R}(1-\frac{r_0^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{r_0}{R}(1-\frac{1}{2}(\frac{r_0}{R})^2 - \frac{1}{8}(\frac{r_0}{R})^4 - \cdots)
$$

と展開して、両方を合わせて

$$
\frac{r_0}{R} + \frac{1}{6}(\frac{r_0}{R})^3 + \frac{3}{40}(\frac{r_0}{R})^5 - \frac{r_0}{R} + \frac{1}{2}(\frac{r_0}{R})^3 + \frac{1}{5}(\frac{r_0}{R})^5 + \cdots = \frac{2}{3}(\frac{r_0}{R})^3 + \frac{1}{5}(\frac{r_0}{R})^5 + \cdots
$$

よって、体積 V は

$$
V = 2\pi R^3 (\frac{2}{3}(\frac{r_0}{R})^3 + \frac{1}{5}(\frac{r_0}{R})^5 + \cdots) = \frac{4}{3}\pi r_0^3 (1 + \frac{3}{10}(\frac{r_0}{R})^2 + \cdots)
$$

計量に現れている M を全質量として体積で割った平均密度 ρ_0 は

$$
\frac{M}{V} = \rho_0 = \frac{3M}{4\pi r_0^3}(1 - \frac{3}{10}(\frac{r_0}{R})^2 + \cdots)
$$

一方で、上で使ってきた定数密度 ρ と M は (10) から

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r_0^3}$$

となっています。なので、ρ と ρ_0 は

$$\rho_0 = \rho(1 - \frac{3}{10}(\frac{r_0}{R})^2 + \cdots)$$

$(r_0/R)^2$ 以上の項で差が生じています。今求めた密度 ρ_0 は計量から求めたので、内部解による真っ当な定数密度です。このことから、ρ は質量 M を体積で割った密度と異なっています。ただし、r_0/R が十分小さければ無視できる差です。

$V\rho_0$ と M の差が何かを求めます。差は

$$\Delta M = V\rho_0 - M = V\rho_0 - V\rho_0(1 - \frac{3}{10}(\frac{r_0}{R})^2 + \cdots) = V\rho_0(\frac{3}{10}(\frac{r_0}{R})^2 + \cdots)$$

これを $V \simeq \frac{4}{3}\pi r_0^3$ と近似して

$$\Delta M \simeq \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0 \frac{3r_0^2}{10}\frac{8\pi\kappa\rho_0}{3c^2} = \frac{16}{15}\frac{\pi^2\kappa\rho_0^2 r_0^5}{c^2}$$

この差をニュートンの重力理論との対応から見ます。

無限遠から粒子を運ぶことで一様な密度 ρ_0 で半径 r の球を作るのに必要なエネルギーを求めます。ただし、必要なエネルギーではなく、球を作るときに失われるエネルギーと定義するので符号がマイナスになります。半径 r の表面のポテンシャル ϕ は

$$\phi = -\frac{4\kappa}{3r}\pi r^3\rho_0 = -\frac{4\kappa}{3}\pi r^2\rho_0$$

これに対して、半径 r の球の表面を dr 増加させる時に行う仕事によるエネルギーの減少は、体積 $4\pi r^2 dr$ の増加のために

$$-\frac{4\kappa}{3}\pi r^2\rho_0 4\pi r^2 dr = -\frac{16\kappa}{3}\pi^2 r^4\rho_0 dr$$

後はこれを半径 0〜r_0 で積分すればいいので

$$-\frac{16\kappa}{3}\pi^2\rho_0\int_0^{r_0} dr\ r^4 = -\frac{16\kappa}{15}\pi^2 r_0^5\rho_0 = E$$

これが半径 r_0 の球を作るときに失われるエネルギー、逆に言えば必要なエネルギーになります。これと ΔM を比べると

$$\Delta M = -\frac{E}{c^2}$$

となって、エネルギーと質量の関係 $E = mc^2$ となります。よって、差は重力による結合エネルギー (束縛エネルギー) と考えられます。つまり、計量に現れている M は結合エネルギーも含めた純粋な星の全質量（全質量エネルギー）と言えます。