

シュバルツシルト解～クルスカール座標～

シュバルツシルト解の特異点がどうなっているのか調べやすい座標系を導入します。
ダラダラと計算していますが、目的は $r = 2m$ で特異点を含まない座標変換の形を求めることです。

シュバルツシルト解は

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(cdt)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

これは第二項から分かるように、 $r = 2m$ で特異点らしきものを持ちます。 $r < 2m$ の領域では、計量の見た目からおかしいことになっています。 $r < 2m$ では g_{00} は

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}$$

からマイナスになり、 g_{11} は

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$$

からプラスになります。 $r > 2m$ ではその逆の g_{00} はプラス、 g_{11} はマイナスなので、符号が反転します。この時点ですでおかしいことになっています。 ct 軸は時間的領域 ($ds^2 > 0$) にあるはずなのに、 $r < 2m$ では空間的領域 ($ds^2 < 0$) にいます。 r 軸はその逆で時間的領域にあります。

しかし、現実の粒子は時間的領域で運動するとされているので、この場合 r が時間のように変化していくとも考えられ、時間なら r は連続的に小さくできるので粒子は $r = 0$ に到達できるのが予想できます。

実際にシュバルツシルト解は $r = 0$ まで行けることを見ていきます。まずは、 $r = 2m$ において座標時間 t では特異点となりますが、固有時間 τ を使うと特異点とならずに $r = 0$ まで有限の時間でいけることを示します。粒子の落下を見ていくので、「近日点」で出てきた赤道面上での関係

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = l \tag{1a}$$

$$\tag{1b}$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}c^2\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} = 1 \tag{1c}$$

を使います。ドットは弧長 s の微分で、 r, t は s の関数です。 l はエネルギー、 h は角運動量に対応します。 $h = r^2\dot{\varphi} = 0$ として動径方向にのみ落下しているものと考え、 $l = \frac{1}{c}$ と与えてみます。

そうすると (1c) は

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 &= 1 \\ \dot{r}^2 &= \frac{2m}{r} \end{aligned}$$

(1a) では

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = \frac{1}{c}$$

これを r が十分大きい ($r \gg 2m$) として

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}$$

s で積分すれば

$$t = \frac{s}{c} = \tau$$

となって、時間は慣性系での固有時 τ になるので、遠方で慣性系 (ミンコフスキー空間) になるという要請を満たします。ということで、固有時での r は s の関数、座標時間での r は t の関数とできます。

r が s の関数とした場合を計算してみると

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{2m}{r}$$

$$r^{\frac{1}{2}} dr = -\sqrt{2m} ds$$

$$\frac{2}{3} [r^{\frac{3}{2}}]_{r_0}^r = \sqrt{2m} [-s]_{s_0}^s$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2m}} (r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}) = s_0 - s$$

初期条件は、粒子が最初に r_0, s_0 にいるとしています。2行目でマイナスにしているのは粒子が落ちる方向のためです。これは左辺を変形させるとわかりやすく

$$\frac{4m}{3} \left(\left(\frac{r}{2m}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r_0}{2m}\right)^{\frac{3}{2}} \right) = s_0 - s$$

これは $r = 2m$ でおかしいことが起こることなく、 $r = 0$ まで有限の時間で行くことができます。

次に座標時間 t の関数とした場合を見ます。この場合では

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = -c \sqrt{\frac{2m}{r}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

ここでも粒子の方向のためマイナスになります。 dr と dt を分離して書き換えて

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{r^{\frac{1}{2}} r dr}{r - 2m} = -c dt$$

左辺の積分はまじめに実行すると

$$\begin{aligned}
\int dr \frac{1}{\sqrt{2m}} r^{\frac{1}{2}} \frac{r}{r-2m} &= \frac{2}{\sqrt{2m}} \int dA \frac{A^4}{A^2-2m} \quad (A = \sqrt{r}, \quad dA = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} dr) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2m}} \int dA \left(\frac{A^4-4m^2}{A^2-2m} + \frac{4m^2}{A^2-2m} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2m}} \left(\int dA (A^2+2m) + \frac{4m^2}{2\sqrt{2m}} \int dA \left(\frac{1}{A-\sqrt{2m}} - \frac{1}{A+\sqrt{2m}} \right) \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2m}} \left(\frac{1}{3} A^3 + 2mA + \frac{4m^2}{2\sqrt{2m}} (\log[A-\sqrt{2m}] - \log[A+\sqrt{2m}]) \right) + C
\end{aligned}$$

