シュバルツシルト解〜外部〜

真空 (物質なし空間) でのアインシュタイン方程式を、静的で球対称の条件のもとで解きます。
条件によって、計量の 16 成分（独立成分は 10 個）のうちの対角成分のみになります。
静的は、時間独立で時間反転に対して不変な場合です。

最初に、一様と等方について簡単に言っておきます。3 次元空間座標 $\boldsymbol{x}$ の平行移動後の座標 $\boldsymbol{x}'$ は

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$$

と書けて ($\boldsymbol{a}$ は定数)、これを運動方程式 (ラグランジアン) に入れても運動方程式の形が変わらないとき、空間は一様と言います。同様に時間 t に対しても (a は定数)

$$t' = t + a$$

このような変換に対して運動方程式が変わらないとき、時間は一様といいます。座標が時間に依存しない回転変換の直交行列 T による

$$\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$$

という変換に対して運動方程式が変わらないとき、空間は等方と言います。簡単にまとめれば、時間と空間が平行移動に対して変化しないとき一様、空間が回転変換に対して変化しない (どの方向を向いても同じ) とき等方と言います。

空間の性質に漸近的平坦な空間というのを加えます。これは、原点から無限遠に離れていくとミンコフスキー空間になるという性質です。つまり、ミンコフスキー空間での線素

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$x^0 = ct\ ,\ x^1 = r\ ,\ x^2 = \theta\ ,\ x^3 = \varphi$$

が無限遠で現れるとすることです (極座標にしています)。これによって、重力場の中心から離れるにつれて重力は弱くなるという性質を表現します。注意として、ct, r, θ, φ と書いたときのの計量は $g_{\mu\nu}$ に対応します。これは $x^0 = ct,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$ から分かると思います。

静的で球対称な線素を作ります。静的は時間独立で時間反転に対して不変なので、時間反転 $dx^0 \Rightarrow -dx^0$ のもとで不変という条件が出てきます。このため、線素において dt と他の成分が混ざるような部分は 0 になる必要があるので、g_{i0} は 0 になります ($i = 1, 2, 3$)。そして、球対称であるためには、$d\theta, d\varphi$ は立体角部分を表すように出てきて、なおかつ角度の反転 $d\theta \Rightarrow -d\theta$、$d\varphi \Rightarrow -d\varphi$ に対して線素は不変でなければいけないです。よって、$d\theta d\varphi, drd\theta$ のような項が出てきてはいけないです。

これらから計量テンソルは対角成分しかないことになるので、線素は

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - (Bdr^2 + Cr^2d\theta^2 + Dr^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

という形になります。時間独立で球対称なので、A, B, C, D は r の関数です (球対称のために角度依存しない)。C, D は等方性によって同じです（角度方向の微小距離なので区別しない。$\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ で対応がとれる)。動径 r を変換して式をもっと簡単にします。

動径 r を

$$r' = \sqrt{C}r \ , \ r'^2 = Cr^2$$

として、$\sqrt{C}$ 倍に変換します。そうすると

$$dr^2 = (\frac{1}{2}rC^{-\frac{1}{2}}\frac{dC}{dr} + C^{\frac{1}{2}})^{-2}dr'^2$$

より、r' で Bdr^2 を表現すると

$$\begin{aligned}
Bdr^2 &= B(\frac{1}{2}rC^{-\frac{1}{2}}\frac{dC}{dr} + C^{\frac{1}{2}})^{-2}dr'^2 \\
&= B(C + \frac{1}{4}r^2C^{-1}(\frac{dC}{dr})^2 + r\frac{dC}{dr})^{-1}dr'^2 \\
&= \frac{B}{C}(1 + \frac{r}{2C}\frac{dC}{dr})^{-2}dr'^2 \\
&= B'dr'^2
\end{aligned}$$

なので、線素を r' で表してやれば

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - B'dr'^2 - (r'^2d\theta^2 + r'^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

このように、動径 r の基準の取り方によって $C = 1$ の形できるので

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - Bdr^2 - (r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

となります。

残っている未知関数 A, B を $A = e^{\nu(r)}, B = e^{\lambda(r)}$ とします。計量テンソルの符号の関係上 A, B は正なのでこのように置いて問題ないです。よって

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - (r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1}$$