積分範囲を r_0 から r とすれば

$$\frac{2}{3\sqrt{2m}} (r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}} + 6m\sqrt{r} - 6m\sqrt{r_0}) - 2m \log \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{2m})(\sqrt{r_0} - \sqrt{2m})}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{2m})(\sqrt{r} - \sqrt{2m})}$$

よって、時間は t_0 から t とすれば

$$\frac{2}{3\sqrt{2m}} (r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}} + 6m\sqrt{r} - 6m\sqrt{r_0}) - 2m \log \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{2m})(\sqrt{r_0} - \sqrt{2m})}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{2m})(\sqrt{r} - \sqrt{2m})} = c(t_0 - t)$$

$r = 2m$ で \log 部分が発散します。なので、 \log 部分が $r = 2m$ 付近での主な寄与になるので、 $r \sim 2m$ での振舞いは、 r_0 部分は無視して

$$\log \frac{\sqrt{r} + \sqrt{2m}}{\sqrt{r} - \sqrt{2m}} = \log \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{2m})^2}{r - 2m} = \log \frac{8m}{r - 2m}$$

から

$$\begin{aligned}
-2m \log \frac{8m}{r - 2m} &= c(t_0 - t) \\
\frac{r - 2m}{8m} &= \exp\left[\frac{1}{2m} c(t_0 - t)\right] \\
r - 2m &= 8m \exp\left[-\frac{1}{2m} c(t - t_0)\right]
\end{aligned}$$

となります。これは右辺が 0 になるためには無限の時間を必要とすることを意味します。つまり、座標時間ではどんなにがんばっても有限の時間で $r = 2m$ に到達することさえできません。

この 2 つの結果は、シュバルツシルト半径に向かって自分が落ちていくならシュバルツシルト半径を超えて $r = 0$ まで到達でき、シュバルツシルト半径の外側での座標から眺めている人からはシュバルツシルト半径に全く落ちていかないように見えるということを言っています。これが、ブラックホールに落ちていく物体はブラックホールの外側にいる人から見るとなかなか落ちていかないという現象です。

しかし、座標時間で突破できないことは座標系の選び方が悪いとも言えます。実際に、こんなことが起こらない座標系は存在し、これから求めるクルスカール座標 (Kruskal coordinate) です。クルスカール座標ではシュバルツシルト半径の中と外で時間的と空間的がひっくり返らないというのも満たします。

というわけで、今使っているシュバルツシルト計量による座標からクルスカール座標に座標変換します。クルスカール座標によってシュバルツシルト半径の外側から内側までの運動を一つの座標でみることができます。

この座標系を導くために、まずは光の軌道について見ておきます。動径方向のみを考えて、シュバルツシルト線素は

$$(1 - \frac{2m}{r})c^2 dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1} dr^2 = 0$$

とします。光なので、 $ds^2 = 0$ です。これを变形させて

$$(\frac{dr}{dt})^2 = c^2(1 - \frac{2m}{r})^2$$

とすれば、これが光の速度になります。 $r = 2m$ で光の速度は0になってしまい、もう動かなくなってしまうのでこの時点でもう駄目です。逆に言えば、 r と t を上手く変換することで、この性質を除けばいいと言えます。

t, r を変換して v, u とすることで、 tr 平面では $r = 2m$ での特異性のために描けない外部から内部へ行く粒子の動きを、 vu 平面上で描けるようにします。そのために、変換後の線素の形を

$$ds^2 = f^2(dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2)$$

と仮定し、 $f^2(u, v)$ は0にはならないとします。 x^0 と x^1 の部分が同じ f^2 になるとしているのは、こうすれば、 u を動径方向と見ることで光の速度を $f^2 \neq 0$ で

$$f^2 dv^2 - f^2 du^2 = 0 \Rightarrow (\frac{du}{dv})^2 = 1$$

とできるからです。違う形で計量を定義する場合がありますが、こちらのほうが状況を解釈しやすいです(下の補足参照)。

このときの計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ は

$$\bar{g}_{00} = f^2, \bar{g}_{11} = -f^2$$

となって、他の成分は元の座標系と同じです。

今の計量の形の仮定から、 $f^2(u, v)$ が $v(t, r), u(t, r)$ の値に対して特異点を含まないような座標変換が作れるか見ていきます。まずは、計量の変換則からシュバルツシルト計量との関係を出します。計量の変換則は

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\mu\nu}$$

今は $x^2 = \bar{x}^2, x^3 = \bar{x}^3$ なので

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\beta} \bar{g}_{00} + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\beta} \bar{g}_{11} + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^\beta} \bar{g}_{22} + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^\beta} \bar{g}_{33} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\beta} \bar{g}_{00} + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\beta} \bar{g}_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^2}{\partial x^\beta} \bar{g}_{22} + \frac{\partial x^3}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^3}{\partial x^\beta} \bar{g}_{33} \end{aligned}$$

そして、 $\partial x^\nu / \partial x^\mu = \delta_\mu^\nu$, $g_{22} = \bar{g}_{22}$, $g_{33} = \bar{g}_{33}$ なので、第一項と第二項は $\alpha, \beta = 2, 3$ のとき消えます。よって、 $\alpha, \beta, \mu, \nu = 0, 1$ の項だけを見ればいいです。 $g_{01} = g_{10} = 0$ の場合は

$$\begin{aligned}
0 = g_{01} &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^1} \bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^1} \bar{g}_{00} + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} \bar{g}_{11} + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} \bar{g}_{22} + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} \bar{g}_{33} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^1} \bar{g}_{00} + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} \bar{g}_{11} \\
&= f^2 \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial r} - f^2 \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r}
\end{aligned}$$

なので、 u, v は

$$\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

g_{00} とすれば

$$\begin{aligned}
g_{00} &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^0} \bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} \bar{g}_{00} + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^0} \bar{g}_{11} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \bar{g}_{00} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \bar{g}_{11} \\
&= f^2 \left(\left(\frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right) \quad (ct = x_0)
\end{aligned}$$

同様に g_{11} では

$$g_{11} = f^2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \right)$$

というわけで、計量の形 (2) になるためには、 v, u, f は

$$\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \tag{3a}$$

$$1 - \frac{2m}{r} = f^2 \left(\left(\frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right) \tag{3b}$$

$$- \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = f^2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \right) \tag{3c}$$

という3つの方程式に従っている必要があります。

見た目を簡単にするために r を変換します。そのために

$$\xi = r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|, \quad F(\xi) = \frac{1}{f^2(r)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

というのを定義します。 $F(\xi)$ は r を通して ξ に依存しているとし、 $f^2(v, u)$ は v, u から t, r に戻したとき r のみに依存すると仮定しています。この条件と f^2 は 0 にならないという条件によって、座標変換の形が制限されて1つに決まります。 ξ の式のほうをシュバルツシルト空間での亀座標 (tortoise coordinate) と呼びます。これは $r = 2m$ になるためには ξ が無限になる必要があるために、 $r = 2m$ に ξ が有限の範囲では到達できないことを表しています。今はこのことはどうでもよくて、ただの r の変換です。

$F(\xi)$ を求めることで $f^2(r)$ がどうなっているのかが分かります。また後で明確に分かりますが、 r は u, v による関数でもあるので $f(u, v)$ にもなっています。

そうすると (3a),(3b),(3c) は ξ と $F(\xi)$ によって

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (4a)$$

$$F(\xi) = \left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 \quad (4b)$$

$$-F(\xi) = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 \quad (4c)$$

三番目は

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{r}{r-2m} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

から

$$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = f^2 \left(\frac{r}{r-2m}\right)^2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2\right)$$

$$-\frac{r-2m}{r} f^{-2} = \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2\right)$$

$$-F(\xi) = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2$$

となってます。(4b),(4c) を足すと

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2$$

(4a) から、これの左辺に $2\partial v/\partial x^0 \partial v/\partial \xi$ 、右辺 $2\partial u/\partial x^0 \partial u/\partial \xi$ を足すことができるので

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2$$

もしくは引くと

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2$$

この二つを見比べてみると

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x^0}$$

のようになっているのがわかります。これはそのまま

$$\frac{\partial^2 u}{\partial(x^0)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial(x^0)^2}$$