これが静的で球対称という条件での線素の形です。例えば、適当な動径 r を選んだときの 3 次元での球の表面での線素は

$$ds^2 = -(r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

なので、球の赤道（$\theta = \pi/2$）部分の長さは

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{-ds^2} = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = 2\pi r$$

これは通常の球の赤道の長さです。

また、シュバルツシルト解を求めるには球対称という条件だけでも十分です。球対称だけで静的を要求しないときの一般的な形は

$$ds^2 = Ac^2dt^2 + Bdr^2 + 2Cdrdt + f(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

A, B, C, f は t と r の関数です。細かい理由は省いて簡単に言っておきます。球対称であるために必要となる条件は、2 次元球の線素 $dl^2 = f(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ が含まれていることです。後は 2 次元球と直交に交わる線の条件によって $drd\theta, dtd\varphi$ のような項が落とされて上のような形になります。さらに、座標変換によって、B は消せ、f は r^2 にできるので、A, B が r だけでなく t にも依存するという点以外は同じ形にできます。なので、t の依存性を含ませたままでも同じ手順で計算していくことは可能です。しかも、t の依存性は座標変換によって吸収することができ、静的として始めた結果と同じものになります。このように、真空における球対称な空間は静的になることをバーコフ (Birkhoff) の定理と呼んでいます。

重力による空間はアインシュタイン方程式に従うので、今の計量を使ってアインシュタイン方程式に現れる 0 でないクリストッフェル記号を地道に計算していきます。そのために測地線方程式

$$\ddot{x}^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \eta \end{matrix} \right\} \dot{x}^\beta \dot{x}^\eta = 0 \tag{2}$$

を利用します。ドットは弧長 s による微分とします。測地線方程式はオイラー・ラグランジュ方程式から求められるものなので、(1) を使った変分問題と測地線方程式の対応を使います。オイラー・ラグランジュ方程式は変分問題

$$\delta \int ds[e^{\nu(r)}(\dot{x}^0)^2 - e^{\lambda(r)}\dot{r}^2 - (r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)] = 0$$

によって求められて (「運動方程式と測地線方程式」参照)、[ ] 部分を F とすると

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}$$

となります。これが今の測地線方程式に対するオイラー・ラグランジュ方程式なので、これを計算したら (2) と同じ式になります。

まず $\alpha = 0(x^\alpha = x^0)$ の場合を見ます。オイラー・ラグランジュ方程式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^0} &= \frac{d}{ds}(2e^\nu \dot{x}^0) \\ &= 2e^\nu \ddot{x}^0 + 2\dot{x}^0 e^\nu \frac{d\nu}{dr}\frac{dr}{ds} \\ &= 2e^\nu \ddot{x}^0 + 2\dot{x}^0 e^\nu \nu' \dot{r} \end{aligned}$$

右辺は当然 0 なので

$$2e^{\nu}\ddot{x}^0 + 2\dot{x}^0 e^{\nu}\nu'\dot{r} = 0$$

「$'$」は r での微分とします。これから $2e^{\nu}$ を割れば

$$\ddot{x}^0 + \nu'\dot{x}^0\dot{r} = 0 \tag{3}$$

これと測地線方程式 (2) を比べます。$\alpha = 0$ での測地線方程式は

$$\ddot{x}^0 + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \beta\ \eta \end{array} \right\} \dot{x}^\beta \dot{x}^\eta = 0$$

第一項は明らかに同じ形で、第二項は

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \beta\ 0 \end{array} \right\} \dot{x}^\beta \dot{x}^0 + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \beta\ 1 \end{array} \right\} \dot{x}^\beta \dot{x}^1 + \cdots$$

となっています。そして、オイラー・ラグランジュ方程式からは $\dot{x}^0\dot{r}$ の項しか出てきていないので、測地線方程式における他の項は当然消えなければいけません。言い換えれば、$\dot{x}^0\dot{r}$ 以外の項でのクリストッフェル記号が 0 になっているということです。よって、0 になっていないクリストッフェル記号の部分は、$r = x^1$ から

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \beta\ \eta \end{array} \right\} \dot{x}^\beta \dot{x}^\eta \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \beta\ 1 \end{array} \right\} \dot{x}^\beta \dot{r} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ \eta \end{array} \right\} \dot{r} \dot{x}^\eta$$

さらに $\dot{x}^0$ となるように $\beta = 0$ もしくは $\eta = 0$ を選ぶので、0 でないクリストッフェル記号として

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ 0 \end{array} \right\}$$

そして、測地線方程式と (3) から、この二つを足したものが ν' と等しくなっていればいいことが分かるので

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} = \frac{\nu'}{2}$$

となります。

　今度は $\alpha = 1$ ($x^\alpha = x^1 = r$) の場合です

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^1} = \frac{\partial F}{\partial x^1}$$

$$-2e^{\lambda}\ddot{r} - 2e^{\lambda}\lambda'\dot{r}^2 = e^{\nu}\nu'(\dot{x}^0)^2 - e^{\lambda}\lambda'\dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$

$$-2e^{\lambda}\ddot{r} - e^{\lambda}\lambda'\dot{r}^2 = e^{\nu}\nu'(\dot{x}^0)^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{r} + \frac{\lambda'}{2}\dot{r}^2 + \frac{\nu' e^{\nu-\lambda}}{2}(\dot{x}^0)^2 - re^{-\lambda}\dot{\theta}^2 - re^{-\lambda}\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = 0$$

同じように測地線方程式との対応を見ると、クリストッフェル記号は

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\nu' e^{\nu-\lambda}}{2}\ ,\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\lambda'}{2}\ ,\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} = -re^{-\lambda}\ ,\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta$$

となっています。

$\alpha = 2\ (x^\alpha = x^2 = \theta)$ の場合では、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{\theta}\dot{r} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0$$

第三項部分はそのまま

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} = -\sin\theta\cos\theta$$

第二項部分では

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix} \right\}\ ,\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix} \right\}$$

を足したものになるので

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}$$

となります。

最後の $\alpha = 3\ (x^\alpha = x^3 = \varphi)$ の場合では、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\ddot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

なので、クリストッフェル記号は

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\ 2 \end{matrix} \right\} = \cot\theta\ ,\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}$$

となります。これがクリストッフェル記号が 0 にならない全てのものです。

結果をまとめると

$$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\,0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0\,1 \end{matrix}\right\} = \frac{\nu'}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 0\,0 \end{matrix}\right\} = \frac{\nu' e^{\nu-\lambda}}{2}\ ,\ \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\,1 \end{matrix}\right\} = \frac{\lambda'}{2}\ ,\ \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\,2 \end{matrix}\right\} = -re^{-\lambda}\ ,\ \left\{\begin{matrix} 1 \\ 3\,3 \end{matrix}\right\} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta$$

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\,2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\,1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{r}\ ,\ \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3\,3 \end{matrix}\right\} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\left\{\begin{matrix} 3 \\ 1\,3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3 \\ 3\,1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{r}\ ,\ \left\{\begin{matrix} 3 \\ 2\,3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3 \\ 3\,2 \end{matrix}\right\} = \cot\theta$$

これでクリストッフェル記号は求まりましたが、アインシュタイン方程式には縮約された

$$\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \alpha\,\beta \end{matrix}\right\}$$

というのが含まれています。これには「共変微分」の発散の式を求めるときに出てきた

$$\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \alpha\,\beta \end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\log\sqrt{-g} = (\log\sqrt{-g})_{|\beta}$$

を使います (g は $g_{\mu\nu}$ の行列式)。

真空でのアインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu}=0$ は

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \left\{\begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\nu \end{matrix}\right\}_{|\alpha} - \left\{\begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\alpha \end{matrix}\right\}_{|\nu} - \left\{\begin{matrix} \alpha \\ \beta\,\mu \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \beta \\ \alpha\,\nu \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \beta \\ \mu\,\nu \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \beta\,\alpha \end{matrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\nu \end{matrix}\right\}_{|\alpha} - (\log\sqrt{-g})_{|\mu|\nu} - \left\{\begin{matrix} \alpha \\ \beta\,\mu \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \beta \\ \alpha\,\nu \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \beta \\ \mu\,\nu \end{matrix}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|\beta} \end{aligned}$$