この式は波動方程式の形になっています。

v, u が波動方程式の解になっているので、 $\xi \pm x^0$ を変数に持つ関数 h, g によって

$$v = h(\xi + x^0) + g(\xi - x^0), \quad u = h(\xi + x^0) - g(\xi - x^0) \quad (5)$$

とできます。このことを (4c) に入れると $F(\xi)$ は

$$\begin{aligned} -F(\xi) &= \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 \\ -F(\xi) &= h'^2(\xi + x^0) + g'^2(\xi - x^0) + 2h'(\xi + x^0)g'(\xi - x^0) \\ &\quad - h'^2(\xi + x^0) - g'^2(\xi - x^0) + 2h'(\xi + x^0)g'(\xi - x^0) \\ &= 4h'(\xi + x^0)g'(\xi - x^0) \end{aligned} \quad (6)$$

という式になります。「'」は変数の微分とします (例えば h なら $(\xi + x^0)$ の微分)。同様の結果は (4b) で行っても出てきます。これをさらに ξ で微分してやっ

$$F'(\xi) = -4h''(\xi + x^0)g'(\xi - x^0) - 4h'(\xi + x^0)g''(\xi - x^0) \quad (7)$$

また、 x^0 で微分すると

$$0 = -4h''(\xi + x^0)g'(\xi - x^0) + 4h'(\xi + x^0)g''(\xi - x^0) \quad (8)$$

これで一通り必要なものは求まりました。 r が $2m$ より大きいかわ小さいかで場合わけします。これは $F(\xi)$ の符号によって区別されます。実際に、 $F(\xi)$ の定義から、 $F(\xi)$ は $r \geq 2m$ で $F \geq 0$ の正の値を持ちます。

$F(\xi)$ が正とします。(6),(7) を使って、 F で F' を割って

$$\begin{aligned} \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} &= \frac{4h''(\xi + x^0)g'(\xi - x^0) + 4h'(\xi + x^0)g''(\xi - x^0)}{4h'(\xi + x^0)g'(\xi - x^0)} \\ &= \frac{h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)} + \frac{g''(\xi - x^0)}{g'(\xi - x^0)} \end{aligned}$$

x^0 で微分した (8) では

$$0 = \frac{h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)} - \frac{g''(\xi - x^0)}{g'(\xi - x^0)}$$

よって

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)} = \frac{2h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)}$$

$$\frac{\partial \log F(\xi)}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial \log[h'(y)]}{\partial y} \quad (y = \xi + x^0)$$

$$(\log F(\xi))' = 2(\log[h'(y)])'$$

両辺の変数はそれぞれが独立だと見ることが出来るので (変数分離)、両辺は定数となります。このことから、 h と F は任意定数 η を持つとします。そうすると、 $\log[h'(y)]$ が

$$\log[h'(y)] = A(\eta) + \eta y$$

のような形になっていれば ($A(\eta)$ は η の任意関数)、 y で微分すれば η となるので、最終的には h は \exp の形をしているはずで

そうすると

$$h' = A(\eta)e^{\eta y}$$

となっていれば

$$\log[h'(y)] = \log[A(\eta)e^{\eta y}] = \log A(\eta) + \eta y$$

というわけで、 h は

$$h(y) = \frac{1}{2}e^{\eta y}$$

であれば十分です ($1/2$ をつけているのは後々で便利というだけです)。もう一つの任意定数は 0 にしています。これに対して g は、 F が正の値を持つことと、今までやってきたことを考えれば

$$g(z) = -\frac{1}{2}e^{\eta z}$$

のように同じ形で符号がマイナスになったものと考えられます。

F は $-4h'g'$ で求まるので

$$F(\xi) = \eta^2 e^{2\eta \xi}$$

これで u, v に必要なものがそろったので、(5) に h, g を入れて、 ξ から r に戻せば

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}e^{\eta(\xi+x^0)} - \frac{1}{2}e^{\eta(\xi-x^0)} \\
&= e^{\eta\xi} \frac{e^{\eta x^0} - e^{-\eta x^0}}{2} \\
&= \exp[\eta(r + 2m \log |\frac{r}{2m} - 1|)] \cosh \eta x^0 \\
&= (\frac{r}{2m} - 1)^{2m\eta} e^{\eta r} \cosh \eta x^0 \\
v &= (\frac{r}{2m} - 1)^{2m\eta} e^{\eta r} \sinh \eta x^0
\end{aligned}$$