計量 $g_{\mu\nu}$ は今使っている線素 (1) から

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

なので、行列式 g は

$$g = -e^{\nu+\lambda}r^4\sin^2\theta$$

これから

$$\log\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\log(e^{\nu+\lambda}r^4\sin^2\theta) = \frac{1}{2}\log e^{\nu+\lambda} + 2\log r + \log|\sin\theta|$$

これでアインシュタイン方程式に必要なものは揃ったことになります。記号が重なってますが、$e^{\nu(r)}$ の $\nu(r)$ と $R_{\mu\nu}$ の ν は無関係なので混同しないでください。

$R_{\mu\nu}$ を計算していき、e^{ν} と e^{λ} を決定します。ここで求められる $R_{\mu\nu}$ は、球対称という条件の空間に対してはそのまま適用できます (ただし、当たり前ですが $R_{\mu\nu}=0$ とした場合は真空でのみ使用できます)。

R_{00} $(\mu=\nu=0)$ は

$$R_{00} = -(\log\sqrt{-g})_{|0|0} + \left\{\begin{array}{c}\alpha\\ 0\,0\end{array}\right\}_{|\alpha} - \left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\,0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\beta\\ \alpha\,0\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\alpha\\ 0\,0\end{array}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|\alpha} = 0$$

計量は時間独立なので第一項は消えます。クリストッフェル記号が 0 にならないものを入れていくと

$$\begin{aligned}
R_{00} = &\left\{\begin{array}{c}1\\ 0\,0\end{array}\right\}_{|1} - \left\{\begin{array}{c}1\\ 0\,0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}0\\ 1\,0\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}0\\ 1\,0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}1\\ 0\,0\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}1\\ 0\,0\end{array}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|1}\\
&= (\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda})' - \frac{\nu'^2}{2}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}(\frac{1}{2}(\nu'+\lambda') + \frac{2}{r})\\
&= \frac{\nu''}{2}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'}{2}(\nu'-\lambda')e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu'^2}{2}e^{\nu-\lambda} + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}(\frac{1}{2}(\nu'^2+\nu'\lambda') + \frac{2}{r}\nu')\\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' - \nu'^2 + \frac{1}{2}(\nu'^2+\nu'\lambda') + \frac{2}{r}\nu')\\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' - \nu'\lambda' + \frac{1}{2}\nu'^2 + \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{2}{r}\nu')\\
&= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r})
\end{aligned}$$

$R_{00}=0$ なので

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} = 0$$

同様に R_{11} $(\mu=\nu=1)$ では

$$
\begin{aligned}
R_{11} =& -(\log\sqrt{-g})_{|1|1} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 1\ 1 \end{array} \right\}_{|\alpha} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \alpha\ 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 1\ 1 \end{array} \right\} (\log\sqrt{-g})_{|\alpha} \\
=& -(\log\sqrt{-g})_{|1|1} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \end{array} \right\}_{|1} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \end{array} \right\} \\
& - \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2\ 1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3\ 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \end{array} \right\} (\log\sqrt{-g})_{|1} \\
=& \frac{1}{2}(\nu+\lambda)'' - 2\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{2}(\frac{1}{2}(\nu+\lambda)' + \frac{2}{r}) \\
=& \frac{1}{2}\nu'' + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'}{4}(\nu'+\lambda') - \frac{\lambda'}{r} \\
=& \frac{1}{2}\nu'' + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r}
\end{aligned}
$$

となって、$R_{11} = 0$ より

$$
\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} = 0
$$

R_{00} と R_{11} の結果

$$
\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} = 0 \tag{4}
$$

$$
\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \tag{5}
$$

から、ν' と λ' の関係は

$$
\nu' = -\lambda'
$$

と分かります。積分すれば

$$
\nu + \lambda = const
$$

定数を a とします。

この定数 a を使って、時間座標 x^0 での $e^{\nu}c^2dt^2$ を $t \Rightarrow e^{\frac{a}{2}}t$ と変換します。細かく書けば計量に対する

$$
\overline{g}_{00} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^0}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \overline{x}^0}g_{\alpha\beta} = (\frac{\partial x^0}{\partial \overline{x}^0})^2 g_{00}
$$

という座標変換です。空間成分 $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ の変換はしません。なので、$\partial x^0/\partial \overline{x}^0$ を $e^{\frac{a}{2}}$ と選んだことになります。そうすると、計量の時間成分の係数が $e^{\nu+a}$ と変わります。つまり、$\nu \Rightarrow \nu + a$ となることから

$$\nu + \lambda = a \ \Rightarrow \ \nu + \lambda = 0$$

となります。なので

$$\nu = -\lambda$$

とすることで、

$$ds^2 = e^{-\lambda}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - (r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

そして、$e^{\lambda} = 1$ となら、$e^{-\lambda} = 1$ になるために ($\lambda = 0$)、このときの線素はミンコフスキー空間でのものになります。つまり、r 無限大で $e^{\lambda} = 1$ になるなら、時間成分も $e^{-\lambda} = 1$ になることが要求されるので、この座標変換で漸近的に平坦になるという制限がかかったことになります。

　この関係を (5) に入れると

$$\begin{aligned}0 =& -\lambda'' + \frac{\lambda'^2}{2} + \frac{\lambda'^2}{2} - \frac{2\lambda'}{r}\\ =& \lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r}\end{aligned}$$

これは

$$(re^{-\lambda})'' = 0$$

と書けるので、積分することで

$$(re^{-\lambda})' = const$$

となります。

　アインシュタイン方程式の計算に戻って、今度は R_{22} ($\mu = \nu = 2$) を計算して

$$
\begin{aligned}
R_{22} = & -(\log\sqrt{-g})_{|2|2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}_{|1} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 3 \\ 3\,2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 3 \\ 3\,2 \end{Bmatrix} \\
& + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}(\log\sqrt{-g})_{|1} \\
= & -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log|\sin\theta|) - (e^{-\lambda}r)' + 2e^{-\lambda} - \cot^2\theta - re^{-\lambda}(\frac{\lambda'+\nu'}{2} + \frac{2}{r}) \\
= & -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - (e^{-\lambda}r)' + 2e^{-\lambda} - e^{-\lambda}(r\frac{\lambda'+\nu'}{2} + 2) \\
= & \frac{\sin\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - (e^{-\lambda}r)' + 2e^{-\lambda} - e^{-\lambda}(r\frac{\lambda'+\nu'}{2} + 2) \\
= & 1 - (e^{-\lambda}r)' - e^{-\lambda}r\frac{\lambda'+\nu'}{2} \\
= & 1 - (e^{-\lambda}r)' - r\frac{\lambda'-\lambda'}{2}e^{-\lambda} \\
= & 1 - (e^{-\lambda}r)' = 0
\end{aligned}
$$

$\nu' = -\lambda'$ を使っています。なので

$$(e^{-\lambda}r)' = 1$$

これから、$(e^{-\lambda}r)' = const$ となっていたものは 1 です。これを積分すれば

$$e^{-\lambda}r = r + C = r - 2m$$

C は積分定数で、それを $-2m$ としています。これによって e^{ν} と e^{λ} を求めることができて

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r}\ ,\ e^{\lambda} = \frac{1}{1-\frac{2m}{r}}$$

となります。

よって、線素は

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{r})(cdt)^2 - \frac{1}{1-\frac{2m}{r}}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

これが静的で球対称としたときの真空でのアインシュタイン方程式の解で、シュバルツシルト解 (Schwarzschild solution) と言います。これに対応する計量をシュバルツシルト計量と言います。

リッチテンソルは残り 7 個 (R_{01} や R_{33} とか) ありますが、これらから $e^{\nu}.e^{\lambda}$ の情報は出てきません。例えば R_{12} の場合では

$$
\begin{aligned}
R_{12} =& -(\log\sqrt{-g})_{|1|2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1\ 2 \end{Bmatrix}_{|\alpha} - \begin{Bmatrix} \beta \\ \tau\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \tau \\ \beta\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tau \\ 1\ 2 \end{Bmatrix}(\log\sqrt{-g})_{|\tau} \\
=& -(\log\sqrt{-g})_{|1|2} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix}_{|2} - \begin{Bmatrix} 3 \\ 3\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 3 \\ 3\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix}(\log\sqrt{-g})_{|2} \\
=& -\frac{1}{r}\cot\theta + \frac{1}{r}\cot\theta = 0
\end{aligned}
$$