$F(\xi)$ から $f^2(r)$ は

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \frac{1}{f^2(r)} (1 - \frac{2m}{r}) \\
f^2(r) &= (1 - \frac{2m}{r}) \eta^{-2} e^{-2\eta\xi} \\
&= (1 - \frac{2m}{r}) \eta^{-2} \exp[-2\eta(r + 2m \log |\frac{r}{2m} - 1|)] \\
&= \frac{2m}{r} (\frac{r}{2m} - 1) \eta^{-2} (\frac{r}{2m} - 1)^{-4m\eta} e^{-2\eta r} \\
&= \frac{2m}{r\eta^2} (\frac{r}{2m} - 1)^{1-4m\eta} e^{-2\eta r}
\end{aligned}$$

まだ η の任意性が残っていますが、これは簡単に決定できて、 f^2 はあらゆる r で 0 にならないということと、 f^2 が $r = 2m$ で特異点を持たないという条件から

$$\eta = \frac{1}{4m}$$

となります。

よって

$$\begin{aligned}
u &= (\frac{r}{2m} - 1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} \cosh \frac{x^0}{4m} \\
v &= (\frac{r}{2m} - 1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} \sinh \frac{x^0}{4m} \\
f^2 &= \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}}
\end{aligned}$$

この結果を見ると、 $r = 2m$ でも u, v, f^2 には特異点が出てきていません。なので、これが欲しかった座標変換で、この座標変換によって計量は

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

となります ($r \geq 2m$, $r = 2m$ で $u = v = 0$)。 u と v の式より、 x^0 が一定の場合はどうなっているのか調べますが、細かいものには触れずに、必要な部分だけ調べます。

\sinh と \cosh の極限の性質から x^0 を無限大に持っていけば

$$\lim_{x^0 \rightarrow \infty} \sinh x^0 = \lim_{x^0 \rightarrow \infty} \cosh x^0 = \infty$$

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \sinh x^0 = -\infty$$

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \cosh x^0 = \infty$$

なので、 $x^0 \rightarrow \infty$ に対して $u = v$ 、 $x^0 \rightarrow -\infty$ に対して $u = -v$ となります。 t 一定の場合では直線を描くこととなります。

また、 u, v の式を合わせて

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} \left(\cosh^2 \frac{x^0}{4m} - \sinh^2 \frac{x^0}{4m}\right) = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}}$$

この式から r が一定の場合が決められて、 $r = 2m$ で $u = \pm v$ となります。 r 一定では双曲線を描くことになり、漸近的に $r = 2m$ の直線に近づいていきます。

$r < 2m$ の場合はどうなるのか見てみます。 今度は F がマイナスの符号をもつようになるというだけの話なので簡単に求まります。 このときでは、 h, g は両方ともプラスの符号になるので

$$u = e^{\eta\xi} \frac{e^{\eta x^0} + e^{-\eta x^0}}{2} = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} \sinh \frac{x^0}{4m}$$

$$v = e^{\eta\xi} \frac{e^{\eta x^0} - e^{-\eta x^0}}{2} = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} \cosh \frac{x^0}{4m}$$

$$f^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}}$$

ξ の \log 部分の符号も変わることに注意してください。 なので、計量の形は

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

のままになります。

u, v の $x^0 \rightarrow \infty, -\infty$ の極限の関係は、 $r \geq 2m$ の時と u, v の符号が逆になったものになり

$$v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{2m}\right) e^{\frac{r}{2m}}$$

なので、 $r \geq 2m$ と同じように $v = \pm u$ となります。 また、 $r = 0$ では

$$v^2 - u^2 = 1$$

となります。

こういったことによる図は書くのが面倒なので適当な本を見てください。クルスカール座標に触れているものなら必ず描いてあるはずですが(座標の取り方が違う場合があるので注意。補足参照)。言葉で一応言っておくと、ミンコフスキー空間での光円錐と同じものを u, v 平面 (u が動径、 v が時間) に書くことができ、上側が $r < 2m$ に対応し、右側が $r \geq 2m$ に対応します。そして、光円錐を描く傾き $\pm 45^\circ$ の線 $r = 2m, t = \infty$ と、 $r = 2m, t = -\infty$ のもので、光の軌道と同じものになります。