となって、恒等的に 0 です。R_{33} も求めてみると

$$
\begin{aligned}
R_{33} =& -(\log\sqrt{-g})_{|3|3} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ 3\ 3 \end{Bmatrix}_{|\alpha} - \begin{Bmatrix} \beta \\ \tau\ 3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \tau \\ \beta\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tau \\ 3\ 3 \end{Bmatrix}(\log\sqrt{-g})_{|\tau} \\
=& \begin{Bmatrix} 1 \\ 3\ 3 \end{Bmatrix}_{|1} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 3\ 3 \end{Bmatrix}_{|2} - 2\begin{Bmatrix} 1 \\ 3\ 3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 3 \\ 1\ 3 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 2 \\ 3\ 3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 3 \\ 3\ 2 \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{Bmatrix} 1 \\ 3\ 3 \end{Bmatrix}(\log\sqrt{-g})_{|1} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 3\ 3 \end{Bmatrix}(\log\sqrt{-g})_{|2} \\
=& -(re^{-\lambda}\sin^2\theta)' - \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta) + 2e^{-\lambda}\sin^2\theta + 2\cot\theta\sin\theta\cos\theta - \frac{2}{r}re^{-\lambda}\sin^2\theta - \cos\theta \\
=& -(re^{-\lambda})'\sin^2\theta + \sin^2\theta \\
=& -((re^{-\lambda})' - 1)\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

この式は R_{12} とは違いそのまま 0 にはならないですが、R_{22} の式に $\sin^2\theta$ を掛けたものになっています。なので、R_{22} と同じ結果になり、$(re^{-\lambda})' = 1$ を入れることで 0 になります。

というわけで、結局 e^{λ}, e^{ν} は今求めたもの以外に出てこないので、ここでのアインシュタイン方程式の解はシュバルツシルト解のみになっています。

積分定数 $2m$ が何かを調べます。重力が弱いとして、ミンコフスキー計量の微小な項を加えたときの計量は「真空でのアインシュタイン方程式」で求めたように

$$
g_{00} \simeq 1 + \frac{2\phi}{c^2}
$$

となっていて、ϕ が重力ポテンシャルであるならニュートンの重力理論から

$$
\phi = -\frac{\kappa M}{r}
$$

κ は重力定数、M は粒子の質量です。これから

$$
g_{00} \simeq 1 - \frac{2\kappa M}{c^2 r}
$$

となり、これとシュバルツシルト解の時間成分

$$
1 - \frac{2m}{r}
$$

を比べると、積分定数 m は

$$m = \frac{\kappa M}{c^2}$$

と求まります。m の単位は、cgs 単位系では

$$\begin{aligned}
&\kappa = [\mathrm{dyn} \cdot \mathrm{cm}^2/\mathrm{g}^2] \quad (\mathrm{dyn} = \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}/\mathrm{s}^2) \\
&M = [\mathrm{g}] \\
&c^2 = [\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}^2]
\end{aligned}$$

から

$$[\mathrm{dyn} \cdot \mathrm{cm}^2/\mathrm{g}^2] \times [\mathrm{g}] \times [\mathrm{s}^2/\mathrm{cm}^2] = [\mathrm{cm}]$$

なので、m は距離の単位を持ちます。そして、幾何学単位系 $(c = 1, \kappa = 1)$ を使うと

$$m = M$$

となり、質量となるために、m は幾何学的な質量と言えます。

このように、ニュートンによる重力ポテンシャルと対応させることで、質量 M の物体を発生源とする静的で球対称な空間をシュバルツシルト解は表現していると考えられます。このため、星の周りにできる重力場の影響を考える時に用いられます。

シュバルツシルト解を見ればわかるように、$r = 2m$ のとき dx^0 の係数 (g_{00}) は 0 になり dr^2 の係数 (g_{11}) は無限に発散しています。この $r = 2m$ となるところをシュバルツシルト半径もしくは重力半径と呼んでいます。シュバルツシルト半径の距離で特異点と呼ぶようなこともあるようですが、ここは本当の特異点ではありません。この領域は座標のとり方のせいで発散するようになっており、座標を上手く取ることで発散しないものを導けます。なので、真の特異点は $r = 0$ のことになります。シュバルツシルト半径の面は特異点ではなく事象の地平面 (event horizon) と呼ばれます。ちなみに、太陽のシュバルツシルト半径は約 3km、地球は約 0.9cm です。

また、最初の方でも触れましたが、バーコフの定理から、球対称であることさえ要求してしまえば静的であるという条件を加えなくてもシュバルツシルト解が唯一の解になることが分かっています。静的という条件が外されても成り立つために、例えば球対称でありさえすれば星が動径方向に振動してようとも星の外部の計量（シュバルツシルト計量）には何の影響もないということになります。よって、球対称なものが振動しても重力波は放出しないということになります。

シュバルツシルト半径を求めるだけなら簡単な方法があって、静止エネルギーと自己重力が釣り合う条件

$$Mc^2 = \frac{\kappa M^2}{r}$$

から

$$\begin{aligned}
Mc^2 &= \frac{\kappa M^2}{r} \\
r &= \frac{\kappa M}{c^2}
\end{aligned}$$

r が積分定数 m と同じ式になっているので、これを 2 倍すればそのままシュバルツシルト半径になります。静止エネルギーとせずに、光速での運動エネルギーとポテンシャルが釣り合うとしても出てきます（ラプラスの発想と同じ）。

静的で球対称として、極座標によってシュバルツシルト解を求めましたが、これを別の座標系にできます。ここでは、変換後の座標系は

$$ds^2 = A(r)(dx^0)^2 - B(r)d\sigma^2$$

という形にします。空間成分を全て $d\sigma^2$ の中にいれてしまい、係数が $B(r)$ になる座標系です。このような座標を等方座標といいます。等方なので方向に依存してないです。シュバルツシルト解

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{r})(cdt)^2 - \frac{1}{1-\frac{2m}{r}}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

の空間成分を

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{r})(cdt)^2 - B^2(\rho)[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

として、動径 r を新しく $\rho(r)$ に置き換え、係数が $B(\rho)$ になるようにします。二つの角度成分を比べれば

$$B^2\rho^2 = r^2$$

同様に、動径に対しては

$$\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}dr^2 = B^2 d\rho^2$$

この二つから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}dr^2 &= \frac{r^2}{\rho^2}d\rho^2 \\
\pm\frac{dr}{\sqrt{r^2-2mr}} &= \frac{d\rho}{\rho} \\
\pm\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-2mr}} &= \int\frac{d\rho}{\rho} \\
\pm\int\frac{1}{(r^2-2mr)^{-1/2}(r-m)+1}\frac{du}{\sqrt{r^2-2mr}} &= \int\frac{d\rho}{\rho} \qquad (u=\sqrt{r^2-2mr}+r) \\
\pm\int\frac{du}{(r-m)+(r^2-2mr)^{1/2}} &= \int\frac{d\rho}{\rho} \\
\pm\int\frac{du}{u-m} &= \int\frac{d\rho}{\rho} \\
\pm\log|\sqrt{r^2-2mr}+r-m| &= \log\rho + C
\end{aligned}$$

C は定数です。これは r が大きい場合では

$$\pm \log[2r] = \log \rho + C$$

となり、r と ρ は無限遠で等しくなって欲しいので、符号はプラスとし、定数 C を $\log 2$ とすることで両辺は等しくなります。よって

$$r - m + \sqrt{r^2 - 2mr} = 2\rho$$

これを変形させると

$$\begin{aligned} \frac{r - m - \sqrt{r^2 - 2mr}}{(r - m + \sqrt{r^2 - 2mr})(r - m - \sqrt{r^2 - 2mr})} &= \frac{1}{2\rho} \\ r - m - \sqrt{r^2 - 2mr} &= \frac{m^2}{2\rho} \end{aligned}$$

これを変形させる前のものと足し合わせることで

$$2(r - m) = 2\rho + \frac{m^2}{2\rho}$$

後はこれを r の式にすればいいので

$$r = \rho + \frac{m^2}{4\rho} + m = \rho(1 + \frac{m}{2\rho})^2$$

よって、B は

$$B = (1 + \frac{m}{2\rho})^2$$

となります。

　これで空間部分はわかったので、時間成分の式の r も ρ で置き換えて

$$\begin{aligned} (1 - \frac{2m}{r}) &= 1 - \frac{2m}{\rho(1 + \frac{m}{2\rho})^2} \\ &= \frac{\rho(1 + \frac{m}{2\rho})^2 - 2m}{\rho(1 + \frac{m}{2\rho})^2} \\ &= \frac{(1 - \frac{m}{2\rho})^2}{(1 + \frac{m}{2\rho})^2} \end{aligned}$$