これでクルスカール座標が求まったので性質に少し触れておきます。まず、この座標系は $r = 0$ で明らかに特異点を持ち、この特異点はシュバルツシルト半径とは違い完全な曲率(リーマンテンソル)の特異点になっています。 $r = 0$ の特異点は $r < 2m$ の領域にいます。これがシュバルツシルト半径内に進入した物質は光だろうと脱出できないということを示しています。 $r \geq 2m$ の領域から進入してきた物体は必ず特異点 $r = 0$ による双曲線にぶつかってしまうからです。そして、光円錐での上側の領域から右側の領域への移動は行えません。この領域を区切っている線が $r = 2m$ になっていることから、シュバルツシルト半径での面(シュバルツシルト面)は地平面、もしくは事象の地平面と呼ばれます。 uv 平面では $r = 2m$ の特異性を考えずに領域を突破できますが、 t, r で見れば $r = 2m$ のときに時間 t は ∞ になっているので依然として特異点のままです。

もし時間反転した運動を考えたいと思ったら、下側の領域から右側の領域への移動を考えればよいということになります。そうすれば、シュバルツシルト半径内に落ちていくのとは逆のシュバルツシルト半径の外側に出ていくという運動を描けます。このため、時間反転によって物理(アインシュタイン方程式や運動方程式等)は不変という要請も含まれています。

・補足

ここで見てきた u, v は通常の動径座標と時間座標扱いできるものとして作っていますが、クルスカール座標と言ったときには他の形として、ヌル座標を使って表現する場合があります。ヌル座標はその座標を一定にしたとき、対応する超曲面がヌルになるものことです。ミンコフスキー空間の場合では

$$x_+ = x^0 + x^1, \quad x_- = x^0 - x^1$$

となっていて、 x_+ を先進ヌル座標、 x_- を遅延ヌル座標と呼びます(x_{\pm} は時間座標として扱われる)。先進、遅延とついている理由は割愛します。ちなみに、これがヌル座標と呼ばれる理由としては、 x_{\pm} が光円錐上にいるためと言った方が分かりやすいです(なので光円錐座標(light cone coordinate)と言われたりもします)。このことはすぐに確かめられます。必要なのは x^0 と x^1 だけなので、 $x^0 = ct$, $x^1 = x$ のみの2次元だとします。光円錐は原点から左回りで45度の位置にいますので、 (ct, x) 座標を45度回転させると、単純な2次元の回転の式から(x は x 軸、 t は y 軸に対応)

$$x' = ct \sin \frac{\pi}{4} + x \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + x)$$

$$(ct)' = ct \cos \frac{\pi}{4} - x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct - x)$$

となります。 $(ct)', x'$ は変換後です。よって、光円錐上での座標の取り方は x_{\pm} に一致していることがわかります(係数は座標の取り方と無関係)。もっと単純に言えば、光円錐の線は $ct = \pm x$ なので、 $ct \pm x = 0$ が光円錐だからです。

また、例えば先進ヌル座標では $dx_+ = dx^0 + dx^1$ なので

$$ds^2 = (dx_+ - dx^1)^2 - (dx^1)^2 = (dx_+)^2 - 2dx_+dx^1$$

これより、 x_+ が一定のとき $ds^2 = 0$ となるので、ヌル超曲面になっています(4次元では角度をどこかに固定したとき、動径がヌル測地線を描くことからヌル超曲面になるのが分かる)。

上で使ってきた u, v を R, T と書くことにして、 u', v' をヌル座標とします。シュバルツシルト計量でも同じようにヌル座標は作れるので、 u', v' をヌル座標として

$$u' = T + R, \quad v' = T - R$$

と定義します。そうすると上での計量の元の形は

$$ds^2 = f^2(dT^2 - dR^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

となり、これをヌル座標に変えます。 R, T は

$$R = \frac{1}{2}(u' - v'), \quad T = \frac{1}{2}(u' + v')$$

から

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^2\left(\frac{1}{4}(du' + dv')^2 - \frac{1}{4}(du' - dv')^2\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= f^2\left(\frac{1}{4}(du'^2 + dv'^2 + 2dv'du') - \frac{1}{4}(du'^2 + dv'^2 - 2dv'du')\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= f^2 dv'du' - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

となるので、ヌル座標での表現は

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} dv'du' - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

この場合、ヌル座標を使っているために状況がすぐには把握しづらくなっています。