よって、等方座標でのシュバルツシルト解は

$$ds^2 = \frac{(1-\frac{m}{2\rho})^2}{(1+\frac{m}{2\rho})^2}(cdt)^2 - (1+\frac{m}{2\rho})^4[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

これは $m=0$ でミンコフスキー計量になります。このため、重力が弱いと近似するためには $\dfrac{m}{\rho} \ll 1$ とすればいいので、$(1 \pm \dfrac{m}{2\rho})^{2,4}$ の部分を 1 次まで展開した

$$(1 \pm \frac{m}{2\rho})^2 \simeq 1 \pm 2\frac{m}{2\rho} \pm \cdots = 1 \pm \frac{m}{\rho} \pm \cdots$$

$$(1 + \frac{m}{2\rho})^4 \simeq 1 + 4\frac{m}{2\rho} + \cdots = 1 + \frac{2m}{\rho} + \cdots$$

を使うことで

$$\begin{aligned} ds^2 &\simeq (1-\frac{m}{\rho})(1-\frac{m}{\rho})(cdt)^2 - (1+\frac{2m}{\rho})d\sigma^2 \\ &= (1-\frac{2m}{\rho} + \frac{m^2}{\rho^2})(cdt)^2 - (1+\frac{2m}{\rho})d\sigma^2 \\ &\simeq (1-\frac{2m}{\rho})(cdt)^2 - (1+\frac{2m}{\rho})d\sigma^2 \end{aligned}$$

弱い重力での計量 g_{00} は

$$g_{00} \simeq (1+\frac{2\phi}{c^2}) = (1-\frac{2\kappa M}{c^2\rho})$$

なので

$$(1-\frac{2\kappa M}{c^2\rho}) = (1-\frac{2m}{\rho})$$

$$m = \frac{\kappa M}{c^2}$$

となり、m は最初に求めたシュバルツシルト解での結果と一致します。

量子論との関係もついでに簡単に見ておきます。シュバルツシルト半径とコンプトン波長が等しくなるとして

$$\frac{\hbar}{Mc} = \frac{\kappa M}{c^2}$$

$$M = \sqrt{\frac{\hbar c}{\kappa}}$$

$h = 2\pi\hbar$ はプランク定数です。この質量 M をプランク質量と言います。プランク質量でのコンプトン波長をプランク長と呼びます。プランク質量には重力定数とプランク定数という重力と量子論の基本的な定数を含まれているので、量子重力に関わっていることが予想されています。このときのエネルギースケールは

$$Mc^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{\kappa}} \sim 10^{19}(\mathrm{GeV})$$

となっていて、これは現在観測可能な標準模型でのエネルギースケール 100(GeV) に比べたらかなり大きなものになっています。

こういったことから、もし質量がプランク質量より小さい場合だと、シュバルツシルト半径がコンプトン波長よりも短くなります。つまり、量子論的な効果が確実に表に出てくるために一般相対性理論は使い物にならなり (相対論は古典論)、量子重力理論を必要とします。もっと細かい話になりますが、そんな量子重力理論の候補の一つである弦理論においては、プランクスケールよりも大きなスケール (ミリメートル程度) でわけのわからない状況 (高次元からの寄与) が発生すると予想されています。ここまで大きなスケールだと量子論の話ではなくなるので、相対論による重力崩壊の理論は修正が必要となります (弦理論が正しいなら)。

ちなみに、コンプトン波長を求める方法もシュバルツシルト半径を求める方法と同じようにして求めることができます。重力の代わりに静電ポテンシャルを使って

$$mc^2 = \frac{e^2}{r}$$

$$r = \frac{e^2}{mc^2}$$

これは古典電子半径と呼ばれるもので、電磁相互作用での重力定数 (結合定数の意味) である微細構造定数 α で割ると

$$\frac{\hbar c}{e^2}\frac{e^2}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc}$$

となり、プランク波長を求めることができます。これをさらに α で割ると

$$\frac{\hbar c}{e^2}\frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

これがボーア半径になります。